УДК 519.6

**П. Ф. Жук, Л. Н. Бондаренко** (Херсон. пед. ин-т им. Н. К. Крупской)

# ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ $s$-ШАГОВОГО МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

We obtain sharp (best possible) estimates for the rate of convergence of $s$-step method of steepest descent for the finding of least (greatest) eigenvalue of a linear bounded self-adjoint operator in the Hilbert space.

Отримано точні (неполіпшувані) оцінки швидкості збіжності $s$-крокового методу найшвидшого спуску при відшуканні найменшого (найбільшого) власного значення лінійного обмеженого самоспряженого оператора в гільбертовому просторі.

Изучение скорости сходимости $s$-шагового метода наискорейшего спуска при решении линейных операторных уравнений было начато Канторовичем Л. В. [1], для задач на собственные значения — Бирманом М. Ш. [2]. В последующих работах (см., например, [3–6]) результаты, полученные в [1, 2], обобщались и уточнялись. В частности; были установлены точные (неулучшаемые) оценки скорости сходимости $s$-шагового метода наискорейшего спуска при решении линейных операторных уравнений. Настоящая работа посвящена получению аналогичных оценок при отыскании наименьшего собственного значения линейного оператора.

Пусть $A: H \to H$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве $H$ со скалярным произведением $(u, v)$. Относительно спектра оператора $A$ предполагаем, что $\operatorname{sp}(A) \subseteq \{m\} \bigcup [m^*, M]$, $m < m^* < M$. В этом случае $m$ является собственным значением оператора $A$ и ему соответствует некоторое собственное подпространство $H^{(1)}$.

Для отыскания собственного значения $m$ и соответствующего ему собственного вектора применим $s$-шаговый метод наискорейшего спуска, последовательные приближения которого строятся по правилу

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i^{(k)} A^i u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $u_0$ — произвольный единичный вектор, а коэффициенты $\alpha_i^{(k)}$ таковы, что $\| u_{k+1} \| = 1$ и отношение Релея

$$\mu(u_{k+1}) = \frac{(Au_{k+1}, u_{k+1})}{\| u_{k+1} \|^2}$$

минимально. Полагаем $\mu_k = \mu(u_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ .

***Замечание* 1.** Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$Ku = \lambda L u, \tag{2}$$

где $K, L$ — линейные самосопряженные операторы, $L$ положительно определен, а $A = L^{-1}K$ — ограниченный в энергетическом пространстве $H_L$ оператор. Задача (2) сводится к задаче на собственные значения

$$Au = \lambda u, \tag{3}$$

в пространстве $H_L$. Поскольку $A$ — самосопряженный в $H_L$ оператор, то для решения задачи (3), а тем самым и для решения задачи (2), может быть использован $s$-шаговый метод наискорейшего спуска.

***Замечание* 2.** Если $\{(\mu_k, u_k),\ k = 0, 1, \ldots\}$ — последовательность пар, порожденная $s$-шаговым методом наискорейшего спуска, примененным к оператору $A$, то $\{\chi_1 + \chi_2(\mu_k, u_k),\ k = 0, 1, \dots\}$ есть последовательность пар $s$-шагового метода наискорейшего спуска, примененного к оператору $\chi_1 E + \chi_2 A$ ($E$ — единичный оператор, $\chi_1, \chi_2$ — произвольные вещественные числа).

Из замечания 2 следует, что $s$-шаговый метод наискорейшего спуска достаточно исследовать лишь для одного оператора вида $\chi_1 E + \chi_2 A$ $(\chi_2 \neq 0)$. В качестве такого оператора (обозначим его через $A$) выберем произвольный оператор указанного вида с числами $\chi_1 + \chi_2 M = 1$, $\chi_1 + \chi_2 m > 0$, $\chi_2 > 0$, т. е. в дальнейшем будем предполагать, что $A$ есть самосопряженный оператор с границами $m > 0$, $M = 1$.

Будем говорить, что $s$-шаговый метод наискорейшего спуска с начальным приближением $u_0$ стабилизируется, если для некоторого $k \in \{0, 1, \dots\}$ имеет место равенство $w_k = A u_k - \mu_k u_k = 0$, т. е. собственная пара оператора $A$ определяется за конечное число итераций.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ подмножество единичной сферы $\Omega$ пространства $H$, состоящее из элементов $v$, для которых система векторов $v\ Av, \dots, A^{s+1}v$ линейно зависима. Положим $\mathfrak{U} = \Omega \setminus \mathfrak{T}$.

