УДК 519.21

**О. В. Школьний, М. В. Працьовитий** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ОДИН КЛАС СИНГУЛЯРНИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТИПУ ДЖЕССЕНА–ВІНТНЕРА*

The structure of the distribution of complex-valued random variable $\xi = \Sigma a_k \xi_k$ is investigated, where $\xi_k$ are independent complex-valued random variables with discrete distribution and $a_k$ are components of absolutely convergent series. The criterion of discreteness and the sufficient conditions for singularity of the distribution of $\xi$ are established, the fractal properties of spectrum are studied.

Досліджено структуру розподілу комплекснозначної випадкової величини $\xi = \Sigma a_k \xi_k$, де $\xi_k$ — незалежні дискретно розподілені комплекснозначні випадкові величини; $a_k$ — члени абсолютно збіжного ряду. Знайдено ознаку дискретності та достатні умови сингулярності розподілу $\xi$, вивчено фрактальні властивості спектра.

**1.** Розглянемо комплекснозначну випадкову величину (к. в. в.)

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k, \tag{1}$$

де $\xi_k$ — незалежні, дискретно розподілені к. в. в., що набувають значень з обмеженої не більш ніж зчисленої множини $E = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots\}$ комплексних чисел, тобто $\varepsilon_i \in C$, $|\varepsilon_i| < a < \infty$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{ik}, \ldots$ відповідно; $\sum p_{ik} = 1$; $p_{ik} \geq 0$; $a_k \in C$; $k = 1, 2, \ldots$; $a_k$ — члени абсолютно збіжного ряду.

Випадкові величини (в. в) вигляду (1) при дійснозначних $\varepsilon_k$ називають в. в. типу Джессена – Вінтнера. Вони мають чистий розподіл (теорема Джессен – Вінтнера). Структура та фрактальні властивості розподілів таких в. в. вивчалися в роботах різних авторів, зокрема [1–5]. В даній роботі розглянемо аналогічні задачі. Для комплекснозначного випадку, наскільки нам відомо, теорем загального характеру (типу теорем Джессена – Вінтнера, П. Леві [1]) доведено не було.

**Означення (типів розподілу к. в. в.).** *Розподіл к. в. в.* $\xi$ *називають*

а) *дискретним, якщо відповідна в. в.* $\xi$ *ймовірнісна міра* $P(\cdot)$ *зосереджена на не більш ніж зчисленній множині*;

б) *неперервним, якщо* $P(\cdot)$ *визначена і рівна нулю на кожній одноточковій множині, зокрема, він сингулярний, якщо існує борелівська множина* $A$ *така, що* $\lambda(A) = 0$ *і* $P(\xi \in A) = 1$, *де* $\lambda(\cdot)$ — *міра Лебега в* $R^2$; *розподіл абсолютно неперервний, якщо для кожної борелівської множини* $A$ *такої, що* $\lambda(A) = 0$, $P(\varepsilon \in A) = 0$.

Згадаємо також, що за теоремою Лебега кожна зчисленно-адитивна ймовірнісна міра $\mu$ єдиним чином зображається у вигляді

$$\mu(\cdot) = \alpha_1 \mu_d(\cdot) + \alpha_2 \mu_{ac}(\cdot) + \alpha_3 \mu_s(\cdot), \tag{2}$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\mu_d$ — дискретна, $\mu_{ac}$ — абсолютно неперервна, $\mu_s$ — сингулярна відносно міри Лебега ймовірнісні міри.

Вираз (2) називають структурою міри $\mu$ (відповідно структурою розподілу в. в., якій відповідає $\mu$). Якщо одне з $\alpha_i$ дорівнює 1, то міру (розподіл) називають чистим (чисто дискретним, чисто абсолютно неперервним, чисто сингулярним).

* Ця робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду „Відродження", гранти № GSU 051401 та № APU 061086.

Трійка $(E, \{a_k\}, \|p_{ik}\|)$ однозначно визначає в. в. і структуру її розподілу. Займемось вивченням останньої за умови фіксованості множини $E$ і послідовності $\{a_k\}$, маючи за мету знайти умови, яким повинна задовольняти матриця ймовірностей $\|p_{ik}\|$, щоб розподіл $\xi$ був чисто дискретним, неперервним, зокрема, чисто сингулярним.

