УДК 512.54

А. Л. Вишневецкий

Система инвариантов некоторых групп класса 2 с коммутантом ранга два

Будем называть полную группу конечнопорожденной, если она порождается конечным множеством элементов с помощью операций умножения, деления и извлечения корня. В работе классифицированы следующие два семейства групп класса 2: 1) конечные группы, у которых экспонента не делится на квадрат простого числа, а порядок коммутанта — на куб простого числа; 2) конечнопорожденные полные группы без кручения с коммутантом ранга два. Рассматриваемые задачи классификации становятся дикими, если для семейства 1) опустить условие на экспоненту или заменить куб простого числа четвертой степенью, а для семейства 2) рассмотреть группы с коммутантом ранга три.

Для групп семейства 1) силовская 2-подгруппа имеет экспоненту 2 и, следовательно, является элементарной абелевой 2-группой. Так как конечная нильпотентная группа является прямым произведением силовских p-подгрупп, то вместо семейства 1) достаточно классифицировать семейство Ω_1 p-групп класса 2, имеющих экспоненту p и коммутант порядка $\leqslant p^2$ ($p \neq 2$). Семейство 2) обозначим через Ω_2.

Будем называть абелеву группу элементарной, если ее можно рассматривать как векторное пространство над некоторым полем K. Этому условию удовлетворяют элементарные абелевы p-группы при $K = F$, где F — поле из p элементов, и полные абелевы группы без кручения при $K = Q$, где Q — поле рациональных чисел.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Для произвольной группы $H \in \Omega$ обозначим через $\Phi(H)$ наибольший нормальный делитель такой, что $V = H/\Phi(H)$ — элементарная абелева группа. Размерность пространства V над полем K назовем рангом группы H (обозначение: $\mathrm{rg}\, H$).

Обозначим через $\langle T \rangle$ группу, порожденную подмножеством $T \subset H$; в случае $H \in \Omega_2$ в число операций, порождающих группу, будем включать извлечение корня. Пусть H' и $Z(H)$ — коммутант и центр группы H, $\mathrm{cl}\, H$ — класс нильпонентности, $\exp H$ — экспонента группы H. Если H — полная группа без кручения, положим $\exp H = Q$. Группа H называется специальной, если $H' = \Phi(H) = Z(H)$ — элементарная абелева группа.

1. Пучок матриц, сопоставляемый группе H. Пусть H — группа семейства Ω, $Z = Z(H)$.

Лемма 1. *$H = Z_1 \times H_1$, где $Z_1 \subset Z$, $Z(H_1) \subset H'$.*

Доказательство. Если $Z \subset H'$, то утверждение очевидно; поэтому можно считать, что существует элемент $x \in Z \setminus H'$. Так как группа H конечно порождена, то достаточно доказать, что $H = \langle x \rangle \times P$ для некоторой подгруппы $P \in \Omega$. Поскольку Z — элементарная абелева группа, то $Z = \langle x \rangle \times Z_1$ для некоторой подгруппы $Z_1 \subset Z$. Пусть P — подгруппа, порожденная группой Z_1 и представителями смежных классов разложения H по подгруппе Z. Так как $\langle x \rangle \subset Z$ и $P \supset H'$, то $\langle x \rangle$, P — нормальные подгруппы в H. Из $\langle x \rangle \subset Z$ следует, что $\langle x \rangle \cap P = \{1\}$. Поскольку $\langle x, P \rangle = H$, то $H = \langle x \rangle \times P$.

Следствие 1. *$H = Z_0 \times H_0$, где Z_0 — элементарная абелева, а H_0 — специальная группа. Подгруппы Z_0 и H_0 определяются группой H однозначно.*

В силу следствия 2 при изучении групп семейства Ω достаточно ограничиться специальными группами. Ниже, если не оговорено противное, $H \in \Omega$ — специальная группа с коммутантом ранга $r = 2$. Случай $r = 1$ рассмотрен в конце п. 2.

