УДК 517.5

А. А. Шумейко (Днепродзерж. техн. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ СНИЗУ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СО СВОБОДНЫМИ УЗЛАМИ

Let $\mathfrak{M}$ be a set of functions such that an integral of a function of degree $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$ is convergent. We obtain asymptotically exact lower bounds of the approximation of individual functions from the set $\mathfrak{M}$ by splines of the best approximation of degree r and defect k in the metric L_p.

Нехай $\mathfrak{M}$ — деяка множина функцій таких, що інтеграл від функції в степені $\beta = (r+1+$ $+1/p)^{-1}$ збігається. Отримано асимптотично точні оцінки знизу наближення індивідуальних функцій із множини $\mathfrak{M}$ сплайнами найкращого наближення степеня r дефекту k в метриці L_p.

Пусть $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность разбиений отрезка [0, 1]

$$\Delta_n = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = 1\}.$$

Через $h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$, $i = 0, \ldots, n-1$, обозначим шаг разбиения Δ_n.

Функцию $s(t)$, имеющую $r-k$ непрерывных производных на отрезке [0, 1] и совпадающую на каждом из интервалов $(t_{i,n}, t_{i+1,n})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, с алгебраическим многочленом степени не выше r, будем называть сплайн-функцией порядка r дефекта k по разбиению Δ_n или просто сплайном. При фиксированных r, k и Δ_n множество таких сплайнов будем обозначать через $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)$.

Как обычно, через L_p, $p \in (0, \infty)$, обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке [0, 1] функций $f(t)$ и положим

$$\|f\|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_p = \|f\|_{p[0,1]},$$

а через L_∞ — пространство всех существенно ограниченных на [0, 1] функций $f(t)$ с конечной нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{supvrai}\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$. Кроме того, через V^r обозначим множество функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на [0, 1] и полная вариация r-й производной ограничена, т. е. $V_0^1(f^{(r)}) < \infty$.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения:

$$\mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p = \mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_{p[0,1]} = \inf\{\|f-s\|_p \mid s \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n)\}$$

и

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p = \mathbb{E}_{r,k,n}(f)_{p[0,1]} = \inf_{\Delta_n} \mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p.$$

При фиксированных r, k и p последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C^{r-k}$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n^*))_p = \mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p(1 + o(1)).$$

Обозначим через $\mathbf{D}_{r+1}(x)$ r-й 1-периодический интеграл, в среднем равный нулю на отрезке [0, 1], от функции $\mathbf{D}_1(x) = x - 1/2$ и пусть $\mathbb{D}_{r,k}$, $r = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, r$, — множество всех функций $g(x)$ вида

$$g(x) = \mathbf{D}_r(x) - \lambda_0 - \sum_{i=1}^{[(k-1)/2]} \lambda_i \mathbf{D}_{r-2i}(x).$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа.

Далее, пусть $\mathbf{D}_{r,k,p} \in \mathbb{D}_{r,k}$ такова, что $\|\mathbf{D}_{r,k,p}\|_p = \min\{\|g\|_p \mid g \in \mathbb{D}_{r,k}\}$.

В работе [1] получен следующий результат (этот результат был повторен Д. Пенсе [2]).

Теорема A. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $p \in [1, \infty]$ *и* $\beta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{r+1}$ *при* $n \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p = \frac{\|\mathbf{D}_{r,k,p}\|_p}{n^{r+1}} \|f^{(r+1)}\|_\beta + o(n^{-r-1}). \qquad (1)$$

Указан также метод построения последовательности асимптотически оптимальных разбиений.

В данной работе покажем, что оценка снизу, совпадающая с правой частью (1), верна для функций из более общих, чем C^{r+1}, классов, в частности, для функций, у которых $(r+1)$-я „формальная" производная имеет особенности вида

$$g(x) + \sum_{\nu=0}^{m} \frac{c_\nu}{(t - a_\nu)^{\gamma_\nu}}, \qquad g \in C^{r+1}, \quad \gamma_\nu < r + 1 + p^{-1}.$$

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть функция $f(t)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$ в каждой точке $t \in (a, b)$. Для каждой такой функции положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}\left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0)\right)$$

и функцию $f^{((\nu))}(t)$ будем называть ν-й „формальной производной" $f(t)$ в точке t. Ясно, что если в точке t функция $f^{(\nu-1)}(t)$ дифференцируема, то $f^{((\nu))}(t) = f^{(\nu)}(t)$.

