УДК 517.547.3

Я. В. Васильків (Львів. ун-т)

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ПОВНОЇ ВАРІАЦІЇ ЛОГАРИФМА ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

We establish that, for the Blaschke product $B(z)$ converging in the unit disk, the condition $-\infty < \int_0^1 \log(1-t)n(t, B)\,dt$ is sufficient for the total variation of $\log B$ to be bounded on a circle of radius r, $0 < r < 1$. For products $B(z)$ with zeros concentrated on only one ray, this condition is also necessary. Here, $n(t, B)$ denotes a number of zeros of the function $B(z)$ in a disk of radius t.

Встановлено, що для збіжного в одиничному крузі добутку Бляшке $B(z)$ умова $-\infty < \int_0^1 \log(1-t)n(t, B)\,dt$ є достатньою для обмеженості повної варіації $\log B$ на колі радіуса r, $0 < r < 1$, а для добутків $B(z)$ з нулями, зосередженими лише на одному промені, вона також і необхідна. Тут $n(t, B)$ — кількість нулів функції $B(z)$ в крузі радіуса t.

Нехай D — одиничний круг в $\mathbb{C}$, $\{a_\nu\}$ — послідовність відмінних від нуля точок з D, $a_\nu = |a_\nu|e^{i\alpha_\nu}$, таких, що

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}(1-|a_\nu|) < +\infty, \tag{1}$$

а

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\bar{a}_\nu}{|a_\nu|}\frac{a_\nu - z}{1-\bar{a}_\nu z}$$

— добуток Бляшке з нулями в точках a_ν, $z \in D$. Через D^* позначимо область $D^* = D \setminus \bigcup_{\nu=1}^{+\infty}[a_\nu, e^{i\alpha_\nu})$. Розглянемо функцію

$$\log B(z) = \log B(0) + \int_0^z \frac{B'(\xi)}{B(\xi)}d\xi, \quad z \in D^*,$$

де інтеграл береться по відрізку $[0, z]$,

$$\log B(0) = \log|B(0)| = \sum_{\nu=1}^{+\infty}\log|a_\nu| = \int_0^1 \log t\, dn(t, B), \tag{2}$$

$n(t, B)$ — кількість нулів функції $B(z)$ в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| < t\}$, $0 < t < 1$.

З умови Бляшке (1) випливає [1, с. 260], що

$$(1-t)n(t, B) = o(1), \quad t \to 1. \tag{3}$$

Тоді, інтегруючи (2) частинами, одержуємо

$$\log B(0) = -\int_0^1 n(t, B)\frac{dt}{t}.$$

Нехай

$$m_1(r, \log B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log B\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta$$

— повна варіація логарифма добутку Бляшке $B(z)$.

Нагадаємо, що $|B(z)| \le 1$, $z \in D$, тому

$$m_1(r, \log|B|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right| \right| d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta .$$

Отже, згідно з формулою Йенсена [1, с. 20], маємо

$$m_1(r, \log|B|) = -\int_0^r n(t, B)\frac{dt}{t} + \int_0^1 n(t, B)\frac{dt}{t} = \int_r^1 n(t, B)\frac{dt}{t}. \tag{4}$$

Повна варіація логарифма добутку Бляшке характеризується такими теоремами.

Теорема 1. *Нехай $B(z)$ — збіжний добуток Бляшке. Тоді для всіх $r \in (0, 1)$ справедлива нерівність*

$$m_1(r, \log B) \le \frac{4}{\pi} \int_0^1 \log\frac{1}{1-t}\frac{n(t, B)}{t} dt + 2\int_0^1 \frac{n(t, B)}{t} dt. \tag{5}$$

***Наслідок* 1.** *Нехай $B(z)$ — збіжний добуток Бляшке. Тоді умова*

$$\int_0^1 \log\frac{1}{1-t} n(t, B)\, dt < +\infty \tag{6}$$

достатня для виконання співвідношення

$$\sup_{0<r<1} m_1(r, \log B) < +\infty. \tag{7}$$

Теорема 2. *Нехай $B(z)$ — збіжний добуток Бляшке, нулі якого зосереджені лише на одному промені. Тоді умова* (6) *є необхідною і достатньою для виконання співвідношення* (7).