Так как $r = 2$, то $H' = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle$ для некоторых $z_1, z_2 \in H'$. Поэтому для любых $g, h \in H$

$$[g, h] = z_1^{\alpha(g,h)} z_2^{\beta(g,h)}, \tag{1}$$

где $\alpha(g, h)$ и $\beta(g, h)$ — билинейные антисимметрические функционалы в пространстве $V = H/H'$ над полем K. Подпространство пространства V, на котором функционалы α и β обращаются в нуль, называется вполне изотропным. Из [1, теорема 3] вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Пространство V однозначно с точностью до нумерации слагаемых разлагается в прямую сумму двух вполне изотропных подпространств.*

Пусть бинарная форма $f(x, y)$ является степенью неприводимой формы. Сопоставим форме f пучок матриц $M(f)$ следующим образом. Если $f(x, y) = y^k$, то

$$M(f) = \begin{pmatrix} y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}$$

$k \times k$ — матрица; если $f(x, y) \neq y^k$, положим $M(f) = xE + y\Phi$, где E — единичная матрица, Φ — клетка Фробениуса, соответствующая многочлену $f(x, 1)$. Пусть, далее, $L(m)$ — $m \times m + 1$ пучок

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}.$$

Для произвольной матрицы A обозначим через A^t транспонированную матрицу.

Лемма 3. *Пусть A_1 и B_1 — кососимметрические $r \times r$ — матрицы над произвольным полем. Каноническая форма пучка $D = xA_1 + yB_1$ относительно преобразований конгруэнтности $D \to S^tDS$ есть*

$$\begin{pmatrix} 0 & -C_0^t \\ C_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где C_0 — прямая сумма нулевого пучка и пучков вида $L(m)$, $L^t(k)$ и $M(f)$. Эти прямые слагаемые пучка C_0 определены однозначно с точностью до транспонирования пучков вида $L(m)$ и $L^t(k)$.

Доказательство. Пусть V — r-мерное линейное пространство над основным полем, $\alpha(\lambda, \mu)$ и $\beta(\lambda, \mu)$ — билинейные антисимметрические формы на V, соответствующие матрицам A_1 и B_1. В базисе пространства V, составленном из базисов изотропных подпространств V_1 и V_2 (см. лемму 3), пучок D имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -C^t \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому формы $\alpha(\lambda, \mu)$ и $\beta(\lambda, \mu)$ будут заданы, если ограничиться случаем $\lambda \in V_1$, $\mu \in V_2$. Пусть α_1 и β_1 — соответствующие ограничения форм α и β, C_1 — пучок матриц, отвечающий формам α_1 и β_1. Так как формы α_1 и β_1 определены на паре различных подпространств V_1 и V_2, то замена базисов в этих подпространствах соответствует умножению пучка C_1 слева и справа на невырожденные матрицы S и $T: C_1 \to SC_1T$. Хорошо известно [2, с. 331—344], что канонический вид пучка матриц относительно таких преобразований есть прямая сумма пучков вида, указанного в формулировке леммы, и что эти пучки определяются пучком C_1 однозначно.

Следствие 2. *Группе H сопоставляется пучок вида*

$$L(m_1) \oplus \ldots \oplus L(m_s) \oplus M(f_1) \oplus \ldots M(f_u), \tag{3}$$

определяющий соотношения коммутирования в H.

Доказательство. Так как в фиксированном базисе пространства $V = H/H'$ функционалы α и β (см. (1)) определяют пару кососимметрических матриц, то группе H сопоставляется кососимметрический пучок D. По лемме 4 пучок D может быть приведен к виду (2). Пусть $C_0 = xA + yB$. Назовем A и B матрицами коммутирования группы H. Они определяют соотношения коммутирования образующих (а потому и любых) элементов в H. Чтобы доказать, что пучок C_0 может быть приведен к виду (3), достаточно (ввиду леммы 4) доказать, что 1) нулевой пучок не является прямым слагаемым пучка C_0 и 2) существует преобразование базиса пространства V, транспонирующее прямые слагаемые вида $L^t(k)$ пучка C_0 и соответствующие слагаемые в C_0^t, но не меняющее других блоков пучка (2).

Утверждение 1) докажем методом «от противного». Если пучок C_0 содержит нулевую строку или столбец, то соответствующий базисный элемент в $V = H/H'$ будет принадлежать $Z(H)$. Так как $Z(H) = H'$, получаем противоречие.