Теорема 1 . *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $p \in [1, \infty]$, $\beta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$, $\alpha \in (-1/\beta, 0)$ *и функция* $f(t)$ *такова, что существуют разбиение* $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ *отрезка* [0, 1] *и постоянные* A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, *такие, что на каждом интервале* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *функция* $f^{(r+1)}(t)$ *абсолютно непрерывна, а функция* $f^{(r+2)}(t)$ *почти всюду существует на* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *и почти всюду выполняется неравенство*

$$|f^{(r+2)}(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\alpha (a_\nu - t)^\alpha. \qquad (2)$$

Тогда для любой последовательности разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$ *при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p \geq \frac{\|\mathbf{D}_{r,k,p}\|_p}{n^{r+1}} \|f^{((r+1))}\|_\beta (1+o(1)). \tag{3}$$

Заметим, что при $\alpha \geq 0$ утверждение теоремы 1 следует из теоремы А.

Доказательство теоремы опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\Delta_{n,r}$ — разбиение отрезка [0, 1] точками $t_{i,j,n} = t_{i,n} + jH_i$ (здесь $H_i = h_{i+1/2,n}/r$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, \ldots, r$). Обозначим через $p_r(f, \Delta_n)$ функцию, которая на каждом из промежутков $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, совпадает с интерполяционным полиномом Лагранжа, т. е. на каждом из промежутков $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, функция $p_r(f, \Delta_n)$ — алгебраический полином степени не выше r, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$p_r(f, \Delta_n, t_{i,j,n}) = f(t_{i,j,n}), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, r.$$

Кроме того, пусть $P_r(f, \Delta_n) \in \mathbb{S}_{r,1}(\Delta_{n,r})$ — сплайн Субботина – Черных [3], т. е. сплайн минимального дефекта с узлами из $\Delta_{n,r}$, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$P_r^{(j)}(f, \Delta_n, t_{i,n}) = f^{(j)}(t_{i,n}), \qquad i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Положим для $t, u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и

$$\mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n) = -\frac{1}{r!}\Big((u-t)_+^r - P_r\big((\cdot - t)_+^r, \Delta_n, u\big)\Big). \tag{4}$$

Лемма 1. *Для всех* $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *и* $t, u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ *имеет место неравенство*

$$|\mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n)| \leq \frac{1}{r!}\min\{(u - t_{i,n})^r, (t_{i+1,n} - u)^r\}.$$

Доказательство. В работе [4], в частности, установлено, что для любых функций $f, z \in V^r$ имеет место равенство

$$\int_0^1 (f(u) - p_r(f, \Delta_n, u))\, d\big(z^{(r)}(u)\big) = (-1)^{r+1}\int_0^1 (z(u) - P_r(z, \Delta_n, u))\, d\big(f^{(r)}(u)\big). \tag{5}$$

Полагая в равенстве (5)

$$z(u) = (-1)^r \frac{(u-t)_+^r}{r!},$$

для любой функции $f \in V^r$ получаем

$$f(t) - p_r(f, \Delta_n, t) = \frac{1}{r!}\int_0^1 \Big((u-t)_+^r - P_r\big((\cdot - t)_+^r, \Delta_n, u\big)\Big)\, d\big(f^{(r)}(u)\big). \tag{6}$$

Таким образом, для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, справедливо равенство

$$f(t) - p_r(f, \Delta_n, t) = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n)\, d\big(f^{(r)}(u)\big). \tag{7}$$

Согласно определению для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ при любом $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*) \|_\vartheta \le \frac{C_2}{n}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть вначале $p \in [1, \infty)$. Положим $N = [n/2]$, $n = 1, 2, \ldots$, и выберем узлы разбиения Δ_n^* из условия

$$t_{i,n}^* = \left(\frac{i}{N^2}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{12}$$

и

$$t_{i+N,n}^* = \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

где $\eta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$.

