УДК 517.5

В. В. Акименко (Восточноукраинский ун-т, Луганск)

О КВАДРАТУРНЫХ И КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРАТНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

We consider the problem on conditions for existence of multiple singular integrals of certain class at the interior and boundary points of a domain. We obtain the quadrature and cubature formulae for calculating multiple singular integrals and represent the corresponding estimates for formulae.

Розглянуто питання про умови існування кратних сингулярних інтегралів одного класу у внутрішніх та межових точках області. Одержано квадратурні та кубатурні формули для розрахування кратних сингулярних інтегралів та наведено відповідні оцінки для формул.

1. При решении некоторых задач гидротермодинамики с использованием функции источника возникает необходимость разработки достаточно эффективных экономичных квадратурных и кубатурных формул для вычисления сингулярных интегралов — частных производных первого порядка потенциала двойного слоя для прямоугольной области, частных производных второго порядка объемного потенциала для параллелепипеда. С целью получения квадратурных и кубатурных формул и равномерных оценок сходимости для них в данной работе применяется распространенный метод [1–3], основанный на кусочно-постоянной аппроксимации плотности потенциалов и аналитическом интегрировании сингулярной особенности. В отличие от методов, основанных на использовании кубатурных формул для регулярных интегралов [2, 3], и методов, использующих интерполяционные формулы для аппроксимации подынтегральной функции (например, при вычислении сингулярных интегралов типа Коши), указанный метод имеет ряд преимуществ: 1) позволяет получить равномерную оценку сходимости в случае сингулярности высокого порядка для особых точек, расположенных на границе области; 2) дает возможность аналитически проинтегрировать частные производные функции радиус-вектора и получить эффективные квадратурные и кубатурные формулы. Каноническое разбиение области в данной работе фиксировано, вопросы оптимизации кубатурных формул [1, 3] не рассматриваются.

Введем следующие обозначения: $\overline{D} = \{x_1, x_2, x_3 : 0 \le x_k \le L_k,\ (k = \overline{1,3})\}$; G — граница параллелепипеда: $D \cup G = \overline{D}$; G_1 — объединение ребер $\overline{D}$; G_2 — произвольная боковая грань $\overline{D}$; K_δ — шар радиуса δ с центром в точке $\overline{M}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \overline{D}$; Q_δ — круг радиуса δ с центром в $\overline{M} \in G$, лежащий в плоскости, содержащей одну из боковых граней $\overline{D}$; радиус-вектор

$$R = \left((\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2 + (\bar{x}_3 - x_3)^2\right)^{0,5};$$

$(R^{-1})_{x_p}$, $(R^{-1})_{x_p x_q}$ — частные производные R^{-1} по переменным x_p, x_q $(p, q = \overline{1,3})$.

Через $H(\mu)$ обозначим класс функций $f(M)$, удовлетворяющих условию Гельдера в $\overline{D}$: существуют $A > 0$ и $0 < \mu < 1$ такие, что для каждого M, $\overline{M} \in \overline{D}$ выполняется $|f(M) - f(\overline{M})| < AR^{\mu}$.

Лемма. *Если $f(M) \in H(\mu)$ и $f(M) = 0$ для $M \in G_1$, то для всех $\overline{M} \in \overline{D}$ существуют интегралы*

1. $$\lim_{\delta \to 0} \iint\limits_{G_2 \setminus Q_\delta} f(M)(R^{-1})_{x_p} d\sigma = \overline{\iint\limits_{G_2}} f(M)(R^{-1})_{x_p} d\sigma;$$

2. $$\lim_{\delta \to 0} \iiint\limits_{D \setminus K_\delta} f(M)(R^{-1})_{x_p x_q} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \overline{\iiint\limits_{D}} f(M)(R^{-1})_{x_p x_q} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$(p, q = \overline{1,3})$. *Черта сверху означает главное значение по Коши.*