Доказательство утверждения 2) достаточно провести для случая, когда пучок C_0 состоит лишь из двух прямых слагаемых: $C_0 = C_1 \oplus C_2$. Укажем преобразование базиса пространства V, транспонирующее матрицу C_1, но не меняющее матрицы C_2. Пусть h_i (g_j) — элемент базиса пространства V, соответствующий i-й строке (j-му столбцу) матрицы C_1. Тогда нужными свойствами обладает преобразование, состоящее в замене множества $\{h_i\}$ множеством $\{g_j\}$, а множества $\{g_j\}$ — множеством $\{h_i^{-1}\}$ с сохранением порядка следования элементов. Пусть

$$C_0 = C_1 \oplus C_2, \; C_i = xA_i + yB_i, \; i = 1, 2, \tag{4}$$

— разложение пучка C_0 в прямую сумму, $\overline{H}_i$ — подгруппа в V, порожденная теми базисными элементами V, которые соответствуют строкам и столбцам матриц A_i и B_i, H_i — прообраз подгруппы $\bar{H}_i$ при естественном гомоморфизме $H \to V$. Так как элементы коммутанта нильпотентной группы можно исключить из любой ее системы образующих [3, с. 360], то прообраз базиса V является системой образующих группы H. Поэтому из (4) следует, что группа H является центральным произведением подгрупп H_1 и H_2. Отсюда и из следствия 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Группа H разлагается в центральное произведение далее неразложимых подгрупп, каждой из которых соответствует прямое слагаемое в* (3).

2. Инварианты группы H. Введем обозначения для параметров прямых слагаемых в (3): $I = \{m_1, \dots m_s\}$, $J = \{f_1, \dots f_u\}$. Множество $R = \{I, J\}$, сопоставляемое (согласно следствию 2) группе H, зависит лишь от выбора базиса в H'. Выясним характер этой зависимости.

Замена базиса в H' имеет вид

$$\begin{matrix} z_1 \to z_1^a z_2^b \\ z_1 \to z_1^c z_2^d \end{matrix}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in K,$$

и может быть получена последовательным выполнением замен вида 1) $z_1 \to z_1^e$ ($e \in K^\times = K \setminus \{0\}$; 2) $z_1 \to z_1 z_2$; 3) $z_1 \to z_2$, $z_2 \to z_1$. Этим заменам соответствуют следующие преобразования пучка $xA + yB$ матриц коммутирования: 1′) $A \to e^{-1} A$; 2′) $A \to A - B$; 3′) $A \to B$, $B \to A$. Замены 1′)—3′) для пучка $xA + yB$ равносильны следующим: 1″) $x - e^{-1} x$; 2″) $y \to y - x$; 3″) $x \to y$, $y \to x$. Из [2, с. 335—336] следует, что числа $m_1, \dots, m_s \in I$ равны степеням некоторых бинарных форм от x и y, определяемых пучком (3). Так как преобразования 1″)—3″) линейны относительно x и y, то они не изменяют множество I.

Переходя ко множеству J, отметим, что матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, определяющую замену базиса в H', можно рассматривать с точностью до множителя из $K^\times$, т. е. как элемент группы $G = \mathrm{PGL}(2, K)$. Действительно, для произвольного элемента $e \in K^\times$ замена $z_1 \to z_1^e$, $z_2 \to z_2^e$ базиса в H' приводит к умножению матриц коммутирования A, B на e^{-1}. Это изменение матриц A, B можно компенсировать путем умножения на e^{-1} элементов пространства V, отвечающих строкам пучка $xA + yB$.

