УДК 517.5:517.7

В. К. Дзядык

А-метод и рациональная аппроксимация

1. В работе [1] предложен метод эффективной аппроксимации многочленами функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами (кратко ЛДУМК). В последнее время автором установлена возможность применить этот метод к получению нового способа рациональной аппроксимации решений ЛДУМК.

Предлагаемый способ является менее общим (в смысле широты класса функций, к которым он применим), чем метод непрерывных дробей и, в частности, метод аппроксимаций Паде. Важность его состоит, однако, в том, что на сегменте $[-h, h]$ он во многих рассмотренных примерах дает лучший порядок аппроксимации, чем метод аппроксимаций Паде, и, как мы увидим, существуют веские эвристические соображения в его пользу. Точнее, этот способ, который мы будем называть РА-методом, обладает тем свойством, что во всех рассмотренных примерах построенные для некоторой функции $y(x)$ при его помощи рациональные полиномы $R^0_{n,m}(x) = R^0_{n,m}(y; x)$ порядка (n, m) осуществляют аппроксимацию, при которой справедливо неравенство $\| y(x) - R^0_{n,m}(x) \|_{C_{[-h,h]}} \leqslant AE_{n,m}(y)_{C_{[-h,h]}}$, $A = \text{const}$.

2. Суть РА-метода состоит в следующем. Пусть некоторая функция $y(x)$ является решением задачи Коши для ЛДУМК вида

$$a_0(x) y^{(k)} + a_1(x) y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x) y = p(x), \quad y^{(j)}(0) = y_j, \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{1}$$

где $a_j(x)$ и $p(x)$ — многочлены и $a_0(x) \geqslant c > 0 \ \forall x \in [-h, h]$.

С целью построения рациональных полиномов $R_{n,m}(x) = R_{n,m}(y; x)$ порядка (n, m) по РА-методу следует вначале рассмотреть вспомогательную функцию

$$z(x) = Q_m(x) y(x), \tag{2}$$

где

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \quad b_m := 1, \tag{3}$$

— некоторый подлежащий определению многочлен степени m.

Поскольку согласно (2)

$$y^{(j)}(x) = \left(\frac{z(x)}{Q_m(x)}\right)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} z^{(j-i)} (Q_m^{-1})^{(i)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} A_{i(m-1)} Q_m^{-i-1} z^{(j-i)},$$

где $A_{i(m-1)} = A_{i(m-1)}(x)$ — некоторые многочлены степени $i(m-1)$, представляющие собой линейные комбинации произведений $b_{\nu_1} b_{\nu_2} \ldots b_{\nu_i} \times \times x^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_i-i}$, то после подстановки значений $y^{(j)}$ в (1) это уравнение преобразуется к виду

$$a_0(x) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{A_{i(m-1)}}{Q_m^{i+1}} z^{(k-i)} + a_1(x) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{A_{i(m-1)}}{Q_m^{i+1}} z^{(k-1-i)} + \ldots$$

$$\ldots + a_k(x) \frac{z}{Q_m} = p(x),$$

или, что то же самое, к виду

$$B_0(x) z^{(k)} + B_1(x) z^{(k-1)} + \ldots + B_k(x) z = F(x), \tag{4}$$

$$z^{(j)}(0) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} Q_m^{(i)}(0)\, y_{j-i}, \tag{4'}$$

где $B_j(x) = B(x, b_0, b_1, \ldots, b_m)$ и $F(x)$ — некоторые многочлены, которые также зависят нелинейно от b_i. В частности, $B_0(x) = a_0(x) Q_m^k(x)$.

Путем повторного интегрирования по частям на сегменте $[0, x]$ задача (4), (4′) может быть заменена эквивалентным ей интегральным уравнением вида

$$a_0(x) Q_m^k(x) z(x) = \int_0^x \Pi_l(x, t; b_i) z(t)\, dt + \tilde{F}(x, b_i). \tag{5}$$

Отправляясь от этого уравнения, образуем операторное уравнение

$$a_0(x) Q_m^k(x) z_n(x) = \int_0^x \Pi_l(x, t; b_i) z_n(t)\, dt + \tilde{F}(x, b_i) - \varepsilon_{n+m}(x), \tag{5'}$$

в котором $l = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \{\deg B_j(x) + j - 1\}$ и

$$\varepsilon_{n+m}(x) = \sum_{\nu=1}^{l+1} \tau_{n+m+\nu} T_{n+m+\nu}(x/h), \quad z_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j. \tag{5''}$$

При этом число n подразумевается таким, что $m+n+l+1 \geqslant \deg \tilde{F}(x, b_i)$.