На промежутке $(0, 1]$ функция $t^{\gamma\eta}$ положительная, монотонно убывающая, поэтому верно соотношение

$$\int\limits_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} t^{\gamma\eta}\, dt \ge \left(t_{i+1,n}^*\right)^{\gamma\eta} \int\limits_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} dt = \left(t_{i+1,n}^*\right)^{\gamma\eta} h_{i+1/2,n}^*, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

где $h_{i+1/2,n}^* = t_{i+1,n}^* - t_{i,n}^*$ — шаг разбиения Δ_n^*.

Используя определение узлов для $i > N$, отсюда имеем

$$h_{i+1/2,n}^* \le \frac{1}{\gamma\eta+1}\frac{1}{N}\left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta}{\gamma\eta+1}}. \tag{15}$$

Из равенства (7) и условия (9) для $t \in [\, t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*]$ находим

$$|f(t) - p_r(f, \Delta_n^*, t)| \le A\left(t_{i,n}^*\right)^\gamma \left| \int\limits_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \mathcal{K}_{r,i}\left(t, u, \Delta_n^*\right) du \right|. \tag{16}$$

Используя замену переменных, получаем

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*) \|_{p[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^p \le A^p \left(t_{i+1,n}^*\right)^{\gamma p} \mathbb{K}_{r,p}^p \left(h_{i+1/2,n}^*\right)^{p(r+1)+1}, \tag{17}$$

где

$$\mathbb{K}_{r,p} = \left\| \int\limits_0^1 \mathcal{K}_{r,1}(\cdot, u, \Delta_1) du \right\|_p.$$

Из (17) и (15) получаем

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*) \|_{p[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^p \le \frac{1}{N^{p/\eta}} \frac{A^p \mathbb{K}_{r,p}^p}{(\gamma\eta+1)^{p/\eta}} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}},$$
$$i = N, \ldots, n-1.$$

Вследствие выбора γ имеем $\gamma p / (\gamma\eta + 1) < 0$ и

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}} \le 2^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}}.$$

Поэтому

сплайн $p_r(f, \Delta_n)$ является интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполяции $t_{i,j,n}$, $j = 0, 1, \ldots, r$, т. е. имеет вид

$$p_r(f, \Delta_n, t) = \sum_{j=0}^{r} f\left(t_{i,j,n}\right) \ell_j(t),$$

где

$$\ell_j(t) = \prod_{\substack{\nu=0,\\ \nu\neq j}}^{r} \left(t - t_{i,\nu,n}\right) \left(\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq j}}^{r} \left(t_{i,j,n} - t_{i,\nu,n}\right) \right)^{-1}. \tag{8}$$

Для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ справедливо равенство

$$f(t) - p_r(f, \Delta_n, t) = \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} f'(u) \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n)\, du,$$

при этом функция $\partial^r \mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n)/\partial u^r$ (по переменной u) является кусочно-постоянной с чередующими знак разрывами, равными $\ell_j(t)$ в точках $t_{i,j,n}$, $j = 0, 1, \ldots, r$, и 1 в точке t [5]. Для $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ выполняется неравенство

$$|\ell_j(t)| \le 1.$$

Таким образом,

$$-1 \le \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n) \le 1.$$

Поэтому

$$\mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{t_{i,n}}^{u} \left(\xi - t_{i,n}\right)^{r-1} \frac{\partial^r}{\partial \xi^r} \mathcal{K}_{r,i}(t, \xi, \Delta_n)\, d\xi \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{t_{i,n}}^{u} \left(\xi - t_{i,n}\right)^{r-1} d\xi = \frac{1}{r!}\left(u - t_{i,n}\right)^r.$$

Аналогично получаем

$$\mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n) \le \frac{1}{r!}\left(t_{i+1,n} - u\right)^r.$$

что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C_{(0,1]}^{r+1}$, $p \in [1, \infty]$, $\vartheta = (r + p^{-1})^{-1}$, $\gamma \in (-1/\vartheta, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и существует такая постоянная* $A > 0$, *что*

$$|f^{(r+1)}(t)| \le A\, t^{\gamma}, \quad t \in [0, 1]. \tag{9}$$

Тогда найдутся постоянные $C_i = C_i(A, r, p, \gamma)$, $i = 1, 2$, *и последовательность разбиений* $\left\{\Delta_n^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\|f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_p \le \frac{C_1}{n^{r+1}} \tag{10}$$