Пусть $M(x, y)$ — одна из матриц $M(f_i)$ из (3). При изменении базиса в H', т. е. после выполнения подстановок вида 1″) — 3″), матрица $M(x, y)$ перейдет в $\tilde{M}(x, y) = M(ax + by, cx + dy)$ для некоторого элемента $\theta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$. Так как $\det M(x, -y) = f_i(x, y)$, то $\det \tilde{M}(x, -y) = f_i^\theta(x, y)$, где $f_i^\theta(x, y) = f_i(ax + by, cx + dy)$. Назовем формы $f(x, y)$ и $f^\theta(x, y)$ эквивалентными. Пусть $M(\tilde{f})$ — канонический вид пучка $\tilde{M}(x, y)$. Так как при преобразованиях вида $C \to SCT$ (где S, T — невырожденные матрицы) пучка C его определитель умножается на элемент из $K^\times$, то $f(x, y) = \det M(x, -y) = e \det \tilde{M}(x, -y) = \tilde{e} f^\theta(x, y)$, где $e \in K^\times$. Будем рассматривать бинарные формы с точностью до множителя из $K^\times$. Тогда из последнего равенства следует, что замена базиса группы H' переводит формы $f_i \in J$ в формы f_i^θ $(i = 1, \dots, u)$. Преобразование $\theta \in G$ определяется заменой базиса в H' и не зависит от i. Обозначим через $\bar{J}$ класс одновременной (т. е. с одинаковыми θ) эквивалентности форм множества J. Назовем множество $\bar{R} = \{I, \bar{J}\}$ определяющим классом группы H. Отображение $\sigma: H \to \bar{R}$ определено однозначно.

Построим обратное отображение $\bar{R} \to H$. Пусть $\bar{R} = \{I, \bar{J}\}$, где множество $I = \{m_1, \dots, m_s\}$ состоит из натуральных чисел, а $\bar{J}$ — класс одновременной эквивалентности форм множества $J = \{f_1, \dots, f_u\}$, где f_i — степень неприводимой над полем K формы. С помощью элементов множеств

I, J построим пучок $C = xA + yB$, имеющий вид (3). Пусть n — число строк, а m — число столбцов пучка C.

Пусть P_1 и P_2 — элементарные абелевы группы экспоненты e, $e = p$ или $e = Q$, H_0 — их нильпотентное класса 2 произведение [4]. Порядок элемента g_1g_2 ($g_i \in P_i$) равен p при $e = p$ и равен ∞ при $e = Q$ [4, предложения 2.20 и 4.32]. Поэтому $\exp H_0 = p$ при $e = p$ и H_0 — группа без кручения при $e = Q$. Чтобы доказать, что $\exp H_0 = Q$ при $e = Q$, остается проверить полноту группы H_0. Для любого $h \in H_0$ имеем $h = g_1g_2z$, где $g_i \in P_i$, $z \in H_0'$. Так как $[h_1, h_2]^{1/k} = [h_1, h_2^{1/k}]$ для любых $h_i \in P_i$, то абелева группа H_0' полна. Поэтому остается извлечь корень степени k из g_1g_2. Легко видеть, что

$$(g_1g_2)^{1/k} = s_1s_2\,[s_1, s_2]^{-(k-1)/2}, \text{ где } s_i = g_i^{1/k}.$$

Пусть $g_1, \dots, g_n$ — базис группы P_1, $h_1, \dots, h_m$ — базис группы P_2, H_1 — фактор-группы H_0 по нормальному делителю, порождаемому соотношениями

$$[g_i, h_j] = z_1^{\alpha_{ij}} z_2^{\beta_{ij}},$$

где $(\alpha_{ij}) = A$, $(\beta_{ij}) = B$, $z_1, z_2 \in H_0'$, $\langle z_1 \rangle \neq \langle z_2 \rangle$. Так как элементы $[g_i, h_j]$ образуют базис группы H_0', то H_1 — неабелева группа.

Очевидно, H_1 — группа класса 2 и экспоненты p или Q с $\operatorname{rg} H_1' \leqslant 2$. Если $Z(H_1) \neq H_1'$, то существует минимальный базис группы H_1, содержащий элемент $g \in Z(H_1) \setminus H_1'$.

В этом базисе пучок матриц коммутирования содержит нулевую строку или столбец и, следовательно, нулевое прямое слагаемое. Так как исходный пучок C такого слагаемого не содержал, получаем противоречие утверждению об однозначности определения канонических прямых слагаемых пучка [2, с. 344]. Поэтому $Z(H_1) = H_1'$ и, следовательно, H_1 — специальная группа семейства Ω. Тем самым определено отображение $\sigma_1 : \overline{R} \to H_1$.