Доказательство. Поскольку доказательство леммы традиционно, рассмотрим наиболее характерный случай для тройного интеграла для $p = q = 1$. Если $\overline{M}$ — внутренняя точка $\overline{D}$, тройной интеграл существует как объемный потенциал [4]. Пусть $\overline{M}$ — внутренняя точка грани G_2, для определенности грань $x_3 = 0$. Рассмотрим тройной интеграл по области $D_\delta = \overline{D} \cap (K_\Delta \setminus K_\delta)$, $\delta < \Delta << \min(L_1, L_2, L_3)/2$:

$$\left| \iiint\limits_{D_\delta} f(M)(R^{-1})_{x_1 x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| \le$$

$$\le \left| \iiint\limits_{D_\delta} (f(x_1, x_2, x_3) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0))(R^{-1})_{x_1 x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| +$$

$$+ |f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0)| \left| \iiint\limits_{D_\delta} (R^{-1})_{x_1 x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| \le$$

$$\le A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_\delta^\Delta \frac{|\sin^3(\psi)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\psi)\sin(\psi) - 2\cos^2(\varphi)\sin^3(\psi)|}{R^{1-\mu}} dR +$$

$$+ |f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0| \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_\delta^\Delta \frac{(\sin^3(\psi)\sin^2(\varphi) + \cos^2(\psi)\sin(\psi) - 2\cos^2(\varphi)\sin^3(\psi))}{R} dR \right| \le$$

$$\le C_1 + C_2 \delta^{\mu}.$$

Если $\overline{M} \in G_1$, то $f(\overline{M}) = 0$, интеграл рассматривается по области $D_\delta = \overline{D} \cap (K_\Delta \setminus K_\delta)$, $\delta < \Delta << \min(L_1, L_2, L_3)/2$:

$$\left| \iiint\limits_{D_\delta} f(M)(R^{-1})_{x_1 x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| \le$$

$$\le \left| \iiint\limits_{D_\delta} (f(M) - f(\overline{M}))(R^{-1})_{x_1 x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| \le$$

$$\le AC\int_{\delta}^{\Delta}\frac{dR}{R^{1-\mu}} \le C_1 + C_2\delta^{\mu}.$$

В пределе $\delta\to 0$, рассматривая интеграл по всей области $D\setminus K_\delta$, получаем требуемое утверждение. Для остальных значений p и q, сохраняя форму доказательства, получаем аналогичные оценки, из которых окончательно вытекает утверждение леммы.

2. С целью получения квадратурных формул для сингулярных интегралов, рассмотренных в лемме, введем каноническое разбиение области $\overline{D}$ [1, 2]:

$$\{\,\overline{x}_\nu = \nu h_1;\ \overline{y}_m = m h_2;\ \overline{z}_n = n h_3;\ \nu=\overline{0,N_1};\ m=\overline{0,N_2};\ n=\overline{0,N_3};$$

$$h_p = L_p/N_p,\ p=\overline{1,3};\ N_{11}=N_1-1,\ N_{12}=N_1+1,\ N_{21}=N_2-1,$$

$$N_{22}=N_2+1,\ N_{31}=N_3-1,\ N_{32}=N_3+1;\ x_0=0;\ x_{N_{12}}=L_1;$$

$$x_i=(2i-1)h_1/2;\ i=\overline{1,N_1};\ y_0=0;\ y_{N_{22}}=L_2;\ y_j=(2j-1)h_2/2;$$

$$j=\overline{1,N_2};\ z_0=0;\ z_{N_{32}}=L_3;\ z_k=(2k-1)h_3/2;\ k=\overline{1,N_3}\};$$

$$h=\max(h_1,h_2,h_3);\ h_0=\max(h_1,h_2);$$

$$I^* = \left\{(i,j,k):\ (\overline{x}_i,\overline{y}_j,\overline{z}_k)\in(\overline{D}\setminus G_1)\right\}.$$

Для двойных интегралов введем аналогичное разбиение боковых граней. В дальнейшем ограничимся лишь гранью, лежащей в плоскости $z=0$, обозначив ее G_{21}. Для G_{21} введем разбиение с помощью узлов (x_i, y_j), $(\overline{x}_\nu,\overline{y}_m)$. Обозначим $g(x,y)=f(x,y,0)$.