и

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{p[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^p \leq \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}}, \qquad i = N, \ldots, n-1,$$

где

$$C_0 \leq \frac{A\,\mathbb{K}_{r,p}}{(\gamma\eta+1)^{1/\eta}}\, 2^{-\frac{\gamma}{\gamma\eta+1}}.$$

Таким образом,

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{p[t_{N,n}^*,\, 1]}^p = \sum_{i=N}^{n-1} \| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{p[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^p \leq$$

$$\leq \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}}(N-1) \leq \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{18}$$

Пусть $t \in [0,\, t_{1,n}^*]$, тогда с учетом леммы 1 из (7) имеем

$$|f(t) - p_r(f, \Delta_n^*, t)| = \left| \int_0^{t_{1,n}^*} \mathcal{K}_{r,i}(t, u, \Delta_n^*) f^{(r+1)}(u)\,du \right| \leq \frac{A}{r!} \int_0^{t_{1,n}^*} u^\gamma \min\{u^r, (t_{1,n}^* - u)^r\}\,du \leq$$

$$\leq \frac{A}{r!} \int_0^{t_{1,n}^*} u^{\gamma+r}\,du = \frac{A}{r!\,(\gamma+r+1)} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2(\gamma+r+1)}{\gamma\eta+1}}. \tag{19}$$

Отсюда сразу получаем

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{p[0,\, t_{1,n}^*]}^p \leq \frac{C_1^p}{N^{(r+1)p}} \leq \frac{C_1^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}, \tag{20}$$

где

$$C_1 \leq \frac{A}{r!\,(\gamma+r+1)}.$$

Кроме того, из (18) следует

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{p[t_{1,n}^*,\, t_{N,n}^*]}^p \leq \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{2p(r+1)}} < \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{21}$$

Сопоставляя оценки (18) – (21), получаем неравенство (10).

Докажем теперь соотношение (11).

Ясно, что для $t \in [\, t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]$, $i > N$, будет выполняться равенство

$$f^{(r)}(t) - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*, t) = \int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} f^{(r+1)}(u)\, \frac{\partial^r}{\partial t^r} \mathcal{K}_{r,i}\left(t, u, \Delta_n^*\right) du$$

и, следовательно, имеет место неравенство

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^\vartheta \leq A^\vartheta (t_{i,n}^*)^{\gamma\vartheta}\, \mathbb{K}_{r,\vartheta,r}^\vartheta (h_{i+1/2,n}^*)^{1+\vartheta},$$

где

$$\mathbb{K}_{r,\vartheta,r} = \left\| \int_0^1 \frac{\partial^r}{\partial(\cdot)^r} \mathcal{K}_{r,1}(\,\cdot\,, u, \Delta_1)\,du \right\|_\vartheta.$$

Используя в этом неравенстве соотношения (13) и (15), для $i > N$ сразу получаем

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^{\vartheta} \le \frac{(\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}\, A)^{\vartheta}}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}} \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta}{\gamma\eta+1}} \left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}} =$$

$$= \frac{(\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}\, A)^{\vartheta}}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}} \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta-\gamma\eta-\gamma\vartheta\eta}{\gamma\eta+1}} \left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Кроме того,

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}} \le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Следовательно, для всех $i > N$ будет выполняться неравенство

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^{\vartheta} \le \frac{C_2^{\vartheta}}{N^{1+\vartheta}},$$

где

$$C_2 \le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}} \frac{\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}\, A}{(\gamma\eta+1)^{1+1/\vartheta}}.$$

Таким образом, имеем

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[t_{N,n}^*,\, 1]}^{\vartheta} = \sum_{i=N}^{n-1} \| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]}^{\vartheta} \le$$

$$\le \frac{C_2^{\vartheta}}{N^{1+\vartheta}}(N-1) \le \frac{C_2^{\vartheta}\, 2^{\vartheta}}{n^{\vartheta}}.$$

Аналогично (21) и (23) показываем,что

$$\| f^{(r)} - p_r^{(r)}(f, \Delta_n^*)\|_{\vartheta[0,\, t_{N,n}^*]}^{\vartheta} \le \frac{C_3^{p}}{n^{\vartheta}}, \tag{22}$$

что и завершает доказательство леммы 2 при $p \in [1, \infty)$.