В работе [7] доказано следующее условие стабилизации $s$-шагового метода наискорейшего спуска: если $u_0 \in \mathfrak{T}$, то $w_1 = 0$, иначе $u_k \in \mathfrak{U}$, $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом, $s$-шаговый метод наискорейшего спуска стабилизируется тогда и только тогда, когда $u_0 \in \mathfrak{T}$.

Поскольку случай $u_0 \in \mathfrak{T}$ тривиален, то далее будем предполагать, что $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Из определения $s$-шагового метода наискорейшего спуска видно, что $m \leq \leq \mu_{k+1} \leq \mu_k, k = 0, 1, \dots$, значит, $\{\mu_k,\ k = 0, 1, \dots\}$ — ограниченная последовательность. Пусть $u_0^{(1)}$ — ортогональная проекция вектора $u_0$ на $H^{(1)}$. Если $u_0^{(1)} = 0$, то, очевидно, $\lim\limits_{k \to 0} \mu_k \geq m^*$, следовательно, для отыскания $m$ необходимо, чтобы $u^{(1)} \neq 0$. При условии $u_0^{(1)} \neq 0$ имеем $\mu_k \to m$, $k \to \infty$, поэтому в дальнейшем будем предполагать (не ограничивая общности рассуждений), что $\mu_0 < m^*$.

Обозначим через $E_t$ спектральную функцию оператора $A$, а через $\sigma_k = \sigma_k(t) = (E_t u_k, u_k)$ — функцию распределения вектора $u_k$. По определению функция $\sigma_k$ определена и не убывает на всей числовой оси, непрерывна слева на интервале $]-\infty; 1[$ и $\sigma_k(t) = 0$ при $t \leq m$, $\sigma_k(t) = 1$ при $t \geq 1$. Кроме того, $\sigma_k(t) = \sigma_k(m + 0)$ при $m < t \leq m^*$.

Обозначим через $\Sigma_k$ множество точек роста функции $\sigma_k$, принадлежащих отрезку $[m^*, 1]$. Из [7] следует, что $\Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k$; $k = 0, 1, \dots$, и любое множество $\Sigma_k$ содержит не менее $s + 1$ точек (поскольку $u_0 \in \mathfrak{U}$). Положим

$$\lambda_* = \min \Sigma_0, \qquad \lambda^* = \max \Sigma_0.$$

Из [7] следует, что $\lambda_* = \min \Sigma_k$, $\lambda^* = \max \Sigma_k$, $k = 0, 1, \dots$ . Обозначим через $\pi_s(t, u_0)$ многочлен от $t$ степени $s$, наименее уклоняющийся от 0 на множестве $\Sigma_0$ и нормированный условием $\pi_s(m, u_0) = 1$. Положим

$$\rho_s(u_0) = \max_{t \in \Sigma_0} |\pi_s(t, u_0)|.$$

Разложим вектор $u_0$ на ортогональные составляющие

$$u_0 = u_0^{(1)} + u_0^{(2)}, \qquad u_0^{(1)} \in H^{(1)}, \qquad u_0^{(2)} \perp H^{(1)} \tag{4}$$

и построим вектор $\tilde{u}_0$ по правилу

$$\tilde{u}_0 = u_0^{(1)} + \rho_s(u_0) u_0^{(2)}. \tag{5}$$

**Теорема 1.** *Справедливы оценки*

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} \le \left[ \frac{\rho_s(u_0)}{\|\tilde{u}_0\|} \right]^2 \le \rho_s^2(u_0) \frac{\lambda_* - \mu_1}{\lambda_* - \mu_0}. \tag{6}$$

***Доказательство.*** Положим $\tilde{\mu}_0 = \mu(\tilde{u}_0)$, $\tilde{u} = \pi_s(A, u_0) u_0$, $\tilde{\mu} = \mu(\tilde{u})$. Из разложения (4) и формулы (5) следует, что

$$\tilde{u} = u_0^{(1)} + \tilde{u}^{(2)}, \qquad \tilde{u}^{(2)} = \pi(A) u_0^{(2)}, \qquad \tilde{u}^{(2)} \perp H^{(1)},$$