Теорема 1. *Пусть* $g(x,y)\in H(\mu)$ *в* G_{21} *и* $g(x,y)=0$ *для точек* $T(x,y)\in G_1$, *тогда для* $\overline{T}(\overline{x}_\nu,\overline{y}_m)\in G_{21}$ *справедливы оценки:*

$$\left|\ \overline{\iint_{G_{21}}} g(x,y)(R^{-1})_{x_p}\,dx\,dy-\sum_{i=1}^{N_{11}}\sum_{j=1}^{N_{21}} g(\overline{x}_i,\overline{y}_j)H_{ij}^{p}\right|\le O\big(h0^{\mu}|Ln(h0)|\big)$$

$$(p=\overline{1,2};\ x_1=x;\ x_2=y);$$

$$H_{ij}^1 = Ln\left(\frac{(R_{i+1j+1}+y_{j+1}-\overline{y}_m)(R_{ij}+y_j-\overline{y}_m)}{(R_{ij+1}+y_{j+1}-\overline{y}_m)(R_{i+1j}+y_j-\overline{y}_m)}\right);$$

$$H_{ij}^2 = Ln\left(\frac{(R_{i+1j+1}+x_{j+1}-\overline{x}_\nu)(R_{ij}+x_i-\overline{x}_\nu)}{(R_{ij+1}+x_i-\overline{x}_\nu)(R_{i+1j}+x_{i+1}-\overline{x}_\nu)}\right);$$

$$R_{ij} = \left((\overline{x}_\nu-x_i)^2+(\overline{y}_m-y_j)^2\right)^{0,5};\qquad R = \left((\overline{x}_\nu-x)^2+(\overline{y}_m-y)^2\right)^{0,5}.$$

Доказательство. Ограничимся лишь случаем $p=1$. Значение интеграла рассмотрим в $\overline{T}(\overline{x}_\nu,\overline{y}_m)$ — внутренней точке G_{21}. Окружим $\overline{T}(\overline{x}_\nu,\overline{y}_m)$ кругом Q_δ и, учитывая значения $g(x,y)$ на границе, рассмотрим соотношение

$$\left|\ \iint_{G_{21}\setminus Q_\delta} g(x,y)(R^{-1})_x\,dx\,dy-\sum_{i=1}^{N_{11}}\sum_{j=1}^{N_{21}} g(\overline{x}_i,\overline{y}_j)H_{ij}^{1}\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{i=0}^{N_1}\ \sum_{j=0\ (ij\ne\nu m)}^{N_2}\ \iint_{P_{ij}}\big(g(x,y)-g(\overline{x}_i,\overline{y}_j)\big)(R^{-1})_x\,dx\,dy\right|\ +$$

$$+\left|\iint\limits_{P_{\nu m}\setminus Q_\delta}(g(x,y)-g(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m))(R^{-1})_x\,dx\,dy\right|+$$

$$+\ |g(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m|\left|\iint\limits_{P_{\nu m}\setminus Q_\delta}(R^{-1})_x\,dx\,dy-H^1_{\nu m}\right| = B1+B2+B3.$$

Здесь P_{ij} — прямоугольник $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$;

$$B1 \le Ah_0^\mu\sum_{i=0}^{N_1}\sum_{j=0\,(ij\ne\nu m)}^{N_2}\iint\limits_{P_{ij}}\frac{|x-\bar{x}_\nu|}{R^3}dx\,dy \le$$

$$\le A1h_0^\mu\int\limits_{h0/2}^{\Delta}\frac{dR}{R} = O\big(h_0^\mu|Ln(h_0)|\big);$$

Δ — диагональ области G_{21};

$$B2 \le A\iint\limits_{P_{\nu m}\setminus Q_\delta}\frac{|x-\bar{x}_\nu|}{R^{3-\mu}}dx\,dy \le A1\int\limits_\delta^{h0/2}\frac{dR}{R^{1-\mu}} \le A2(h_0^\mu-\delta^\mu).$$

Используя теорему Грина, имеем

$$\iint\limits_{P_{\nu m}\setminus Q_\delta}(R^{-1})_x\,dx\,dy = \int\limits_{y_m}^{y_{m+1}}\frac{dy}{R}\Bigg|_{X=X_\nu}^{X=X_{\nu+1}} + \int\limits_0^{2\pi}\cos(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= Ln\left(\frac{(R_{\nu+1m+1}+y_{m+1}-\bar{y}_m)(R_{\nu m}+y_m-\bar{y}_m)}{(R_{\nu m+1}+y_{m+1}-\bar{y}_m)(R_{\nu+1m}+y_m-\bar{y}_m)}\right) = H^1_{\nu m}\,; \qquad B3=0.$$

Переходя к пределу $\delta\to 0$, получаем требуемую оценку.