***Наслідок* 2.** *Існують збіжні добутки Бляшке $B(z)$, для яких функція $m_1(r, \log B)$ необмежена на* (0, 1).

Зауважимо, що умова (6) рівносильна умові

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (1-|a_\nu|) \log\frac{1}{1-|a_\nu|} < +\infty. \tag{8}$$

В цьому неважко переконатись, записавши ліву частину нерівності (8) за допомогою інтеграла Стільтьєса, інтегруючи частинами та враховуючи нерівності

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r} n(r, B) \le \int_r^1 \log\frac{1}{1-t} n(t, B)\, dt = o(1), \quad r \to 1,$$

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r} n(r, B) \le \int_0^r (1-t)\log\frac{1}{1-t}\, dn(t, B) = O(1), \quad r \to 1.$$

Фростман [2] встановив, що якщо виконується умова (8), то добуток Бляшке $B(z)$ абсолютно збіжний майже скрізь на одиничному колі. Крім цього, він показав [2] (див. також [3, с. 54]), що умова

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1-|a_\nu|}{\left|e^{i\theta_0} - a_\nu\right|} < +\infty$$

є необхідною і достатньою для того, щоб добуток Бляшке $B(z)$ з нулями a_ν і всі його часткові добутки (тобто добутки Бляшке, складені за всіма можливими підпослідовностями нулів $\{a_{\nu_k}\}$) мали в точці $e^{i\theta_0}$ радіальну границю, модуль якої дорівнює одиниці. Тут $e^{i\theta_0}$ — одна з граничних точок послідовності a_ν.

Лінден [4] встановив, що добуток Бляшке $B(z)$ з нулями $a_\nu = |a_\nu| e^{i\theta_\nu}$, де

$$\theta_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (1-|a_k|) \log\frac{1}{1-|a_k|}, \qquad \sum_{\nu=1}^{+\infty} (1-|a_\nu|) \log\frac{1}{1-|a_\nu|} = +\infty,$$

розбіжний скрізь на одиничному колі.

Інші приклади розбіжних скрізь на одиничному колі добутків Бляшке побудовані раніше Клуні та Піраняном (див. повідомлення в [4]).

Доведення теореми **1.** При кожному фіксованому $r \in (0, 1)$ позначимо через

$$\tilde{u}\left(re^{i\theta}\right) = (H * u)\left(re^{i\theta}\right)$$

згортку розподілу Гільберта [5, с. 103, 107]

$$H = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-i \operatorname{sign} k e^{ik\varphi}\right), \quad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

з функцією $u\left(re^{i\theta}\right) = \log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|$, тобто

$$c_k(r, \tilde{u}) = -i \operatorname{sign} k\, c_k(r, u), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

де

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нехай також

$$p(z) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} P\left(\bar{z}, te^{-i\alpha}\right) d\mu(a), \tag{10}$$

$$q(z) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} P\left(e^{i\alpha}, tz\right) d\mu(a) + \int_r^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} P\left(te^{i\alpha}, z\right) d\mu(a), \tag{11}$$

$|z| = r$, $a = |a| e^{i\alpha}$, $0 < r < 1$, де $P(z, w) = \operatorname{Re}\left[(z + w)(z - w)^{-1}\right]$, $\mu(a) = \sum_\nu \delta(a - a_\nu)$, $\delta(\xi)$ — функція Дірака.

Тоді [6]

$$c_0(r, \log B) = c_0(r, u),$$

$$c_k(r, \log B) = \gamma_k r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$c_{-k}(r, \log B) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_{-k}(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

де γ_k визначаються з розвинення

$$\log B(z) = \log B(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k z^k$$

у деякому околі точки $z = 0$,

$$n_k(r, B) = \int_{|a| \le r} e^{-ik\alpha} d\mu(a), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n_0(r, B) = n(r, B).$$

Згідно з [7]