Пусть теперь $p = \infty$. Из соотношения (16) для $t \in [\, t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]$ имеем

$$|f(t) - p_r(f, \Delta_n^*, t)| \le A(t_{i,n}^*)^{\gamma}\, \mathbb{K}_{r,\infty}(h_{i+1/2,n}^*)^{r+1}.$$

Отсюда с учетом (13) и (15) получаем, что для $i = N, \ldots, n-1$

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^*)\|_{\infty[t_{i,n}^*,\, t_{i+1,n}^*]} \le \frac{C_4}{N^{r+1}},$$

где

$$C_4 \le \frac{A\, \mathbb{K}_{r,\infty}}{(\gamma\eta+1)^{r+1}}.$$

Кроме того, из (19), проводя построения, аналогичные (20)–(22), легко убедиться в справедливости неравенств (10), (11) при $p = \infty$, что и завершает доказательство леммы.

***Замечание* 1.** Нетрудно видеть, что если Δ_M — произвольное разбиение отрезка [0, 1] и Δ_n^* — разбиения, фигурирующие в лемме 2, то для разбиения $\Delta_n^* \cup \Delta_M$ будут выполняться неравенства (10), (11) (с теми же постоянными C_1 и C_2).

Лемма 3. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots,\ p \in [1, \infty],\ \vartheta = (r + p^{-1})^{-1},\ \gamma \in (-1/\vartheta, 0)$

и функция $f(t)$ такова, что существуют разбиение $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ отрезка [0, 1] *и постоянные A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция $f^{(r)}(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $f^{(r+1)}(t)$ почти всюду существует на $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ и*

$$|f^{(r+1)}(t)| \le A_\nu (t-a_{\nu-1})^\gamma (a_\nu - t)^\gamma, \quad t \in (a_{\nu-1}, a_\nu).$$

Тогда найдутся постоянные $\mathbf{C}_{i,n} = \mathbf{C}_{i,n}(\{A_\nu\}_{\nu=0}^m, \delta_m, r, p, \gamma)$, $i = 1, 2$, и последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$ такие, что для любого разбиения Δ_M отрезка [0, 1] *будут справедливы соотношения*

$$\| f - p_r(f, \Delta_n^* \cup \Delta_M) \|_p \le \frac{\mathbf{C}_1}{n^{r+1}}, \tag{23}$$

$$\| f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta_n^* \cup \Delta_M) \|_\vartheta \le \frac{\mathbf{C}_2}{n}. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $k = n/(2m)$. Применяя для каждого фиксированного ν, $\nu = 1, \ldots, m$, на множестве $(a_{\nu-1}, (a_{\nu-1} + a_\nu)/2]$ лемму 2, получаем, что найдется разбиение $\Delta^*_{k[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}$ такое, что будут выполняться неравенства

$$\| f - p_r(f, \Delta^*_{k[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}) \|_{p[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \le \frac{C_1}{k^{r+1}} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{r+1+\gamma+1/p}$$

и

$$\| f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta^*_{k[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}) \|_{\vartheta[a_{\nu-1},(a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \le \frac{C_2}{k} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Аналогично получаем, что существует разбиение $\Delta^*_{k[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}$ такое, что

$$\| f - p_r(f, \Delta^*_{k[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}) \|_{p[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \le \frac{C_1}{k^{r+1}} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{r+1+\gamma+1/p}$$

и

$$\| f^{((r))} - p_r^{((r))}(f, \Delta^*_{k[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}) \|_{\vartheta[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \le \frac{C_2}{k} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы 3 при $p \in [1, \infty)$. Аналогично доказывается лемма для $p = \infty$.