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{mh + \rho^2 (A u_0^{(2)}, u_0^{(2)})}{h + \rho^2 \| u_0^{(2)} \|^2}, \tag{7}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{mh + (A\tilde{u}^{(2)}, \tilde{u}^{(2)})}{h + \| \tilde{u}^{(2)} \|^2},$$

где, для краткости, $\pi(t) = \pi_s(t, u_0)$, $h = \| u_0^{(1)} \|^2$, $\rho = \rho_s(u_0)$. В интегральной форме

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{mh + \rho^2 \int_{\lambda_*}^{\lambda^*} t \, d\sigma_0(t)}{h + \rho^2 \int_{\lambda_*}^{\lambda^*} d\sigma_0(t)},$$

$$\tilde{\mu} = \frac{mh + \int_{\lambda_*}^{\lambda^*} t \pi^2(t) \, d\sigma_0(t)}{h + \int_{\lambda_*}^{\lambda^*} \pi^2(t) d\sigma_0(t)}, \tag{8}$$

где интегралы понимаются в смысле Римана – Стилтьеса.

Покажем, что

$$\mu_1 \le \tilde{\mu} \le \tilde{\mu}_0 \le \mu_0. \tag{9}$$

Действительно, используя формулы (4), (7), имеем

$$\mu_0 - \tilde{\mu}_0 = (1 - \rho^2) h \left( (A u_0^{(2)}, u_0^{(2)}) - m \| u_0^{(2)} \| \right) \| \tilde{u}_0 \|^{-2} \ge 0,$$

так как

$$0 \le \rho < 1, \qquad \frac{(A u_0^{(2)}, u_0^{(2)})}{\| u_0^{(2)} \|^2} \ge \lambda_* > m.$$

Для доказательства неравенства $\tilde{\mu} \le \tilde{\mu}_0$ аппроксимируем интегралы в формулах (8) их интегральными суммами. Точнее, покажем, что для любого достаточно мелкого разбиения отрезка $[\lambda_*, \lambda^*]$ имеет место неравенство

$$\frac{mh + \sum_{i=1}^n t_i^{(n)} \pi^2(t_i^{(n)}) h_i^{(n)}}{h + \sum_{i=1}^n \pi^2(t_i^{(n)}) h_i^{(n)}} \le \frac{mh + \rho^2 \sum_{i=1}^n t_i^{(n)} h_i^{(n)}}{h + \rho^2 \sum_{i=1}^n h_i^{(n)}}, \tag{10}$$

где $h_i^{(n)}$ — мера Стилтьеса $i$-го полуинтервала разбиения, $t_i^{(n)}$ — промежуточная точка $i$-го полуинтервала разбиения (если $h_i^{(n)} \ne 0$, то $t_i^{(n)} \in \Sigma_0$). Определим функцию

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{mh + \sum_{i=1}^n t_i^{(n)} \zeta_i}{h + \sum_{i=1}^n \zeta_i}.$$

Предположим, что рассматриваемое разбиение отрезка $[\lambda_*, \lambda^*]$ настолько мелкое, что $f\left(\rho^2 h_1^{(1)}, \ldots, \rho^2 h_n^{(n)}\right) < \lambda_*$ (это возможно, так как $\tilde{\mu}_0 \le \mu_0 < \lambda_*$). Элементарный анализ тогда показывает, что функция $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ монотонно возрастает на множестве

$$\left[0, \rho^2 h_1^{(n)}\right] \times \ldots \times \left[0, \rho^2 h_n^{(n)}\right]$$

по каждой из своих переменных. Поэтому

$$f\left(\pi^2(t_1^{(n)}) h_1^{(n)}, \ldots, \pi^2(t_n^{(n)}) h_n^{(n)}\right) \le f\left(\rho^2 h_1^{(n)}, \ldots, \rho^2 h_n^{(n)}\right),$$

что и требовалось доказать (напомним, что если $h_i^{(n)} \ne 0$, то $t_i^{(n)} \in \Sigma_0$, следовательно, $\pi^2(t_i^{(n)}) \le \rho^2$).

Переходя к пределу в неравенстве (10), получаем $\tilde{\mu} \le \tilde{\mu}_0$.

Для доказательства оценки $\mu_1 \le \tilde{\mu}$ достаточно заметить, что $\tilde{u} \in \operatorname{span}(u_0, Au_0, \ldots, A^s u_0)$, следовательно, $\mu(u_1) \le \mu(\tilde{u})$.