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\overline{a}_\nu^k - a_\nu^{-k} \right] = \frac{1}{k} \int_0^1 \left[t^k - t^{-k} \right] d n_k(t, B) =$$

$$= -\int_0^1 \left[t^k + t^{-k} \right] \frac{n_k(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Підставивши (13) в (12), одержимо

$$c_0(r, \log B) = c_0(r, u),$$

$$c_k(r, \log B) = -\int_0^1 (rt)^k \frac{n_k(t, B)}{t} dt - \int_r^1 \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$c_{-k}(r, \log B) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_{-k}(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В роботі [7] встановлено, що

$$c_0(r, u) = -\int_r^1 \frac{n(t, B)}{t} dt,$$

$$c_k(r, u) = \frac{1}{2k} \int_0^r \left[(rt)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right] d n_k(t, B) +$$

$$+ \frac{1}{2k} \int_r^1 \left[(rt)^k - \left(\frac{r}{t}\right)^k \right] d n_k(t, B) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (rt)^k \frac{n_k(t,B)}{t} dt - \frac{1}{2} \int_r^1 \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,B)}{t} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t,B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$c_{-k}(r, u) = \overline{c}_k(r, u), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Крім цього, оскільки

$$P\left(re^{-i\theta}, te^{-i\alpha}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\alpha)},$$

то

$$c_k(r, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right) e^{-ik\theta} d\theta = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a| \le t} \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{-ik\alpha} d\mu(a) =$$

$$= \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Так само встановимо, що

$$c_k(r, q) = \int_0^1 (rt)^{|k|} \frac{n_k(t, B)}{t} dt + \int_r^1 \left(\frac{r}{t}\right)^{|k|} \frac{n_k(t, B)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Із співвідношень (9), (14) – (17) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $r \in (0, 1)$

$$c_k(r, \log B) \equiv c_k(r, u) - \frac{i}{2} c_k(r, \tilde{q}) - \frac{i}{2} c_k(r, \tilde{p}),$$

тобто

$$\log B = u - \frac{i}{2}(\tilde{q} + \tilde{p}). \tag{18}$$

Тоді

$$m_1(r, \log B) \le m_1(r, u) + \frac{1}{2} m_1(r, \tilde{q}) + \frac{1}{2} m_1(r, \tilde{p}), \quad 0 < r < 1. \tag{19}$$

На підставі того, що [8, с. 107, 112]

$$\tilde{P}\left(re^{-i\theta}, te^{-i\alpha}\right) = \frac{2rt \sin(\theta - \alpha)}{r^2 - 2rt\cos(\theta - \alpha) + t^2},$$

одержуємо

$$m_1(r, \tilde{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \tilde{p}\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \le \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{n(t, B)}{t} dt \int_0^{2\pi} \frac{2rt|\sin\theta|\, d\theta}{r^2 - 2rt\cos\theta + t^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^r \log\frac{r+t}{r-t} \frac{n(t, B)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x} \frac{n(xr, B)}{x} dx \le$$

$$\le \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log\frac{2}{1-x} \frac{n(x, B)}{x} dx, \quad 0 < r < 1. \tag{20}$$

Аналогічно маємо

$$m_1(r, \tilde{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \tilde{q}\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \le \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \log\frac{1+tr}{1-tr} \frac{n(t, B)}{t} dt + \right.$$

$$\left. + \int_r^1 \log\frac{t+r}{t-r} \frac{n(t, B)}{t} dt \right], \quad 0 < r < 1. \tag{21}$$

При оцінці правої частини нерівності (21) перш за все зауважимо, що

$$\log\frac{1+tr}{1-tr} \le \log\frac{1+t}{1-t} \le \log\frac{2}{1-t}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < r < 1. \tag{22}$$

Крім того, оскільки $r/x \le x$ при $\sqrt{r} \le x \le 1$ і $\frac{t+r}{t-r} \le \frac{1+t}{1-t}$ при $\sqrt{r} \le t \le 1$, то

$$\int_r^1 \log\frac{t+r}{t-r} \frac{n(t,B)}{t} dt = \int_r^{\sqrt{r}} \log\frac{t+r}{t-r} \frac{n(t,B)}{t} dt + \int_{\sqrt{r}}^1 \log\frac{t+r}{t-r} \frac{n(t,B)}{t} dt =$$

$$= \int_{\sqrt{r}}^1 \log\frac{1+x}{1-x} \frac{n(r/x, B)}{x} dx + \int_{\sqrt{r}}^1 \log\frac{t+r}{t-r} \frac{n(t,B)}{t} dt \le$$

$$\leq 2\int_{\sqrt{r}}^{1}\log\frac{1+x}{1-x}\,\frac{n(x,B)}{x}dx \leq 2\int_{0}^{1}\log\frac{2}{1-x}\,\frac{n(x,B)}{x}dx. \tag{23}$$

