УДК 517.55

М. М. Цвиль, канд. физ.-мат. наук (Ростов. акад. стр-ва)

ФОРМУЛА В. К. ДЗЯДЫКА СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

An analog of Dzyadyk's formula is constructed for double series in Faber polynomials of two variables. By using this formula, we obtain the estimates of the convergence rate of the double Faber series, summed over rectangles and circles, in a bicylindric domain.

Побудовано аналог формули В. К. Дзядика для подвійних рядів за многочленами Фабера двох змінних. За допомогою цієї формули одержано оцінки швидкості збіжності підсумованих по прямокутниках та кругах подвійних рядів Фабера всередині біциліндричної області.

1. Положив $k = 1, 2$, введем необходимые обозначения и определения: L_k — замкнутая спрямляемая жорданова кривая в плоскости C^1 переменной z_k; D_k^+ — ограниченная, D_k^- — неограниченная область с границей L_k;

$$D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm};\ \ \sigma = L_1 \times L_2;\ \ C^2 = C^1 \times C^1;\ \ w_k = \varphi_k(z_k)$$

— функция, конформно и однолистно отображающая область D_k^- на область

$$U_k^- = \left\{ w_k \in C^1 : |w_k| > 1 \right\}$$

так, чтобы $\varphi_k(\infty) = \infty$ и

$$\lim_{z_k \to \infty} \frac{\varphi_k(z_k)}{z_k} > 0;$$

$z_k = \psi_k(z_k)$ — функция, обратная $\varphi_k(z_k)$,

$$T = \left\{ (w_1, w_2) \in C^2 : |w_1| = |w_2| = 1 \right\};$$

$$(\psi^* f)(w_1, w_2) \equiv f[\psi_1(w_1), \psi_2(w_2)];$$

$$U^{\pm\pm} = \left\{ (w_1, w_2) \in C^2 : |w_1| \lesseqgtr 1;\ |w_2| \lesseqgtr 1 \right\}.$$

С помощью весовой функции $g(z_1, z_2)$, аналитической в биобласти D^{--}, отличной от нуля, непрерывной в $\overline{D}^{--}$ и удовлетворяющей условию $g(\infty, \infty) = g_{00} > 0$ в работе [1] образована производящая функция для системы обобщенных полиномов Фабера двух переменных $\left\{ \Phi_{mn}(z_1, z_2) \right\}$:

$$G\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{(\psi^* g)(w_1, w_2)\psi_1'(w_1)\psi_2'(w_2)}{[\psi_1(w_1) - z_1][\psi_2(w_2) - z_2]} =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{mn}(z_1, z_2)}{w_1^{m+1} w_2^{n+1}},\ \ (w_1, w_2) \in U^{--},\ (z_1, z_2) \in D^{++}, \tag{1}$$

$$Z_{++}^2 = \left\{ (m \geq 0) \bigcap (n \geq 0) \right\}$$

— подмножество целочисленной решетки

$$Z^2 = \{(m, n) :\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\};$$

$$Q = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in R^2 \colon -\pi \le \theta_j \le \pi \right\}$$

— 2-мерный куб;

$$Q_+ = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in R^2 \colon \; 0 \le \theta_j \le \pi, \; j = 1, 2 \right\};$$

$$\Delta_\delta = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in R^2 \colon \; \theta_1^2 + \theta_2^2 \le \delta^2 \right\}.$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$\zeta_k \langle \theta_k \rangle \equiv \psi_k \left(\varphi_k(\zeta_k) e^{i\theta_k} \right), \quad \zeta_k \in L_k, \; k = 1, 2. \tag{2}$$

Преобразование (2) называется обобщенным поворотом на кривой L_k на угол θ_k.

2. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ есть интеграл типа Коши

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\sigma} \frac{\tau(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}, \quad (z_1, z_2) \in D^{++}. \tag{3}$$

Учитывая обозначение (2), введем в рассмотрение интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\sigma} \frac{\tau(\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \zeta_2\langle\theta_2\rangle) g(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{g(\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \zeta_2\langle\theta_2\rangle)(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}. \tag{4}$$

Предположим, что на торе T имеет место равномерно сходящееся разложение

$$\frac{(\psi^* \tau)(w_1, w_2)}{(\psi^* g)(w_1, w_2)} = \sum_{(k,l) \in Z^2} a_{kl} w_1^k w_2^l. \tag{5}$$

Используя формулу производящей функции (1) и разложение (5) для интеграла (4), получаем равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{T} \frac{(\psi^* \tau)(w_1 e^{-i\theta_1}, w_2 e^{-i\theta_2})}{(\psi^* g)(w_1 e^{-i\theta_1}, w_2 e^{-i\theta_2})} G \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} dw_1 dw_2 =$$

$$= \sum_{(k,l) \in Z^2_{++}} a_{kl} \Phi_{kl}(z_1, z_2) e^{-i(k\theta_1 + l\theta_2)}, \quad (z_1, z_2) \in D^{++}. \tag{6}$$