Замечание 2. Проследив доказательство, легко убедиться в том, что справедливо более общее утверждение. Если $\beta_\nu = (\nu + p^{-1})^{-1}$, $\nu = 0, \ldots, r$, и почти всюду существует функция $f^{((\nu))}(t)$, то найдутся такие константы κ_ν, $\kappa_\nu = \kappa(\nu, A, p, \beta)$, и последовательность разбиений $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^\infty$, что для любого разбиения Δ_M отрезка [0, 1] при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение

$$\| f^{((\nu))} - p_r^{((\nu))}(f, \Delta_n^* \cup \Delta_M) \|_{\beta_\nu} \le \frac{\kappa_\nu}{n^\nu}.$$

Доказательство теоремы. Пусть $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ — заданное разбиение отрезка [0, 1] и постоянные A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, такие, что на каждом интервале $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ функция $f^{(r+1)}(t)$ абсолютно непрерывна, а функция $f^{(r+2)}(t)$ почти всюду существует на $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ и почти всюду выполняется неравенство

$$|f^{(r+2)}(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\alpha (a_\nu - t)^\alpha.$$

Положим

$$N = [n^{(r+1)/(r+2)}] + 1. \tag{25}$$

В силу леммы 3 найдется последовательность разбиений $\{\sigma_N\}$ такая, что

$$\| f - p_r(f, \Delta_M^*) \|_p \le \frac{\mathbf{C}_1}{N^{r+2}}$$

и

$$\| f^{((r+1))} - p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^*) \|_\beta \le \frac{\mathbf{C}_2}{N},$$

где

$$\Delta_M^* = \left\{\theta_{i,n}\right\}_{i=0}^{M} = \delta_m \cup \sigma_N$$

и постоянные $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ не зависят от N. Тогда $M \le N + m$. Таким образом,

$$M = o(n). \tag{26}$$

Пусть еще

$$\Delta_K^* = \Delta_n \cup \Delta_M^*,$$

тогда $K \le n + N + m$ и, следовательно,

$$K = n + o(n). \tag{27}$$

Ясно, что для любой функции $f \in L_p$

$$\mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \ge \mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_K^*))_p. \tag{28}$$

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, M$ через ∇_{n_i} обозначим множество всех точек разбиения Δ_K^*, лежащих в промежутке $[\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]$. Количество точек этого разбиения обозначим через n_i. Ясно, что

$$\sum_{i=0}^{M-1} n_i \le K + M.$$

В силу неравенства треугольника

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f)_p \ge \mathbb{E}_{r,k,n}(p_{r+1}(f, \Delta_M^*))_p - \| f - p_{r+1}(f, \Delta_M^*) \|_p. \tag{29}$$

Кроме того, по построению, для всех $t \in [\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]$ функция $p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^*, t)$ постоянная. Обозначим это значение через $c_{i+1/2,n}$. Отсюда и из (28) следует, что для любого $p \in [1, \infty)$

$$\mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \ge \mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_K^*))_p \ge$$

$$\ge \left(\sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\nabla_{n_i}))_{p[\theta_{i,n}, \theta_{i+1,n}]} \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{i=0}^{M-1} (\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n})^{p/\beta} \, |c_{i+1/2,n}|^p \, \mathbb{E}((\cdot)^{r+1}, \mathbb{S}_{r,k}(\nabla_{n_i}))_{p[0,1]} \right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{i=0}^{M-1} (\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n})^{p/\beta} \, |c_{i+1/2,n}|^p \, \mathbb{E}_{r,k,n_i}((\cdot)^{r+1})_p \right)^{1/p}. \qquad (30)$$

Известно (см., например, [1]), что

$$\frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p}{(n+2r+2)^{r+1}} \leq \mathbb{E}_{r,k,n}\left(\frac{(\cdot)^{r+1}}{(r+1)!} \right)_p \leq \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p}{n^{r+1}}.$$