**2.** Число $z$ є можливим значенням в. в. $\xi$, якщо знайдеться послідовність $\{z_k\}$, $z_k \in E$, така, що

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_{i_k}. \tag{3}$$

Зауважимо, що в залежності від $E$ і $\{a_k\}$ можлива ситуація, коли різні послідовності $\{z_k\}$ і $\{z_{k'}\}$ приводять до одного і того ж значення, тобто $\sum a_k z_k = \sum a_k z_{k'}$. Обмежимось одним тривіальним прикладом для дійснозначного випадку

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \ldots = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

Більше того, можна навести приклади $E$ і $\{a_k\}$, при яких одне і те ж $z$ має континуальну множину „різних" зображень. Наприклад, в рівності

$$z = \left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}\right) + \left(\frac{z_3}{2^2} + \frac{z_4}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{z_{2k-1}}{2^k} + \frac{z_{2k}}{2^k}\right) + \ldots$$

заміна значення $(0, 1+i)$ пари $(z_{2k-1}, z_{2k})$ на $(1+i, 0)$ не змінює значення $z$.

**Означення** (***N*-властивості**). *Властивість пари* $(E, \{a_k\})$: *для будь-якого комплексного числа* $z$ *існує не більш ніж зчисленна множина послідовностей* $\{z_k\}$, $z_k \in E$, *таких, що* $z = \sum a_k z_k$, *називатимемо N-властивістю.*

**Лема 1.** *Якщо має місце нерівність*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0, \tag{4}$$

*то розподіл в. в.* $\xi$ *є чисто дискретним.*

***Доведення.*** Нехай $\max_i \{p_{ik}\} - p_{i^*(k)k}$. Тоді точка $z_0 = \sum a_k \varepsilon_{i^*(k)}$ є атомом розподілу $\xi$, оскільки, враховуючи зауваження про можливість різних зображень чисел у вигляді (3), маємо

$$P\{\xi = z_0\} \geq P\left\{\xi_1 = \varepsilon_{i^*(1)}, \xi_2 = \varepsilon_{i^*(2)}, \ldots\right\} = \prod_{k=1}^{\infty} P\left\{\xi_k = \varepsilon_{i^*(k)}\right\} = M > 0.$$

Розглянемо множини

$$A_m = \left\{z\colon z = \sum_{k=1}^{m} a_k \varepsilon_{i_k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \varepsilon_{i^*(k)},\ p_{i_k k} > 0\right\}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

елементи яких в зображенні у вигляді (3) лише першими $m$ доданками відрізняються від числа $z_0$.

Якщо $z \in A$, то

$$P\{\xi = z\} \geq \prod_{k=1}^{m} p_{i_k k} \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{i^*(k)k} > 0,$$

оскільки з означення $A_m$

$$\prod_{k=1}^{m} p_{i_k k} > 0,$$

а з умови леми

$$M(m) = \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{i^*(k)k} > 0.$$

Таким чином, $z$ — атом розподілу $\xi$, а отже, кожна точка множини $A_m$ є атомом.

Покладемо

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Оскільки $A_m \subset A_{m+1}$, то

$$P\{\xi \in A\} = \lim_{m \to \infty} P\{\xi \in A_m\} = \lim_{m \to \infty} \left( \sum_{z \in A_m} P\{\xi = z\} \right).$$

Зауважимо, що кожна множина $A_m$, а отже, і $A$, не більш ніж зчисленна.

При $m = 1$

$$P\{\xi \in A_1\} \geq \sum_{i_1=0}^{|E|} p_{i_1 1} M(1),$$

$|E|$ — потужність $E$ (в сумі містяться доданки з $p_{i_1 1} = 0$, якщо такі в матриці $\| p_{ik} \|$ є, оскільки вони не міняють її значення):

$$\sum_{i_1=0}^{|E|} p_{i_1 1} M(1) = M(1) \sum_{i_1=0}^{|E|} p_{i_1 1} = M(1).$$

Отже, $P\{\xi \in A_1\} \geq M(1)$. Аналогічно при $m = 2$

$$P\{\xi \in A_2\} \geq \sum_{i_1=0}^{|E|} \left( p_{i_1 1} \left( \sum_{i_2=0}^{|E|} p_{i_2 2} M(2) \right) \right) = M(2) \left( \sum_{i_1=0}^{|E|} p_{i_1 1} \right) \left( \sum_{i_2=0}^{|E|} p_{i_2 2} \right) = M(2).$$