3. Если точка $\overline{T}(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m)$ лежит на границе области G_{21}, то требуемая оценка доказывается аналогично п. 1 с той лишь разницей, что $B3=0$ в силу граничных условий $g(\overline{T}(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m))=0$. Значение $p=2$ рассматривается аналогично.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(M)\in H(\mu)$ и $f(M)=0$ для $M(x,y,z)\in G_1$, тогда для всех $\overline{M}(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m,\bar{z}_n)\in\overline{D}$ справедливы оценки:*

$$\left|\overline{\iiint\limits_D} f(x,y,z)(R^{-1})_{x_px_q}\,dx\,dy\,dz-\sum\sum_{(i,j,k)\in I^*}\sum f(\bar{x}_i,\bar{y}_j,\bar{z}_k)H^{pq}_{ijk}+\right.$$

$$\left.+\frac{\chi}{3}\delta_{pq}f(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m,\bar{z}_n)\right| \le O\big(h^\mu|Ln(h)|\big)$$

$$(p=\overline{1,3};\ x_1=x;\ x_2=y;\ x_3=z);$$

$$\chi = \begin{cases}4\pi, & \overline{M}(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m,\bar{z}_n)\in\overline{D}\setminus G;\\ 2\pi, & \overline{M}(\bar{x}_\nu,\bar{y}_m,\bar{z}_n)\in G\setminus G_1.\end{cases}$$

Если $\overline{M}\in G_1$, то $f(\overline{M})=0$ и можно положить $\chi=0$.

Для $p=q$ имеем

$$H_{ijk}^{11} = \Delta_{i+1j+1}\left(F_{i+1j+1k+1}^{(1)} - F_{i+1j+1k}^{(1)}\right) - \Delta_{i+1j}\left(F_{i+1jk+1}^{(1)} - F_{i+1jk}^{(1)}\right) -$$

$$- \Delta_{ij+1}\left(F_{ij+1k+1}^{(1)} - F_{ij+1k}^{(1)}\right) + \Delta_{ij}\left(F_{ijk+1}^{(1)} - F_{ijk}^{(1)}\right);$$

$$F_{ijk}^{(1)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\left|\overline{y}_m - y_j\right|(\overline{z}_n - z_k)}{\left|\overline{x}_\nu - x_i\right| R_{ijk}}\right);$$

$$H_{ijk}^{22} = \Delta_{i+1j+1}\left(F_{i+1j+1k+1}^{(2)} - F_{i+1j+1k}^{(2)}\right) - \Delta_{i+1j}\left(F_{i+1jk+1}^{(2)} - F_{i+1jk}^{(2)}\right) -$$

$$- \Delta_{ij+1}\left(F_{ij+1k+1}^{(2)} - F_{ij+1k}^{(2)}\right) + \Delta_{ij}\left(F_{ijk+1}^{(2)} - F_{ijk}^{(2)}\right);$$

$$F_{ijk}^{(2)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\left|\overline{x}_\nu - x_i\right|(\overline{z}_n - z_k)}{\left|\overline{y}_m - y_j\right| R_{ijk}}\right);$$

$$H_{ijk}^{33} = \Delta_{j+1k+1}\left(F_{i+1j+1k+1}^{(3)} - F_{i+1j+1k}^{(3)}\right) - \Delta_{j+1k}\left(F_{i+1j+1k}^{(3)} - F_{ij+1k}^{(3)}\right) -$$

$$- \Delta_{jk+1}\left(F_{i+1jk+1}^{(3)} - F_{ijk+1}^{(3)}\right) + \Delta_{jk}\left(F_{i+1jk}^{(3)} - F_{ijk}^{(3)}\right);$$

$$F_{ijk}^{(3)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\left|\overline{y}_m - y_j\right|(\overline{x}_\nu - x_i)}{\left|\overline{z}_n - z_k\right| R_{ijk}}\right);$$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1; & (\overline{y}_m - y_j)(\overline{x}_\nu - x_i) > 0; \\ \\ -1; & (\overline{y}_m - y_j)(\overline{x}_\nu - x_i) < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_{jk} = \begin{cases} 1; & (\overline{y}_m - y_j)(\overline{z}_n - z_k) > 0; \\ \\ -1; & (\overline{y}_m - y_j)(\overline{z}_n - z_k) < 0; \end{cases}$$

$$R_{ijk} = \left((\overline{x}_\nu - x_i)^2 + (\overline{y}_m - y_j)^2 + (\overline{z}_n - z_k)^2\right)^{0,5}.$$