Підставивши (22) та (23) в (21), одержимо

$$m_1(r,\tilde{q}) \leq \frac{6}{\pi}\int_{0}^{1}\log\frac{2}{1-t}\,\frac{n(t,B)}{t}dt, \qquad 0<r<1. \tag{24}$$

І, нарешті, з урахуванням (19), (20), (24) та (4) маємо

$$m_1(r,\log B) \leq \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}\log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,B)}{t}dt + \left(1+\frac{4\log 2}{\pi}\right)\int_{0}^{1}\frac{n(t,B)}{t}dt \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}\log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,B)}{t}dt + 2\int_{0}^{1}\frac{n(t,B)}{t}dt,$$

що завершує доведення теореми 1.

***Доведення наслідку* 1.** Твердження цього наслідку випливає із співвідношень (5), (4) та (6).

***Доведення теореми* 2.** З огляду на наслідок 1 потрібно довести лише імплікацію (7) $\Rightarrow$ (6). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що нулі добутку Бляшке $B(z)$ додатні. Тоді маємо

$$m_1(r,\log B) \geq \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|\tilde{q}\left(re^{i\theta}\right)+\tilde{p}\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta, \qquad 0<r<1. \tag{25}$$

З означення функцій $p(z)$ та $q(z)$ одержуємо

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|\tilde{q}\left(re^{i\theta}\right)+\tilde{p}\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|\int_{0}^{1}\frac{2rt\sin\theta}{1-2rt\cos\theta+r^2t^2}\,\frac{n(t,B)}{t}dt +\right.$$

$$\left.+\int_{r}^{1}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\,\frac{n(t,B)}{t}dt + \int_{0}^{r}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\,\frac{n(t,B)}{t}dt\right|d\theta \geq$$

$$\geq \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}d\theta\int_{0}^{r}\frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\,\frac{n(t,B)}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{r}\log\frac{r+t}{r-t}\,\frac{n(t,B)}{t}dt, \qquad 0<r<1. \tag{26}$$

Оскільки

$$\log\frac{r+t}{r-t} \geq \log\frac{1+t}{1-t} \geq \log\frac{1}{1-t}, \qquad 0<t<r<1, \tag{27}$$

то, враховуючи нерівності (26) та (27), із співвідношення (25) маємо

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,\log B) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1}\log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,B)}{t}dt, \tag{28}$$

що завершує доведення теореми 2.

***Доведення наслідку* 2.** Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке з додатними нулями такими, що

$$\frac{C_1}{1-r}\log^{-2}\frac{1}{1-r} \le n(r,B) \le \frac{C_2}{1-r}\log^{-\alpha}\frac{1}{1-r},$$

де $1 < \alpha \le 2$, C_1, C_2 — деякі додатні сталі. Умова (1) рівносильна [1, с. 260] умові

$$\int_{r_0}^{1} n(t,B)\,dt < +\infty, \qquad 0 < r_0 = \min a_\nu,$$

де a_ν — нулі $B(z)$. Оскільки

$$\int_{r_0}^{1} n(t,B)\,dt \le C_2\int_{r_0}^{1}\frac{1}{1-t}\log^{-\alpha}\frac{1}{1-t}\,dt = C_2\int_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y^{\alpha}} < +\infty,$$

де $b_0 = -\log(1-r_0)$, то добуток $B(z)$ — збіжний.

Крім того,

$$\int_{r_0}^{1}\log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,B)}{t}\,dt \ge C_1\int_{r_0}^{1}\log^{-1}\frac{1}{1-t}\,\frac{dt}{1-t} = C_1\int_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y} = +\infty.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (28), одержуємо

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,\log B) = +\infty.$$

1. *Хейман У.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
2. *Frostman O.* Sur les produits de Blaschke // Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar. – 1942. – 12, № 15. – P. 169–182.
3. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
4. *Linden C. N.* On Blaschke products diverging everywhere on the boundary of the unit disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – 55, № 1. – P. 62–64.
5. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 399 с.
6. *Калинець Р. З., Кондратюк А. А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0,2\pi]$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 7. – С. 889–896.
7. *MacLane G. R., Rubel L. A.* On the growth of the Blaschke products // Can. J. Math. – 1969. – 21. – P. 595–600.
8. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.

Одержано 23.12.97