В загальному випадку $P\{\xi \in A_m\} \geq M(m)$. Тому

$$P\{\xi \in A\} \geq \lim_{m \to \infty} M(m) = M \left( \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{m} p_{i^*(k)k} \right)^{-1} = MM^{-1} = 1.$$

З іншого боку, $P\{\xi \in A\} \leq 1$. Отже, $P\{\xi \in A\} = 1$. Таким чином, розподіл $\xi$ є чисто дискретним, оскільки ймовірнісна міра $P(\cdot)$ зосереджена на не більш ніж зчисленній множині.

Лема 1 доведена.

**Теорема 1.** *Якщо пара* $(E, \{a_k\})$ *має* $N$*-властивість, то в. в.* $\xi$ *матиме:*

1. *чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли* $M > 0$;
2. *неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли* $M = 0$.

***Доведення.*** *Необхідність твердження* 1. Якщо $\xi$ має чисто дискретний розподіл і $z$ — один з його атомів, то з $N$-властивості

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(n)} a_k, \qquad z_k^{(n)} \in E, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

і існує $z_k^{(n^*)} = z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для якого $P\{\xi_1 = z_1, \xi_2 = z_2 \ldots\} > 0$. Тому, враховуючи зчисленну адитивність ймовірнісної міри, незалежність подій $\{\xi_k = = z_k\}$, отримаємо

$$0 < P\{\xi_1 = z_1, \xi_2 = z_2 \ldots\} = \prod_{k=1}^{\infty} \{\xi_k = z_k\} \leq M,$$

тобто має місце нерівність (4).

Достатність твердження 1 є наслідком леми 1.

Твердження 2 є наслідком твердження 1.

Теорема 1 доведена.

**3.** Множиною можливих значень в. в. $\xi$ вигляду (1) є множина

$$E_\xi = \left\{ z\colon z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_{i_k}, i_k = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots \right\},$$

тобто множина всіх комплексних чисел, які можуть бути зображені у вигляді (3).

Нагадаємо, що спектром в. в. $\xi$ є множина $S_\xi$ (далі — $S$) тих комплексних чисел $z$, для яких $P\{\xi \in 0_\varepsilon(z)\} > 0$ для всіх $\varepsilon > 0$.

Не порушуючи загальності подальших міркувань, вважатимемо далі, що матриця $\| p_{ij} \|$ не містить нульових елементів. Тоді справедлива наступна лема.

**Лема 2.** *Якщо для в. в.* $\xi$ *вигляду* (1) $E$ *— скінченна і має* $n$ *елементів, то* $E_\xi = S_\xi$.

***Доведення.*** 1) $S$ є підмножина $E_\xi$. Відомо, що $S$ є підмножиною $[E_\xi]$, тому нам досить показати замкненість множини $E_\xi$. Для цього розглянемо зображення числа $x_0 \in [0; 1]$ у вигляді $n$-адичного дробу:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x_0) n^{-k} = 0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots,$$

де $\alpha_k(x_0) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Якщо число $x_0$ — $n$-адично раціональне, то воно матиме два зображення наведеного вигляду, а саме: $x_0^+ = 0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k_0}(0)$ і $x_0^- = 0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \{\alpha_{k_0} - - 1\}(n-1)$.

Розглянемо множину $[0; 1]^*$, в якій $n$-адично раціональній точці $x_0 \in [0; 1]$ будуть відповідати дві „різних" точки $x_0^+$ та $x_0^-$. Задамо відображення $\varphi\colon [0; 1] \to C$ таким чином:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_j, \qquad \text{де} \quad j = \alpha_k(x).$$

Зрозуміло, що область значень $\varphi - E(\varphi)$ збігається з $E_\xi$. Неважко помітити, що $\varphi$ — неперервна в кожній $n$-адично ірраціональній точці. Справді, позначивши через $N$ мінімальний номер місця, для якого в $n$-адичному розкладі $x$ та $x_0$ $\alpha_N(x) \neq \alpha_N(x_0)$, отримаємо, що $N \to \infty$ при $x \to x_0$. Тому для $j = \alpha_k(x)$ та $j_0 = \alpha_k(x_0)$

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| = \left|\sum_{k=N}^{\infty} a_k(\varepsilon_j - \varepsilon_{j_0})\right| \le 2\max_i\{|\varepsilon_i|\}\sum_{k=N}^{\infty}|a_k| \to 0 \qquad (x\to x_0).$$

Аналогічно можна показати, що $\varphi$ — неперервна справа в кожній $x_0^+$ і зліва — в кожній $x_0^-$. Використовуючи доведену властивість, покажемо замкненість $E_\xi$.

