УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ПОПЕРЕЧНИКІВ ЗА КОЛМОГОРОВИМ КЛАСІВ НЕСКІНЧЕННО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Lower bounds of the Kolmogorov width are obtained for some classes of infinitely differentiable periodic functions in the metrics C and L. In a number of important cases, these estimates coincide with the quantities of best approximations of convolution classes by trigonometric polynomials calculated by B. Nagy and, hence, they are sharp.

Одержано оцінки знизу поперечників за Колмогоровим деяких класів нескінченно-диференційовних періодичних функцій у метриках C і L. В ряді важливих випадків ці оцінки збігаються з величинами найкращих наближень класів згорток тригонометричними поліномами, обчисленими Б. Надем і, отже, виявляються точними.

У даній роботі знаходяться оцінки знизу N-поперечників за Колмогоровим [1], тобто величин

$$d_N(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_N \subset X} \sup_{v \in \mathfrak{N}} \inf_{\xi \in L_N} \|v - \xi\|_X,$$

у випадку, коли під X розуміють або простір L 2π-періодичних сумовних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$, або простір C 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$, а під $\mathfrak{N}$ — класи функцій, що визначаються узагальненими (ψ, β)-похідними, введеними О. І. Степанцем (див., наприклад, [2]); L_N — всі можливі підпростори із X.

Означення [2, с. 25]. *Нехай $f \in L$ і*

$$s[f(x)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right]$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то цю функцію називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f_\beta^\psi(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють таку умову, позначають через L_β^ψ.

Позначимо

$$L_{\beta,p}^\psi \overset{\text{df}}{=} \left\{ f \in L_\beta^\psi : \left\| f_\beta^\psi \right\|_p \le 1 \right\}, \quad p = 1, \infty; \quad C_{\beta,p}^\psi = C \cap L_{\beta,p}^\psi.$$

Нас буде цікавити випадок, коли функція $\psi(k)$, що визначає класи $L_{\beta,p}^\psi$ та $C_{\beta,p}^\psi$, може бути зображена у вигляді

$$\psi(k) = \varphi(k) e^{-\alpha k^r}, \quad 0 < r < 1, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

де $\varphi(k)$ — незростаюча додатна функція натурального аргументу.

Як випливає із п. 1.8.2 монографії О. І. Степанця [2], в цьому випадку класи

$C^{\psi}_{\beta, p}$ складаються із нескінченно-диференційовних (але не обов'язково аналітичних) функцій. Крім того, як випливає із твердження 1.7.2 з [2], у розглядуваному нами випадку елементи класу $L^{\psi}_{\beta, p}$ при довільному $\beta \in \mathbb{R}$ можуть бути майже скрізь зображені наступним чином:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

де

$$\varphi \in L, \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0, \qquad \|\varphi\|_p \le 1$$

і $\Psi_\beta(t)$ — сумовна функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$s[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Порядкові оцінки поперечників $d_n\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C\right)$ та $d_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}, L\right)$ для $\psi(k)$ вигляду (1) були встановлені О. К. Кушпелем (див., наприклад, [3, теорема 5.2, с. 41]).

Відмітимо, що питання про знаходження точних оцінок знизу поперечників класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках C і L, коли $\psi(k)$ має вигляд (1), ще не досліджене (випадок $\psi(k) = \varphi(k)e^{-\alpha k}$, тобто при $r = 1$, розглядався у роботах [4–7]).

Основним результатом даної роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\psi(k)$ *має вигляд* (1) *і є тричі монотонною при* $\beta \ne 2p - 1$, $p \in \mathbb{Z}$, *тобто для неї*

$$\Delta\psi(k) \stackrel{\text{df}}{=} \psi(k) - \psi(k+1) \ge 0, \qquad \Delta^2\psi(k) \stackrel{\text{df}}{=} \Delta(\Delta\psi(k)) \ge 0,$$

$$\Delta^3 \stackrel{\text{df}}{=} \Delta(\Delta^2\psi(k)) \ge 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, *що задовольняють умову*

$$\frac{4n^{1-r}}{\alpha r} + \frac{2n}{(\alpha r n^r)^2} \le 1, \qquad \text{якщо } \beta \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

або умову

$$\left(\frac{4n^{1-r}}{\alpha r} + \frac{2n}{(\alpha r n^r)^2}\right)\left(1 - \frac{4}{3}\exp(-\alpha r n^{r-1})\right)^{-1} \le 1, \qquad \text{якщо } \beta \notin \mathbb{Z}, \tag{3}$$

справедливі нерівності

$$d_{2n}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C\right) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C, \tag{4}$$

$$d_{2n-1}\left(L^{\psi}_{\beta,1}, L\right) \ge \|\Psi_\beta(t) * \operatorname{sign}\sin nt\|_C. \tag{5}$$