Для $p \neq q$:

$$H_{ijk}^{21} = H_{ijk}^{12} = Ln\left(\frac{(\overline{z}_n - z_{k+1} + R_{ij+1k+1})(\overline{z}_n - z_k + R_{i+1j+1k})\times}{(\overline{z}_n - z_k + R_{ij+1k})(\overline{z}_n - z_{k+1} + R_{i+1j+1k+1})\times}\right.$$

$$\left.\frac{\times(\overline{z}_n - z_{k+1} + R_{i+1jk+1})(\overline{z}_n - z_k + R_{ijk})}{\times(\overline{z}_n - z_k + R_{i+1jk})(\overline{z}_n - z_{k+1} + R_{ijk+1})}\right);$$

$$H_{ijk}^{31} = H_{ijk}^{13} = Ln\left(\frac{(\overline{y}_m - y_{j+1} + R_{ij+1k+1})(\overline{y}_m - y_j + R_{i+1jk+1})\times}{(\overline{y}_m - y_j + R_{ijk+1})(\overline{y}_m - y_{j+1} + R_{i+1j+1k+1})\times}\right.$$

$$\left.\frac{\times(\overline{y}_m - y_{j+1} + R_{i+1j+1k})(\overline{y}_m - y_j + R_{ijk})}{\times(\overline{y}_m - y_j + R_{i+1jk})(\overline{y}_m - y_{j+1} + R_{ij+1k})}\right);$$

$$H_{ijk}^{32} = H_{ijk}^{23} = Ln\left(\frac{(\overline{x}_\nu - x_{i+1} + R_{i+1jk+1})(\overline{x}_\nu - x_i + R_{ij+1k+1})\times}{(\overline{x}_\nu - x_i + R_{ijk+1})(\overline{x}_\nu - x_{i+1} + R_{i+1j+1k+1})\times}\right.$$

$$\left.\frac{\times(\overline{x}_\nu - x_{i+1} + R_{i+1j+1k})(\overline{x}_\nu - x_i + R_{ijk})}{\times(\overline{x}_\nu - x_i + R_{ij+1k})(\overline{x}_\nu - x_{i+1} + R_{i+1jk})}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим случай $p = q = 1$.

а) Пусть $\overline{M}(\bar{x}_\nu, \bar{y}_m, \bar{z}_n)$ — внутренняя точка $\overline{D}$. Окружим $\overline{M}(\bar{x}_\nu, \bar{y}_m, \bar{z}_n)$ шаром K_δ радиуса $\delta << \min(h_1, h_2, h_3)/2$, с границей-сферой Σ_δ, для которой определим единичную нормаль $\vec{n}(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$. Учитывая граничные значения f, имеем

$$\left| \overline{\iiint_D} f(x, y, z)(R^{-1})_{x_p x_q} dx\,dy\,dz - \right.$$

$$\left. - \sum \sum_{(i,j,k) \in I^*} \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k) H_{ijk}^{11} + \frac{\chi}{3} f(\bar{x}_\nu, \bar{y}_m, \bar{z}_n) \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \sum_{k=0\,(ijk \ne \nu mn)}^{N_3} \iiint_{P_{ijk}} \big(f(x, y, z) - f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)\big)(R^{-1})_{xx} dx\,dy\,dz \right| +$$

$$+ \left| \iiint_{P_{\nu mn} \setminus K_\delta} (f(x, y, z) - f(\bar{x}_\nu, \bar{y}_n, \bar{z}_m))(R^{-1})_{xx} dx\,dy\,dz \right| +$$

$$+ |f(\bar{x}_\nu, \bar{y}_m, \bar{z}_n)| \left| \iiint_{P_{\nu mn} \setminus K_\delta} (R^{-1})_{xx} dx\,dy\,dz - H_{\nu mn}^{11} + \frac{4\pi}{3} \right| = B1 + B2 + B3. \qquad (1)$$

Здесь P_{ijk}— параллелепипед $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$;

$$B1 \le \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \sum_{\substack{k=0 \\ (ijk \ne \nu mn)}}^{N_3} \iiint_{P_{ijk}} \frac{\left|(\bar{z}_n - z)^2 + (\bar{y}_m - y)^2 - 2(\bar{x}_\nu - x)^2\right|}{R^5} dx\,dy\,dz \le$$

$$\le Ah^\mu \int_{\sqrt{3}h/2}^{\Delta} \frac{dR}{R} = O\big(h^\mu |Ln(h)|\big); \qquad (2)$$