Нехай $y_0$ — гранична точка $E_\xi$. Тоді існує послідовність $y_k$ з цієї множини, збіжна до $y_0$, а отже, існує послідовність $x_k$ точок з множини $[0; 1]^*$ така, що $y_k = \varphi(x_k)$. Послідовність $x_k$ обмежена, тому з неї можна виділити збіжну (в тому числі і монотонно) підпослідовність $x_{k(n)} \to x_0 \in [0; 1]^*$.

Якщо $x_0$ — $n$-адично раціональна в $[0; 1]$, то розглядатимемо $x_0^+$ у випадку спадання $x_{k(n)}$ і $x_0^-$ у випадку зростання $x_{k(n)}$. Внаслідок неперервності $\varphi$, $\varphi(x_{k(n)}) = y_{k(n)} \to y_0 = \varphi(x_0)$ $(n \to \infty)$, а тому $y_0 \in E(\varphi) = E_\xi$. Цим замкненість $E_\xi$ доведено, а отже, $S$ є підмножиною $E_\xi$.

2) $E_\xi$ є підмножиною $S$. Розглянемо множину

$$\square_{\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}} = \left\{z\colon z = \sum_{k=1}^{j} a_k\bar\varepsilon_{i_k} + \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k\varepsilon_{i_k}\right\},$$

де $\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}$ — фіксований набір значень $\varepsilon_i$, а $i_k = \overline{0, n-1}$ для натуральних $k \ge j+1$. Таку множину назвемо циліндричною множиною з основою $\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}$. Легко показати, що

$$P\left\{\xi \in \square_{\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}}\right\} = \prod_{k=1}^{j} \bar p_{i_k k}.$$

Очевидно також, що дану циліндричну множину можна покрити кругом радіуса

$$r = \max_i\{|\varepsilon_i|\}\sum_{k=j+1}^{\infty}|a_k|,$$

причому $r \to 0$ $(j \to \infty)$.

Зафіксуємо довільно точку $z \in S$ та дійсне $\delta > 0$. Тоді

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varepsilon_{i_k}$$

та, з вище наведених міркувань, існує $j(\delta)$, для якого $\square_{\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}}$ є підмножиною $\delta$-околу точки $z$. Отже,

$$P\{\xi \in 0_\varepsilon(z)\} \ge P\left\{\xi \in \square_{\bar\varepsilon_{i_1}, \bar\varepsilon_{i_2}, \ldots, \bar\varepsilon_{i_j}}\right\} = \prod_{k=1}^{j(\delta)} \bar p_{i_k k} > 0.$$

Таким чином, $z \in S$ і, внаслідок довільності вибору $z$, $E_\xi$ є підмножиною $S$. Лема 2 доведена.

***Зауваження.*** Міра Лебега в множині комплексних чисел $C$ вводиться природним чином через взаємнооднозначну відповідність $C$ і $R^2$.

**Теорема 2.** *Для того щоб к. в. в. $\xi$ мала чисто сингулярний розподіл, досить, щоб одночасно виконувались умови:*

1) $M = 0$;

2) *$E$ — скінченна і пара $(E, \{a_k\})$ має $N$-властивість;*

3) $\lim\limits_{m\to\infty} n^m \left(\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |a_k|\right)^2 = 0,$

*де $n$ — кількість елементів множини $E$.*

***Доведення.*** Розглянемо в. в.

$$\xi^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k\xi_k \quad \text{і} \quad r\xi^{(m)} = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\xi_k.$$

Позначимо спектри розподілів в. в. $\xi^{(m)}$, $r\xi^{(m)}$ і $\xi$ через $S_m$, $S_{rm}$ і $S$ відповідно. Як відомо з [1], $S$ є векторною сумою $S_m$ і $S_{rm}$, тобто

$$S = S_m \oplus S_{rm} \tag{5}$$

для кожного $m \in N$.