Доведення. Як показано у лемі 1 роботи [4], для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ при умові, що $\psi(k)$ — монотонна при $\beta = 2p - 1$ і тричі монотонна при $\beta \ne 2p - 1$, $p \in \mathbb{Z}$, виконуються нерівності

$$d_{2n}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C\right) \geq e_{n,y_0},$$

$$d_{2n-1}\left(L^{\psi}_{\beta,1}, L\right) \geq e_{n,y_0},$$

де

$$e_{n,y_0} \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\sum_{k=1}^{2n} |\alpha(y_0, t_k)|\right)^{-1}, \quad t_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n},$$

$$\alpha(y_0, t_k) = \frac{1}{2n}\left(2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\pi(\sin jt_k \cdot \rho_j(y_0) - \cos jt_k \cdot \sigma_j(y_0))}{2n\left|\lambda_j(y_0)\right|^2 \sin j\pi/(2n)} + \frac{\pi(-1)^{k+1}}{2n|\lambda_n(y_0)|^2}\right),$$

$$\lambda_j(y_0) = \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{2n} \exp(ij\nu\pi/n)\Psi_{\beta,1}(y_0 - \nu\pi/n), \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{6}$$

$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * D_1)(t)$, $D_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin kt)/k$ — ядро Бернуллі,

$$\rho_j(y_0) = \mathrm{Re}(\lambda_j(y_0)) \text{ і } \sigma_j(y_0) = \mathrm{Im}(\lambda_j(y_0)),$$

а точка y_0 вибирається на $[0, \pi/n]$ з умови

$$|(\Psi_\beta(\cdot) * \mathrm{sign}\sin n(\cdot))(y_0)| = \|\Psi_\beta(\cdot) * \mathrm{sign}\sin n(\cdot)\|_C. \tag{7}$$

О. К. Кушпелем доведено (див., наприклад, [5, 6]), що у випадку, коли ядро $\Psi_\beta(\cdot)$ задовольняє умову $C_{y,2n}$ (див. означення 2 з [4]), то

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} |\alpha(y, t_k)\right)^{-1} = |(\Psi_\beta(\cdot) * \mathrm{sign}\sin n(\cdot))(y)|.$$

Таким чином, для доведення нерівностей (4) і (5) достатньо переконатись, що ядро $\Psi_\beta(\cdot)$ задовольняє умову $C_{y_0,2n}$ ($\Psi_\beta \in C_{y_0,2n}$), де y_0 вибране з умови (7). З леми 2 роботи [4] випливає, що включення $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y_0,2n}$ $\forall\ n \geq 2$ має місце, якщо виконується нерівність

$$2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n|\lambda_n(y_0)|}{j\left|\lambda_j(y_0)\right|} \leq 1. \tag{8}$$

Отже, подальша наша задача — довести, що при виконанні умов теореми 1 справджується нерівність (8).

На основі рівності (27) роботи [4] можемо записати

$$|\lambda_n(\cdot)| \leq 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi[(2m+1)n]}{(2m+1)n} \leq 2\left(\frac{\psi(n)}{n} + \frac{1}{2n}\int_n^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}dt\right) \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{\varphi(n)}{n}e^{-\alpha n^r} + \frac{\varphi(n)}{2n}\int_n^{\infty} \frac{e^{-\alpha t^r}}{t}dt\right) = \frac{2\varphi(n)}{n}\left(e^{-\alpha n^r} + \frac{1}{2r}\int_{n^r}^{\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u}du\right) =$$

$$= \frac{2\varphi(n)}{n}\left(e^{-\alpha n^r} + \frac{1}{2r}(-\mathrm{Ei}(-\alpha n^r))\right), \tag{9}$$

де $\mathrm{Ei}\,(\cdot)$ — інтегральна показникова функція. Оскільки (див. формулу 8.212.10 роботи [8])

$$\mathrm{Ei}\,(-x) = -e^{-x}\int_1^\infty \frac{1}{x+\ln t}\frac{dt}{t^2}, \qquad x>0,$$

то для $-\mathrm{Ei}\,(-\alpha n^r)$ можемо записати оцінку

$$-\mathrm{Ei}\,(-\alpha n^r) \le e^{-\alpha n^r}\frac{1}{\alpha n^r}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{e^{-\alpha n^r}}{\alpha n^r}. \tag{10}$$

Враховуючи співвідношення (10), з формули (9) одержуємо

$$|\lambda_n(\cdot)| \le \frac{2\varphi(n)e^{-\alpha n^r}}{n}\left(1+\frac{1}{2\alpha r n^r}\right). \tag{11}$$