Таким образом, неравенства (9) доказаны. Далее из оценки $\mu_1 \le \tilde{\mu}_0$ и представления $\tilde{\mu}_0$ в (7) вытекает, что

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} \le \frac{\tilde{\mu}_0 - m}{\mu_0 - m} \le \left[\frac{\rho}{\|\tilde{u}_0\|}\right]^2.$$

Левая часть неравенства (6) доказана. Для доказательства правой части этого неравенства положим $\lambda = \mu\left(u_0^{(2)}\right)$. Так как $\|u_0\| = 1$, то из (7) следует, что

$$h + \left\|u_0^{(2)}\right\|^2 = 1, \qquad mh + \lambda\left\|u_0^{(2)}\right\|^2 = \mu_0,$$
$$\frac{mh + \rho^2\lambda\left\|u_0^{(2)}\right\|^2}{h + \rho^2\left\|u_0^{(2)}\right\|^2} = \tilde{\mu}_0. \tag{11}$$

Разрешая уравнения (11) относительно $h$, $\left\|u_0^{(2)}\right\|^2$ и $\rho^2$, находим, что

$$\|\tilde{u}_0\|^2 \doteq h + \rho^2\left\|u_0^{(2)}\right\|^2 = \frac{\lambda - \mu_0}{\lambda - \tilde{\mu}_0}.$$

Так как $\lambda \ge \lambda_*$, то из оценок (9) следует, что

$$\|\tilde{u}_0\|^2 \ge \frac{\lambda_* - \mu_0}{\lambda_* - \mu_1},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что

$$\frac{\mu_1 - m}{\lambda_* - \mu_1} \le \rho_s^2(u_0)\frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0}. \tag{12}$$

Поскольку

$$\min \Sigma_k = \lambda_*, \qquad \max \Sigma_k = \lambda^*, \qquad \Sigma_{k+1} \subseteq \Sigma_k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

то при последовательном применении оценки (12) к векторам $u_0, u_1, \ldots$ получим

$$\frac{\mu_k - m}{\lambda_* - \mu_k} \le \rho_s^2(u_0)\frac{\mu_{k-1} - m}{\lambda_* - \mu_{k-1}},$$

$$\frac{\mu_k - m}{\lambda_* - \mu_k} \le \rho_s^{2k}(u_0)\frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. $s$-шаговый метод наискорейшего спуска сходится по крайней мере со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\rho_s^2(u_0)$.

Отметим, что

$$\| u_k - e \| \le 2\left[\frac{\mu_k - m}{\lambda_* - m}\right]^{0,5}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$e = \frac{u_0^{(1)}}{\left\| u_0^{(1)} \right\|} \in H^{(1)}.$$

Оценка (12) точна (неулучшаема) в следующем смысле: если $\rho < \sup\limits_{u_0} \rho_s(u_0)$, то

$$\frac{\mu_1 - m}{\lambda_* - \mu_1} > \rho^2 \frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0}$$

для некоторого начального приближения $u_0$ с $\mu_0 < m^*$. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть начальные приближения в окрестности собственного подпространства $H^{(1)}$.

Если на начальное приближение наложить дополнительное ограничение, предположив, например, что значение $\mu_1$ фиксировано, то оценка (12) может быть, вообще говоря, улучшена. Докажем, что при этом оценка

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} \le \left[\frac{\rho_s(u_0)}{\| \tilde{u}_0 \|}\right]^2,$$

вытекающая из неравенства (6), остается неулучшаемой.

**Теорема 2.** *Пусть $H$ — конечномерное пространство. Если* $\dim H \ge s + 2$, *то для любого числа $\mu$ $(m < \mu < m^*)$ существует начальное приближение $u_0$ (зависящее от $\mu$) такое, что $\mu_1 = \mu$ и*

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} = \left[\frac{\rho_s(u_0)}{\| \tilde{u}_0 \|}\right]^2.$$

***Доказательство.*** Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 = m,\ \lambda_2 = m^*,\ \lambda_n = 1)$ — собственные значения оператора $A$. Обозначим через $\pi_s(t)$ многочлен степени $s$, наименее уклоняющийся от 0 на множестве $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ и нормированный условием $\pi_s(\lambda_1) = 1$, а через

$$\rho_s = \max_{i = 2, \ldots, n} |\pi_s(\lambda_i)|$$

величину уклонения. Из определения многочлена $\pi_s(t)$ следует существование чисел $2 < i_1 < \ldots < i_{s-1} < n$ таких, что

$$(-1)^j \pi_s(\lambda_{i_j}) = \pi_s(\lambda_2) = (-1)^s \pi_s(\lambda_n) = \rho_s \qquad j = 1, \ldots, s-1. \tag{13}$$