Далее, с помощью непрерывной 2π-периодической функции по каждой переменной функции $S(\theta_1, \theta_2)$, которая разлагается в равномерно сходящийся двойной тригонометрический ряд Фурье

$$S(\theta_1, \theta_2) = \sum_{(k,l) \in Z^2} \lambda_{kl} e^{i(k\theta_1 + l\theta_2)}, \tag{7}$$

используя равенство (6), получаем формулу

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{Q} S(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \iint\limits_{T} \frac{(\psi^* \tau)(w_1 e^{-i\theta_1}, w_2 e^{-i\theta_2})}{(\psi^* g)(w_1 e^{-i\theta_1}, w_2 e^{-i\theta_2})} \times$$

$$\times G \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} dw_1 dw_2 = \sum_{(k,l) \in Z^2_{++}} \hat{\lambda}_{kl} a_{kl} \Phi_{kl}(z_1, z_2). \tag{8}$$

В частности, вместо функции (7) можно взять произвольный тригонометрический полином, который представляет собой в общем случае частичную сумму ряда (7). Однако специфика многомерного случая проявляется в большом многообразии определений частичной суммы. Заметим, что каждую из этих сумм можно записать в виде

$$S_\Omega(\theta_1, \theta_2) = \sum_{(k,l)\in\Omega} \lambda_{kl} e^{i(k\theta_1 + l\theta_2)}, \tag{9}$$

где Ω — некоторое конечное подмножество решетки Z^2.

Если в формуле (8) вместо функции (7) взять тригонометрический полином (9), то получим алгебраический многочлен

$$P_{\Omega_+}(z_1, z_2) \equiv \sum_{(k,l)\in\Omega_+} \lambda_{kl} a_{kl} \Phi_{kl}(z_1, z_2), \tag{10}$$

где $\Omega_+ = \Omega \bigcap Z^2_{++}$.

Получен аналог формулы [2] В. К. Дзядыка преобразования тригонометрического полинома (9) в алгебраический многочлен двух переменных. В случае двух переменных, когда возможно большое многообразие определений частичной суммы $S_\Omega(\theta_1, \theta_2)$, после применения формулы (8) В. К. Дзядыка возможно появление разнообразных алгебраических полиномов $P_{\Omega_+}(z_1, z_2)$. В зависимости от способа построения частичной суммы $S_\Omega(\theta_1, \theta_2)$, а следовательно, и многочлена $P_{\Omega_+}(z_1, z_2)$, будут различны и условия сходимости $P_{\Omega_+}(z_1, z_2)$ к $f(z_1, z_2)$.

3. Рассмотрим частный случай, когда весовая функция $g(z_1, z_2) \equiv 1$. Пусть $f(z_1, z_2)$ есть интеграл типа Коши (3). Многочлен (9) будем называть ядром, если выполнено условие

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_Q S_\Omega(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 = 1.$$

В случае четного по каждой переменной ядра формула (8) принимает вид

$$P_{\Omega_+}(z_1, z_2) \equiv \frac{-1}{16\pi^4} \iint_{Q_+} S_\Omega(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \times$$

$$\times \iint_\sigma \Big[\tau\big(\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \zeta_2\langle\theta_2\rangle\big) + \tau\big(\zeta_1\langle-\theta_1\rangle, \zeta_2\langle-\theta_2\rangle\big) +$$

$$+ \tau\big(\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \zeta_2\langle-\theta_2\rangle\big) + \tau\big(\zeta_1\langle-\theta_1\rangle, \zeta_2\langle\theta_2\rangle\big) \Big] \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2}. \tag{11}$$

С учетом (11) оценим разность $f(z_1, z_2) - P_{\Omega_+}(z_1, z_2)$. Рассмотрим последовательность четных тригонометрических полиномов вида (прямоугольные частичные суммы)

$$S_{mn}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{kl} \cos k\theta_1 \cos l\theta_2, \tag{12}$$

где $\lambda_{00} = 1$.

Потребуем, чтобы последовательность полиномов (12) удовлетворяла условиям:

1) существует такая постоянная c_1, что при всех m, n выполняется неравенство

$$\iint_{Q_+} |S_{mn}(\theta_1, \theta_2)| \, d\theta_1 d\theta_2 \le C_1; \tag{13}$$

2) при любом малом $\delta > 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\delta, \varepsilon)$, что при всех $M > N$, где выполняется неравенство

$$\iint_{Q_+ \setminus \Delta_\delta} |S_{mn}(\theta_1, \theta_2)| \, d\theta_1 d\theta_2 < \varepsilon. \tag{14}$$

Выполнение свойств (13), (14) есть, по существу, выполнение принципа локализации. В многомерном случае принцип локализации в классе $L_1(Q)$ не справедлив ни для прямоугольных, ни для круговых частичных сумм ([3], гл. 1). Чтобы сохранить локализацию, приходится сужать класс рассматриваемых функций $S(\theta_1, \theta_2)$, повышая их гладкость. Причем эти классы оказываются различными в зависимости от способа построения частичной суммы [3].

Как и в случае одного переменного ([4], гл. IX), теми же методами получим оценки скорости сходимости просуммированных по прямоугольникам и кругам двойных рядов Фабера внутри D^{++}.