Крім того,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{\psi(j)} \le \psi(n)\int_1^n \frac{dx}{\psi(x)} \le e^{-\alpha n^r}\int_1^n e^{\alpha x^r}dx =$$

$$= \frac{e^{-\alpha n^r}}{\alpha r}\left(e^{\alpha n^r}n^{1-r} - e^{\alpha} - \int_1^n e^{\alpha x^r}x^{1-2r}dx^r\right) \le \frac{n^{1-r}}{\alpha r}. \tag{12}$$

Нехай $\beta\in\mathbb{Z}$. Тоді згідно із співвідношеннями (11) і (12), а також нерівностями

$$|\lambda_j(y_0)| = |\lambda_j(0)| = \sum_{m=1}^\infty\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j}+\frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)+\frac{\psi(j)}{j} > \frac{\psi(j)}{j}$$

$$\text{для } \beta = 2p+1, \quad p\in\mathbb{Z}; \tag{13}$$

$$|\lambda_j(y_0)| = |\lambda_j(\pi/2n)| = \sum_{m=1}^\infty(-1)^m\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j}-\frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)+\frac{\psi(j)}{j} > \frac{\psi(j)}{j}$$

$$\text{для } \beta = 2p, \quad p\in\mathbb{Z}, \tag{14}$$

які були доведені в [4, с. 1119], можемо записати

$$2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n|\lambda_n(y_0)|}{j|\lambda_j(y_0)|} \le 4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{\psi(j)}\left(1+\frac{1}{2\alpha r n^r}\right) \le$$

$$\le 4\frac{n^{1-r}}{\alpha r}\left(1+\frac{1}{2\alpha r n^r}\right) = 4\left(\frac{n}{\alpha r n^r}+\frac{n^2}{2n(\alpha r n^r)^2}\right). \tag{15}$$

Отже, з урахуванням співвідношень (15) переконуємось у справедливості нерівності (8) при $\beta\in\mathbb{Z}$, $n\ge 2$, якщо справджується умова (2).

Нехай далі $\beta\notin\mathbb{Z}$. Виходячи із співвідношень (30) роботи [4], маємо

$$|\lambda_j(y_0)| \ge \min\left\{\min_t A_j(t), \min_t B_j(t)\right\}, \tag{16}$$

де

$$A_j(y_0) = \sum_{m=1}^\infty\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j}+\frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny_0 + \frac{\psi(j)}{j},$$

$$B_j(y_0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny_0 + \frac{\psi(j)}{j}.$$

Враховуючи потрійну монотонність послідовності $\{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$, зображення (1) і повторюючи міркування, що використовувались при доведенні леми 2 роботи [9], переконуємось, що функція $A_j(t)$ має точку екстремуму $t = \pi/2n$ і на проміжку $(0, \pi/2n)$ спадає, а на $(\pi/2n, \pi/n)$ зростає. Таким чином,

$$\min_t A_j(t) = A_j(\pi/2n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j}. \tag{17}$$

Функція ж $B_j(t)$ має екстремум в точці $t = 0$, спадає при $t \in (-\pi/2n, 0)$, зростає при $t \in (0, \pi/2n)$ і, отже,

$$\min_t B_j(t) = B_j(0) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi(2mn-j)}{2mn-j}\right) + \frac{\psi(j)}{j}. \tag{18}$$

Оскільки

$$B_j(0) - A_j(\pi/2n) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi((4k-2)n+j)}{(4k-2)n+j} - \frac{\psi(4kn-j)}{4kn-j}\right) > 0,$$

то

$$\min\left\{\min_t A_j(t), \min_t B_j(t)\right\} = A_j(\pi/2n). \tag{19}$$

Тому, враховуючи (16)–(19), одержуємо

$$|\lambda_j(y_0)| > A_j(\pi/2n) > \frac{\psi(j)}{j} - \frac{\psi(2n-j)}{2n-j} - \frac{\psi(2n+j)}{2n+j} + \frac{\psi(4n-j)}{4n-j} >$$

$$> \frac{\psi(j)}{j}\left(1 - \frac{4\psi(2n-j)}{3\psi(j)}\right) \geq \frac{\psi(j)}{j}\left(1 - \frac{4}{3}e^{-\alpha((n+1)^r-(n-1)^r}\right). \tag{20}$$

Оскільки

$$\alpha n^r\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^r - \left(1-\frac{1}{n}\right)^r\right) = 2\alpha n^r\left(\frac{r}{n} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!n^3} + \ldots\right) > \frac{2\alpha r}{n^{1-r}}, \tag{21}$$

то із (20) і (21) виводимо, що

$$|\lambda_j(y_0)| > \frac{\psi(j)}{j}\left(1 - \frac{4}{3}e^{-\alpha r/n^{1-r}}\right). \tag{22}$$

Таким чином, на основі співвідношень (11), (12), (22) можемо записати

$$2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n|\lambda_n(y_0)|}{j|\lambda_j(y_0)|} \leq 4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\psi(n)}{\psi(j)}\left(1+\frac{1}{2r\alpha n^r}\right)\left(1-\frac{4}{3}e^{-\alpha r/n^{1-r}}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq 4\frac{n^{1-r}}{\alpha r}\left(1+\frac{1}{2r\alpha n^r}\right)\left(1-\frac{4}{3}e^{-\alpha r/n^{1-r}}\right)^{-1} \quad \forall\, n \geq 2. \tag{23}$$

Отже, враховуючи (23), переконуємось, що нерівність (8) при $\beta \notin \mathbb{Z}$ і $n \geq 2$ виконується, якщо задовольнятиметься умова (3).