Отсюда и из (30) получаем

$$\mathbb{E}(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \geq$$

$$\geq \| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \left(\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n}\right)^{p/\beta} \frac{|c_{i+1/2,n}|^p}{(n_i + 2r+2)^{p(r+1)}} \right)^{1/p} =$$

$$= \| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i+2r+2)^{p(r+1)}} \left((\theta_{i+1,n} - \theta_{i,n}) \, |c_{i+1/2,n}|^\beta \right)^{p/\beta} \right)^{1/p} =$$

$$= \| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i+2r+2)^{p(r+1)}} \left(\int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} |c_{i+1/2,n}|^\beta \, dt \right)^{p/\beta} \right)^{1/p} =$$

$$= \| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{(n_i+2r+2)^{p(r+1)}} \left(\int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} \left| p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^*, t) \right|^\beta dt \right)^{p/\beta} \right)^{1/p}. \qquad (31)$$

Из неравенства Йенсена следует, что для любого $\gamma > 0$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i C_i^{-\gamma} \;\middle|\; A_i, C_i \geq 0; \; \sum_{i=1}^{n} C_i = \mathbf{C} \right\} = \mathbf{C}^{-\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{\gamma+1}} \right)^{1+\gamma}. \qquad (32)$$

Полагая в (31)

$$\gamma = p(r+1); \quad A_i = n_i + 2r + 2; \quad C_i = \int_{\theta_{i,n}}^{\theta_{i+1,n}} \left| p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^*, t) \right|^\beta dt;$$

из (31) и (32) сразу получаем

$$\mathbb{E}^p(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \geq \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p^p}{(K + M(2r+3))^{p(r+1)}} \left\| p_{r+1}^{((r+1))}(f, \Delta_M^*) \right\|_\beta^p.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что для достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\mathbb{E}^p(p_{r+1}(f, \Delta_M^*), \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n))_p \geq \frac{\| \mathbf{D}_{r,k,p} \|_p^p}{(K + M(2r+3))^{p(r+1)}} \left(\left\| f^{((r+1))} \right\|_\beta - \frac{\mathbf{C}_2}{N} \right)^p,$$

что вместе с (26) и (27) и завершает доказательство теоремы при $p < \infty$.

В случае $p=\infty$ доказательство аналогично, только вместо (32) нужно использовать соотношение

$$\min\max\left\{A_i C_i^{-\gamma}\;\middle|\; A_i, C_i \ge 0;\ \sum_{i=1}^{n} C_i = \mathbf{C}\right\} = \mathbf{C}^{-\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma}.$$

Приведем одно из приложений полученного результата.

Введем в рассмотрение наборы индексов $Q_r=\{0,1,\ldots,r\}$, $I=(I_0,I_1)$, $I_i\subset\subset Q_r$, $i=0,1$, и наборы коэффициентов $\mathcal{A}_n^{\mu}=\{\{a_{i,\nu}\}_{i=1}^{n-1}\}_{\nu=0}^{\mu-1}$, $1\le\mu\le r$, и $\mathcal{B}_i(I_i)=\{b_{\nu,i}\}_{\nu\in I_i}$, $i=0,1$.

Выражение вида

$$\mathcal{T}(f,\mathcal{A}_n^{\mu},\Delta_n)+\mathcal{T}_0(f,\mathcal{B}_0)+\mathcal{T}_1(f,\mathcal{B}_1), \tag{33}$$

где

$$\mathcal{T}(f,\mathcal{A}_n^{\mu},\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{i,\nu}\, f^{(\nu)}\big(x_{i,n}\big)$$

и

$$\mathcal{T}_0(f,\mathcal{B}_0) = \sum_{\nu\in I_0} b_{\nu,0}\, f^{(\nu)}(a), \qquad \mathcal{T}_1(f,\mathcal{B}_1) = \sum_{\nu\in I_1} b_{\nu,1}\, f^{(\nu)}(b),$$

называется квадратурной формулой или формулой приближенного вычисления интеграла от функции $f(x)$.