Теорема 1. *Если остов σ биобласти D^{++} образуют спрямляемые жордановые кривые L_1 и L_2 и плотность распределения $\tau(\xi_1, \xi_2)$ в интеграле типа Коши* (3) *непрерывна на σ, а для последовательности прямоугольных ядер $\{S_{mn}(\theta_1, \theta_2)\}$ выполняются условия* (13), (14), *то последовательность многочленов* (10), *порожденная этим ядром, сходится к функции $f(z_1, z_2)$ равномерно внутри D^{++}.*

***Замечание* 1.** Если в теореме 1 возьмем в качестве тригонометрического ядра рисовские средние порядка η двойного ряда Фурье

$$S_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2) = \sum_{Z_+^2 \cap (k^2 + l^2 \le \mu^2)} \left(1 - \frac{k^2 + l^2}{\mu^2}\right)^\eta \lambda_{kl} e^{i(k\theta_1 + l\theta_2)},$$

тогда при выполнении условий (13), (14) теорема 1 остается справедливой. Причем все средние Риса порядка $\eta \ge 1/2$ ряда Фурье непрерывной функции $S(\theta_1, \theta_2)$ имеют свойства (13), (14). А в случае прямоугольных частичных сумм для выполнения условий (13), (14) нужны дополнительные ограничения на функцию $S(\theta_1, \theta_2)$.

Рассмотрим второй частный случай, когда $g(z_1, z_2) = \varphi_1'(z_1) \varphi_2'(z_2)$. В этом случае для $f(z_1, z_2)$, заданной интегралом типа Коши (3), будет справедлива следующая теорема (ср. [5], гл. XII).

Теорема 2. *Если последовательность четных ядер, построенная из прямоугольных частичных сумм двойного ряда Фурье, удовлетворяет условию* (13) *и более сильному, чем* (14), *условию*

$$\iint_Q \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} \, |S_{mn}(\theta_1, \theta_2)| \, d\theta_1 d\theta_2 \le \frac{c_2}{M}, \tag{15}$$

$M = \min(m, n)$, *а функция*

$$\tau_1(t_1, t_2) \equiv (\psi^* \tau)(t_1, t_2) \, \varphi_1'(t_1) \, \varphi_2'(t_2)$$

непрерывна на торе T, то последовательность многочленов $P_{mn}(z_1, z_2)$, по-

строенная с помощью таких ядер, сходится равномерно внутри D^{++} *к функции* $f(z_1, z_2)$.

Замечания. 2. В условиях теоремы (2) внутри D^{++} справедлива оценка

$$|f(z_1, z_2) - P_{mn}(\theta_1, \theta_2)| \leq \frac{c_3}{\rho_1 \rho_2} \omega(1/M, \tau_1),$$

$$(z_1, z_2) \in F_1 \times F_2,$$

где $\rho_k = \rho_k(F_k, L_k)$ — расстояние от замкнутого подмножества F_k из D_k^+ до L_k, $k = 1, 2$, а $\omega(\delta, \tau_1)$ — модуль непрерывности функции $\tau_1(t_1, t_2)$ на T.

3. Если мы в качестве четного ядра (9) рассмотрим средние Риса порядка η круговых частичных сумм и потребуем, чтобы для них выполнялось условие

$$\iint\limits_{Q_+} \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\ |S_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2)| d\theta_1 d\theta_2 \leq \frac{c_4}{\mu},$$

то получим аналог теоремы 2. Причем оценка разности $|f(z_1, z_2) - P_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2)|$, где многочлены $P_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2)$ порождены ядром $S_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2)$, имеет вид

$$|f(z_1, z_2) - P_\mu^\eta(\theta_1, \theta_2)| \leq \frac{c_5}{\rho_1 \rho_2} \omega(1/\mu, \tau_1),$$

$$(z_1, z_2) \in F_1 \times F_2.$$

1. *Цвиль М. М.* Оценки и асимптотические формулы для обобщенных полиномов Фабера двух переменных // Мат. заметки. – 1981. – **29**, вып. 2. – С. 201–209.
2. *Дзядык В. К.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**, № 6. – С. 797–824.
3. *Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К.* Кратные ряды и интегралы Фурье // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1989. – **42**. – С. 7–104.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.

Получено 18.02.93

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ В. П. ОРЛОВА „УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОСТИ", УМЖ, Т. 45, № 9 (1993)

В статье В. П. Орлова „Устойчивость нулевого решения одномерной математической модели термоупругости", 1993, т. 45, № 9 из-за оплошности автора нужно сделать следующие исправления:

1) на стр. 1240, 5-я строка сверху, вместо CL следует читать: $L_{q,*}(\equiv \{\varphi : \varphi(t, x)\exp(\gamma t) \in L_q(Q)\})$ с нормой $\|\varphi\|_* = \|\varphi \exp(\gamma t)\|_0$;

2) всюду вместо $\|u_{tt}\|_{CL}$ следует читать $\|u_{tt}\|_*$.

В. П. Орлов