Δ — диагональ области $\overline{D}$;

$$B2 \le A \iiint_{P_{\nu mn} \setminus K_\delta} \frac{\left|(\bar{z}_n - z)^2 + (\bar{y}_m - y)^2 - 2(\bar{x}_\nu - x)^2\right|}{R^{5-\mu}} dx\,dy\,dz \le$$

$$\le A_1 \int_\delta^{\sqrt{3}h/2} \frac{dR}{R^{1-\mu}} = A_2 h^\mu - A_1 \delta^\mu; \qquad (3)$$

$$\iiint_{P_{\nu mn} \setminus K_\delta} (R^{-1})_{xx} dx\,dy\,dz = \int_{y_m}^{y_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} (R^{-1})_x \Bigg|_{x = x_\nu}^{x = x_{\nu+1}} dy\,dz + \iint_{\Sigma_\delta} (R^{-1})_x \cos(\alpha)\, d\sigma =$$

$$= \int_{y_m}^{y_{m+1}} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{(\bar{x}_\nu - x)}{R^3} \Bigg|_{x = x_\nu}^{x = x_{\nu+1}} dy\,dz - \iint_{\Sigma_\delta} \frac{(\bar{x}_\nu - x)^2}{R^4} d\sigma =$$

$$= \Delta_{\nu+1m+1} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_{m+1}|(\bar{z}_n - z_{n+1})}{|\bar{x}_\nu - x_{\nu+1}| R_{\nu+1m+1n+1}} \right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_{m+1}|(\bar{z}_n - z_n)}{|\bar{x}_\nu - x_{\nu+1}| R_{\nu+1m+1n}} \right) \right) -$$

$$- \Delta_{\nu+1m}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_m|(\bar{z}_n - z_{n+1})}{|\bar{x}_\nu - x_{\nu+1}|R_{\nu+1mn+1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_m|(\bar{z}_n - z_n)}{|\bar{x}_\nu - x_{\nu+1}|R_{\nu+1mn}}\right)\right) -$$

$$- \Delta_{\nu m+1}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_{m+1}|(\bar{z}_n - z_{n+1})}{|\bar{x}_\nu - x_\nu|R_{\nu m+1n+1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_{m+1}|(\bar{z}_n - z_n)}{|\bar{x}_\nu - x_\nu|R_{\nu m+1n}}\right)\right) +$$

$$+ \Delta_{\nu m}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_m|(\bar{z}_n - z_{n+1})}{|\bar{x}_\nu - x_\nu|R_{\nu mn+1}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{|\bar{y}_m - y_m|(\bar{z}_n - z_n)}{|\bar{x}_\nu - x_\nu|R_{\nu mn}}\right)\right) -$$

$$- \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(\varphi)\sin^3(\psi)\,d\varphi\,d\psi = H^{11}_{\nu mn} - \frac{4\pi}{3}; \quad B3 = 0.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем требуемую оценку.

б) Пусть $\overline{M} \in G_1$, тогда $f(\overline{M}) = 0$ и в выражении (1) $B3 = 0$, а для $B1$ и $B2$ остаются верными оценки (2) и (3).

в) Пусть $\overline{M}$ — внутренняя точка области G_{21}. Окружим $\overline{M}$ шаром K_δ. Граница пересечения $\overline{D}$ с шаром K_δ — полусфера Σ_δ. Записывая для области $D \backslash K_\delta$ соотношение (1), получаем для выражений $B1$ и $B2$ оценки (2) и (3). Оценим $B3$:

$$\iiint\limits_{P_{\nu m0} \setminus K_\delta} (R^{-1})_{xx}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{y_m}^{y_{m+1}}\int_{z_0}^{z_1} (R^{-1})_x \Bigg|_{x=x_\nu}^{x=x_{\nu+1}} dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma_\delta} (R^{-1})_x \cos(\alpha)\,d\sigma =$$

$$= H^{11}_{\nu m0} - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi)\sin^3(\psi)\,d\varphi\,d\psi = H^{11}_{\nu m0} - \frac{2\pi}{3}; \quad B3 = 0.$$

Переходя к пределу $\delta \to 0$, получаем требуемую оценку. Аналогично находим оценки для остальных значений p и q. Теорема 2 доказана.

1. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 288 с.
2. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 254 с.
3. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 254 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

Получено 13.02.96