Таким чином, на основі леми 2 роботи [4] можемо записати, що $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y_0, 2n}$ $\forall\, n \geq 2$, якщо при $\beta \in \mathbb{Z}$ виконується умова (2), а при $\beta \notin \mathbb{Z}$ — умова (3). Включення $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y_0, 2n}$ при $n = 1$ очевидне. Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай $\psi(k)$ зображується у вигляді* (1) *і є тричі монотонною при $\beta = 2q - 1$, $q \in \mathbb{Z}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, що задовольняють співвідношення*

$$n \leq (\alpha r c(\beta))^{1/1-r}, \quad \text{де} \quad c(\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(\sqrt{1,25}+1)} = 0,2360\ldots, & \beta \in \mathbb{Z}, \\ 0,2320\ldots, & \beta \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{24}$$

мають місце нерівності (4) *і* (5).

Доведення. Константи $c(\beta)$ в умові (24) вибрані таким чином, щоб для всіх $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ виконання співвідношень (24) гарантувало справедливість співвідношень (2) при $\beta \in \mathbb{Z}$ або (3) при $\beta \notin \mathbb{Z}$. Далі залишається лише скористатись теоремою 1.

Теорема 2. *Нехай $\psi(k)$ зображується у вигляді* (1) *і є тричі монотонною при $\beta = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$, або опуклою при $\beta = 2q - 1$, $q \in \mathbb{Z}$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, що задовольняють умову* (2), *мають місце рівності*

$$d_{2n-1}\left(C^{\psi}_{2q,\infty}, C\right) = d_{2n}\left(C^{\psi}_{2q,\infty}, C\right) = d_{2n-1}\left(L^{\psi}_{2q,1}, L\right) =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\psi[(2k+1)n]}{2k+1}, \quad q \in \mathbb{Z}; \tag{25}$$

$$d_{2n-1}\left(C^{\psi}_{2q-1,\infty}, C\right) = d_{2n}\left(C^{\psi}_{2q-1,\infty}, C\right) = d_{2n-1}\left(L^{\psi}_{2q-1,1}, L\right) =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi[(2k+1)n]}{2k+1}, \quad q \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Доведення. Співвідношення (25) і (26) випливають безпосередньо з теореми 1, а також з результатів Б. Надя [10], з яких випливає справедливість наступних рівностей:

$$E_{n-1}\left(C^{\psi}_{2p,\infty}\right)_C = E_{n-1}\left(L^{\psi}_{2p,1}\right)_L = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\psi[(2k+1)n]}{2k+1}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

якщо $\psi(k)$ — тричі монотонна додатна послідовність, така, що $\psi(k) \to 0$ при $k \to \infty$;

$$E_{n-1}\left(C^{\psi}_{2p-1,\infty}\right)_C = E_{n-1}\left(L^{\psi}_{2p-1,1}\right)_L = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi[(2k+1)n]}{2k+1}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{28}$$

якщо $\psi(k)$ — додатна опукла послідовність, така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty$$

(у рівностях (27) і (28) $E_{n-1}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}\right)_C$ і $E_{n-1}\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_L$ — величини найкращих наближень класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ тригонометричними поліномами $T_{n-1}(\cdot)$ порядку не вищого $n-1$ у метриках C і L відповідно).

Наслідок 2. *Нехай* $\psi(k)$ *зображується у вигляді* (1) *і є тричі монотонною при* $\beta = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$, *або опуклою при* $\beta = 2q - 1$, $q \in \mathbb{Z}$. *Тоді для всіх* $n \in \in \mathbb{N}$, *що задовольняють умову*

$$n \leq \left(\frac{\alpha r}{2\left(\sqrt{1{,}25}+1\right)} \right)^{\frac{1}{1-r}}, \tag{29}$$

виконуються рівності (25) *і* (26).

1. *Kolmogorov A. N.* Uber die besste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, N 2. – S. 107–110.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 267 с.
3. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. – Киев, 1987. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1112–1121.
5. *Кушпель А. К.* SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 85.51).
6. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070–1076.
7. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 126–136.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1546–1553.
10. *Nagy B.* Uber gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. – Berichte Akad. d. Wiss Leipzig. – 1938. – **90**. – S. 103–134.

Одержано 24.07.96