Лемма 4. *Пусть T — группа класса 2 и экспоненты p или Q с минимальной системой образующих $A = \{a_i\}$. Любое соотношение в T является следствием соотношений вида*

$$\prod_{i,j} [a_i, a_j]^{\nu_{ij}} = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\varkappa$ — произвольное соотношение в T, $\overline{\varkappa}$ — его образ при факторизации по T'. На аддитивном языке $\overline{\varkappa}$ является линейным уравнением над полем. Если оно не является тождеством, то его можно решить относительно образа некоторого элемента a_i. Переходя к прообразу, получаем соотношение, выражающее a_i через элементы из $A \setminus a_i$ и элементы из T'. Так как последние можно исключить из любой системы образующих [3, с. 360], получаем противоречие минимальности системы A. Поэтому $\overline{\varkappa}$ — тождество, т. е. $\varkappa$ является следствием соотношений в T'.

Следствие 3. $\sigma_1 = \sigma^{-1}$.

Доказательство. Группы H и H_1 имеют одинаковые соотношения вида (5), определяемые пучком (3). Поэтому $H \cong H_1$.

Из доказанного выше вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Группа H однозначно с точностью до порядка сомножителей разлагается в центральное произведение далее неразложимых подгрупп:*

$$H = S_1 \circ \dots \circ S_{s+u}. \tag{6}$$

Неразложимый сомножитель S в (6) является специальной группой с коммутантом ранга 1 или 2 и определяется либо числом $m_i \in I$, либо классом эквивалентности, порожденным степенью $f_i(x, y) \in J$ неприводимой бинарной формы над полем K ($1 \leqslant i \leqslant S$, $1 \leqslant j \leqslant u$). Множество $\overline{R} = \{I, \overline{J}\}$ является полной системой инвариантов группы H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность разложения (6) следует из однозначности отображения σ. Если S —не специальная группа, то $Z(S) \setminus S' \neq \varnothing$. Поэтому прямое слагаемое в (3), соответствующее группе S, содержит нулевую строку или столбец. Так как слагаемые в (3) таких строк и столбцов не содержат, получаем противоречие.

Выясним, какие пучки соответствуют тем неразложимым сомножителям S в (6), у которых $\operatorname{rg} S'=1$. Так как $S'=\langle z_1 \rangle$ для некоторого $z_1 \in S'$, то соответствующий пучок D матриц коммутирования сводится к одной матрице. Поэтому если $D = L(m)$ для некоторого m, то пучок D содержит нулевой столбец, что, как уже отмечалось, противоречит условию $S' = Z(S)$. Если же $D = M(f)$, то $D = xE$. Так как пучок D неразложим в прямую сумму пучков, то он имеет размеры 1×1, а $f(x, y) = x$. Этой форме эквивалентны линейные формы и только они. Таким образом, неразложимые сомножители в (6), имеющие коммутант ранга 1, соответствуют тем слагаемым вида $M(f)$ в (3), у которых форма f линейна. Все эти сомножители имеют ранг 2 и в случае групп экспоненты p изоморфны неабелевой группе порядка p^3.

З а м е ч а н и е. Хотя в пп. 1, 2 рассматривалась группа H с $\operatorname{rg} H' = 2$, все полученные результаты (и их доказательства) справедливы и при $\operatorname{rg} H' = 1$. Отметим, что при $\operatorname{rg} H' = 1$ 1) каноническим видом пучка коммутирования $xA + yB$ будет xE и 2) группа H разлагается в центральное произведение неабелевых специальных групп ранга 2 и экспоненты $\exp H$. Оба утверждения по существу доказаны в предыдущем абзаце.

3. Н е р а з л о ж и м ы е г р у п п ы. Пусть S — неразложимый в центральное произведение сомножитель в (6). В силу теоремы 9 и сделанного выше замечания группа S определяется либо числом $m \in I$, либо классом эквивалентности формы $f(x, y) \in J$. В первом случае назовем S группой типа I, во втором— группой типа II. Охарактеризуем группы типов I и II как абстрактные группы.