Из (5), (5′), в частности, вытекает, что если $Q_m(x) \geqslant c(n, m) > 0$, то

$$a_0(x) Q_m^{k+1}(x) y(x) - a_0(x) Q_m^k(x) z_n(x) = \int_0^x \Pi_l(x, t; b_i) Q_m(t) \times$$

$$\times \left[y(t) - \frac{z_n(t)}{Q_m(t)}\right] dt + \varepsilon_{n+m}(x) \Rightarrow y(x) - \frac{z_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \frac{1}{a_0(x) Q_m^{k+1}(x)} \int_0^x \Pi_l(x, t; b_i)\, Q_m(t) \left[y(t) - \frac{z_n(t)}{Q_m(t)}\right] dt + \frac{\varepsilon_{n+m}(x)}{a_0(x) Q_m^{k+1}(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) - \frac{z_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\varepsilon_{n+m}(x)}{a_0(x) Q_m^{k+1}(x)} +$$

$$+ \frac{1}{a_0(x) Q_m^{k+1}(x)} \int_0^x R(x, t) \frac{\varepsilon_{n+m}(t)}{a_0(t) Q_m^{k+1}(t)}\, dt,$$

где $R(x, t) = R(x, t, m, n)$ — резольвента интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \Pi_l(x, t, b_i)\, Q_m(t)/a_0(x)\, Q_m^{k+1}(x)$. Отсюда следует, что если при достаточно большом n и каком-нибудь m окажется, что $Q_m(x) \geqslant c_0 > 0$, то, согласно теореме П. Л. Чебышева и замечанию к ней Валле-Пуссена, разность $y(x) - z_n(x)/Q_m(x)$ должна, по-видимому, иметь порядок наилучшего приближения $E_{n,m}(y)$:

$$\left\| y(x) - \frac{z_n(x)}{Q_m(x)} \right\|_{C[-h,h]} \leqslant AE_{n,m}(y)_{C[-h,h]}, \quad A = \text{const}.$$

Эти эвристические соображения говорят о целесообразности построения и исследования рациональных полиномов, получаемых по предлагаемому методу.

Производя в (5′) интегрирование, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x получим систему из $m + n + l + 2$ ($\geqslant km + n + \deg a_0(x)$) нелинейных алгебраических уравнений (кратко НАУ) для определения $m + n + l + 2$ неизвестных c_j, $j = \overline{0, n}$, b_i, $i = \overline{0, m-1}$, и $\tau_{m+n+\nu}$, $\nu = \overline{1, l+1}$. Среди решений полученной системы следует выбрать то решение, при котором $\forall x \in [-h, h]$ $Q_m(x) \neq 0$.

Конечно, требуется еще убедиться, что действительные решения системы НАУ для неизвестных b_i и c_j существуют и что при некоторых из полученных значений коэффициентов b_i все корни многочлена $Q_m(x)$ расположены вне сегмента $[-h, h]$.

Отметим в заключение, что проведенные выше рассуждения говорят о целесообразности следующего простого и, как показывают рассмотренные примеры, во многих случаях очень эффективного численного способа построения для $y(x)$ рациональных функций ее хорошего приближения.

Пусть $y(x)$ — решение задачи (1) или же функция, представимая на $[-h, h]$ ($(0, h]$) рядом Фурье — Чебышева (кратко Ф. — Ч.): $y(x) = a_0/2 + \sum_1^\infty a_k T_k(x/h)$.

При заданных n и $m \in \mathbb{Z}_+$, используя А-метод [1] (или же ряд Ф. — Ч., если он известен), строим многочлен $y_{n+m}(x) = a_0/2 + a_1 T_1(x/h) + \ldots + a_{n+m} T_{n+m}(x/h)$ и полагаем $Q_m(x) = c_0 + c_1 T_1(x/h) + \ldots + c_m T_m(x/h)$, где коэффициенты c_j определяются из условий

$$c_m = 1, \quad Q_m(x)\, y_{n+m}(x) \perp T_j(x/h), \quad j = n+1, n+2, \ldots, n+m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{n+m}(x)\, Q_m(x) = P_n(x) + \sum_{j=n+m+1}^{n+2m} \tau_j T_j(x/h),$$

в которых $P_n(x)$ — частная сумма порядка n разложения $Q_m(x)\, y_{n+m}(x)$ в ряд Ф. — Ч. После этого полагаем $R_{n,m}(x) = P_n(x)/Q_m(x)$.

Предложенный способ применим также к рациональной аппроксимации решений сингулярных уравнений типа Фукса: x^r, $x \ln x$ и др.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 08.08.84