Положим $q(t) = (t - \mu)\pi_s(t)$, $J = \{1, 2, i_1, \ldots, i_{s-1}, n\}$. Так как $m < \mu < m^*$, то последовательность $q(\lambda_1), q(\lambda_2), q(\lambda_{i_1}), \ldots, q(\lambda_n)$ имеет в точности $s + 1$ перемен знака. Поэтому система линейных относительно $\zeta_j^2$, $j \in J$ уравнений

$$\sum_{j \in J} \zeta_j^2 = 1, \qquad \sum_{j \in J} \lambda_j^i q(\lambda_j)\zeta_j^2 = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, s,$$

имеет вещественное решение $\zeta_j^* \neq 0$, $j \in J$. Действительно, в противном случае существует, в силу теоремы Штимке [8], многочлен $l(t) = \tau_0 + \tau_1 t + \ldots + \tau_s t^s \not\equiv \not\equiv 0$ с вещественными коэффициентами такой, что $q(\lambda_j)l(\lambda_j) \geq 0$, $j \in J$. Но тогда многочлен $l(t)$ имеет $s+1$ вещественных корней (с учетом кратности), следовательно, $l(t) \equiv 0$ — противоречие.

Пусть $e_j$ — произвольный единичный собственный вектор оператора $A$, соответствующий собственному значению $\lambda_j$. Покажем, что вектор

$$u_0 = \sum_{j \in J} \zeta_j^* e_j$$

удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим многочлен

$$q_1(t) = (t - \mu_1) p_0(t), \quad p_0(t) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i^{(0)} t^i.$$

Так как $(Au_1 - \mu_1 u_1, A^i u_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, s$, то

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^i q_1(\lambda_j)(\zeta_j^*)^2 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

поэтому для произвольного числа $\alpha$

$$\sum_{j \in J} \lambda_j^i \left[ q_1(\lambda_j) - \alpha q(\lambda_j) \right] (\zeta_j^*)^2 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, s. \tag{14}$$

Пусть $\alpha^*$ таково, что степень многочлена $q_1(t) - \alpha^* q(t)$ не более $s$. Из (14) следует, что $q_1(t) = \alpha^* q(t)$, поэтому

$$\mu_1 = \mu, \quad p_0(t) = \alpha^* \pi_s(t), \quad u_1 = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} \quad (\tilde{u} = \pi_s(A) u_0).$$

Так как

$$\Sigma_0 = \left\{ \lambda_2, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{s-1}}, \lambda_n \right\},$$

то $\pi_s(t, u_0) = \pi_s(t)$ и, в силу (13), $\rho_s(u_0) = \rho_s$. Таким образом, получаем

$$\mu_1 - m = \mu(\tilde{u}) - m = \left[ \frac{\rho_s(u_0)}{\|\tilde{u}\|} \right]^2 (\mu_0 - m).$$

Осталось заметить, что $\|\tilde{u}\| = \|\pi_s(A) u_0\| = \|\tilde{u}_0\|$. Теорема доказана.


1. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 6. – С. 89–184.
2. *Бирман М. Ш.* О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска // Зап. Ленингр. горн. ин-та. – 1952. – **27**, № 1. – С. 209–215.
3. *Ковригин А. Б.* Оценка быстроты сходимости $k$-шагового градиентного метода // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1970. – Вып. 13. – С. 34–36.
4. *Приказчиков В. Г.* Строгие оценки скорости сходимости итерационного метода вычисления собственных значений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – **15**, № 5. – С. 1330–1333.
5. *Князев А. В.* Вычисление собственных значений и векторов в сеточных задачах: алгоритмы и оценки погрешности. – М.: Отдел вычисл. матем. АН СССР, 1986. – 188 с.
6. *Заболоцкая А. Ф.* О методе скорейшего спуска // Сообщения по прикладной математике – М.: ВЦ АН СССР, 1988. – С. 26.
7. *Жук П. Ф.* Асимптотическое поведение $s$-шагового метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1993. – **184**, № 12. – С. 87–122.
8. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища шк., 1978.


Получено 19.02.96