Т е о р е м а 3. *Пусть T — неразложимая в центральное произведение специальная группа экспоненты p или Q с коммутантом ранга 1 или 2, n — ранг группы T, $Z = Z(T)$. Тогда:*

1) *группа T имеет тип I или II;*

2) *следующие условия равносильны:* а) *T — группа типа* I; б) *n — нечетное число;* в) *$[t, T] = T'$ для некоторого $t \in T \setminus Z$;*

3) *следующие условия равносильны:* а) *T — группа типа* II; б) *n — четное число;* в) *$[t, T] = T'$ для любого $t \in T \setminus Z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как группа T неразложима в центральное произведение, то по теореме 1 (справедливой, согласно сделанному в конце п. 2 замечанию, и при $\operatorname{rg} P' = 1$) пучок C матриц коммутирования группы T может быть приведен либо к виду $L(m)$, либо к виду $M(f)$. Это доказывает утверждение 1).

2. Так как сумма числа строк и столбцов у пучков вида $L(m)$ нечетна, а у пучков вида $M(f)$ четна, то для доказательства равносильности условий а) и б) утверждения 2) достаточно заметить, что сумма числа строк и столбцов пучка C равна n.

Докажем равносильность условий а) и в). Пусть $t \in T \setminus Z$, $T_t=[T, t]$. Так как $Z \supset T'$, то можно выбрать минимальный базис группы T, содержащий элемент t. Если $T_t \neq T'$, то можно выбрать минимальный базис группы T', содержащий элемент $z \in T' \setminus T_t$. При указанном выборе базисов матрица коммутирования, соответствующая элементу z, содержит нулевую строку (или столбец), соответствующую элементу t. Так как обе матрицы пучка $M(f)$ невырождены, то из условия в) следует а). Наоборот, предположим, что условие а) не выполнено, т. е. $T_t = T'$ для любого $t \in T \setminus Z$. Тогда при любом выборе базисов в T и T' каждая из матриц коммутирования не содержит нулевого столбца. Так как обе матрицы пучка $L(m)$ содержат нулевые столбцы, то T не может быть группой типа II. Это доказывает равносильность условий а) и в) утверждения 2). Утверждение 3) вытекает из утверждений 1) и 2).

В обозначениях теоремы 3 рассмотрим вопрос о числе неизоморфных групп T, имеющих экспоненту p и фиксированный ранг n. При $|T'| = p$

ответ хорошо известен: так как T — центральное произведение изоморфных групп порядка p^3, то число n должно быть четным и для каждого четного n существует единственная группа T. Рассмотрим случай $|T'| = p^2$. Пусть $O_p\ (n)$ — число классов введенной выше эквивалентности неприводимых бинарных форм над полем $F = GF\ (p)$. При $(n,\ p+1) = 1$ явная формула для $O_p\ (n)$ получена в [5].

Теорема 4. *Число попарно неизоморфных групп T с* $\exp\ T = p$ *и* $|T'| = p^2$ *равно 1 при n нечетном и равно* $\sum\limits_{2m|n} O_p(m)$ *при n четном.*

Доказательство. Пусть C_0 — канонический вид (3) пучка матриц коммутирования группы T. В силу леммы 7 пучок C_0 определяет группу T. Если n нечетно, $n = 2n_1 + 1$, то $C_0 = L\ (n_1)$. Это доказывает теорему при n нечетном.

Если n четно, $n = 2n_1$, то $C_0 = M(f)$, где $\deg f = n_1$ и $f = f_0^k$ для некоторой неприводимой над полем F формы f_0. Наоборот, произвольная неприводимая форма f_1 степени m/n_1 определяет пучок $M(f_1^k)$ (где $k = n_1 m^{-1}$), а последний, в свою очередь, определяет группу T ранга $2n_1$.

По теореме 2 группы, определяемые пучками вида $M\ (f)$, изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие формы эквивалентны. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда эквивалентны неприводимые формы.

В заключение отметим, что доказательство теоремы 4 при n нечетном проходит и в случае $\exp\ T = Q$.

1. *Scharlau R.* Paare alternierender Formen.— Math. Z., 1976, **147**, N 1, s. 13—19.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп.— М.: Наука, 1974.— 456 с.
4. *Головин О. Н.* Метабелевы произведения групп. — Мат. сб., 1951, **28**, № 2, с. 431 — 444.
5. *Вишневецкий А. Л.* О числе классов проективно-эквивалентных бинарных форм над конечным полем.— Докл. АН УССР, Сер. А, 1982, № 4, с. 9—12.

Харьк. высш. воен. авиац. училище радиоэлектроники Поступила 25.07.83