Для фиксированного веса $\rho(x)$ через $\mathbf{R}(f,\rho,\mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n)$ обозначим погрешность весовой квадратурной формулы (33), т. е.

$$\mathbf{R}(f,\rho,\mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n) =$$

$$= \left|\int_0^1 \rho(x)\,f(x)\,dx - \mathcal{T}(f,\mathcal{A}_n^{\mu},\Delta_n) - \mathcal{T}_0(f,\mathcal{B}_0) - \mathcal{T}_1(f,\mathcal{B}_1)\right|,$$

и пусть

$$\mathbf{R}(\mathfrak{M},\rho,\mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \mathbf{R}(f,\rho,\mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n)$$

— погрешность квадратурной формулы (33) на классе функций $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим величину

$$\mathbf{R}_{n,\mu}(\mathfrak{M},\rho,I) = \inf\left\{\mathbf{R}(\mathfrak{M},\rho,\mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n)\mid \mathcal{A}_n^{\mu},\mathcal{B}_0(I_0),\mathcal{B}_1(I_1),\Delta_n\right\}.$$

Если существует весовая квадратурная формула, на которой достигается нижняя грань, то такая квадратурная формула называется оптимальной квадратурной формулой для веса $\rho(x)$ на классе функций $\mathfrak{M}$ среди формул вида (33).

Наряду с множествами индексов I_i введем в рассмотрение еще множества индексов $J=(J_0,J_1)$, где $J_i=\{\nu\mid r-\nu\in I_i\ (\nu=0,1,\ldots,r)\}$, $i=0,1$.

Пусть еще

$$\mathbb{E}(f,\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n),I)_p =$$

$$= \inf\left\{\|f-s\|_p \mid s\in\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n);\ f^{(\nu)}(a)=s^{(\nu)}(a),\ \nu\in I_0;\ f^{(\nu)}(b)=s^{(\nu)}(b),\ \nu\in I_1\right\}$$

и

$$\mathbb{E}_{r,k,n}(f, I)_p = \inf_{\Delta_n} \mathbb{E}(f, \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_n), I)_p.$$

Пусть, как обычно, W_p^r — множество всех функций $x \in L_p^r$ таких, что $\|x^{(r)}\|_p \le 1$.

Следующее утверждение известно в теории квадратурных формул как метод сведения погрешности квадратурной формулы к задаче минимизации нормы моносплайна. При $\rho(x) \equiv 1$ это утверждение содержится, например, в [6, 7]. Для произвольного непрерывного веса доказательство проводится аналогично [8].

Теорема B. *При всех* $n, r = 1, 2 \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, r,\ p \in [1, \infty]$ *и любого веса* $\rho(x) \in L$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{R}_{n,k}(W_p^{r+1}, \rho, I) = \mathbb{E}_{r,k,n}(\rho_{r+1}, J)_q,$$

где $1/p + 1/q = 1$ *и* $\rho_r(x)$ — *любой* r-*й интеграл функции* $\rho(x)$, *к примеру,*

$$\rho_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)_+^{r-1} \rho(t)\, dt.$$

Из теоремы 1 и теоремы B следует утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n, r = 1, 2 \ldots,\ k = 1, 2, \ldots, r,\ p \in [1, \infty],\ 1/p + 1/q = 1$, $\beta = (r + 1 + q^{-1})^{-1}$, $\alpha > -2$ *и вес* $\rho(t)$ *таков, что существуют разбиение* $\delta_m = \{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ *отрезка* $[0, 1]$ *и постоянные* A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, *такие, что на каждом интервале* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *функция* $\rho(t)$ *абсолютно непрерывна, а функция* $\rho'(t)$ *почти всюду существует на* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *и почти всюду выполняется неравенство*

$$|\rho'(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\alpha (a_\nu - t)^\alpha.$$

Для любых $I_i \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $i = 0, 1$, *будет справедливо соотношение*

$$\mathbf{R}_{n,k}(W_p^{r+1}, \rho, I) \ge \|\mathbf{D}_{r+1,k,q}\|_q \frac{\|\rho\|_\beta}{n^{r+1}} (1 + o(1)).$$

1. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 6. – С. 18–22.
2. *Pence D. D.* Further asymptotic propeties of best approximation by splines // J. Approxim. Theory. – 1987. – **47**. – P. 1–17.
3. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1970. – **7**, № 1. – С. 31–42.
4. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 507–514.
5. *Lee D.* A simple approach to cardinal Lagrange and periodic Lagrange splines // J. Approxim. Theory. – 1986. – **47**. – P. 93–100.
6. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
7. *Моторный В. П.* Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 18–33.
8. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 4. – С. 107–159.

Получено 13.10.97,
после доработки – 21.04.98