Множина $S_m$ містить не більш ніж $n^m$ точок, а множину $S_{rm}$ можна покрити кругом радіуса

$$R_m = c\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|, \quad \text{де} \quad c = \max_{\varepsilon_i \in E}\{|\varepsilon_i|\}.$$

Справді,

$$|r\xi^{(m)}| = \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\xi_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k||\xi_k| = c\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|.$$

Внаслідок (5)

$$S \subset \left(\bigcup_{x\in S_m} O_{R_m}(x)\right) = B_m,$$

причому $P\{\xi \in B_m\} = 1$, де $O_{R_m}(x)$ — $R_m$-окіл точки $x$. Покладемо

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Тоді $P\{\xi \in B\} = 1$, а тому $S \subset B$. За монотонністю міри Лебега $0 \le \lambda(S) \le \le \lambda(B)$. Враховуючи неперервність міри Лебега зверху [1, с. 23], матимемо

$$\lambda(B) = \lim_{m\to\infty} \lambda(B_m) \le \lim_{m\to\infty} n^m \pi (R_m)^2 = \pi c^2 \lim_{m\to\infty} n^m \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k|\right)^2 = 0.$$

Отже, $\lambda(B) = 0$, а тому $\lambda(S) = 0$. Таким чином, розподіл $\xi$ є сингулярним.

Теорема 2 доведена.

Розглянемо приклади застосування теореми 2 для деяких класів в. в. вигляду (1).

***Приклад* 1.** Нехай $E$ — множина комплексних коренів степеня $n$ з одиниці. Ця множина скінченна, тому умови 1 і 3 теореми 2 стверджують відсутність в структурі $\xi$ абсолютно неперервної компоненти. Для $a_k \in R$ і $n = 2$ в. в. $\xi$ є дійснозначною. Її властивості розглянуто в [6].

***Приклад* 2.** Якщо для прикладу 1 покласти $a_k = t^{-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $2 \le t \in \in R$, то умова 3 теореми 2 еквівалентна нерівності $n < t^2$, яка разом з умовою 1 цієї ж теореми стверджує відсутність в структурі $\xi$ абсолютно неперервної компоненти, а у випадку виконання $N$-властивості — сингулярність розподілу $\xi$.

**4.** Розглянемо властивості спектра к. в. в. $\xi$ з прикладу 2.

**Лема 3.** *Якщо* $\xi$ *— к. в. в. вигляду (1), для якої*

1) $E$ *— множина комплексних коренів степеня* $n$ *з одиниці;*

2) $a_k = t^{-k}$; $k = 1, 2, \ldots$; $2 < t \in R$, *то спектр* $S$ *цієї в. в. міститься в правильному* $n$*-кутнику, вершини якого збігаються з точками множини* $E_R = \{\varepsilon_m R;\ m = 0, 1, \ldots, n-1\}$, *де* $\varepsilon_m \in E$,

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k} = (t-1)^{-1}.$$

***Доведення.*** Позначимо прямі, що проходять через точки $\varepsilon_0 R$ і $\varepsilon_1 R$; $\varepsilon_1 R$ і $\varepsilon_2 R$; … ; $\varepsilon_{n-1} R$ і $\varepsilon_0 R$ як $l_0$; $l_1$; … ; $l_{n-1}$ відповідно. Для доведення леми досить показати, що точки множини $S$ лежать в одній півплощині з точкою $z_0 = 0$ відносно кожної з прямих $l_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Зафіксуємо довільно пряму $l_i$. Виконаємо поворот множини $S$ відносно $z_0$ за годинниковою стрілкою на кут $\beta_i = (\pi + 2\pi i)n^{-1}$. В результаті цього перетворення множина $S$ перейде в множину $S'$, пряма $l_i$ в пряму $l_i'$, паралельну уявній осі, точка $z_0$ залишиться нерухомою. Крім того, взаємне розміщення $S'$ і $l_i'$ відносно $z_0$ буде таким же, як розміщення $S$ і $l_i$.

Очевидно, що $\max\{\operatorname{Re} z\colon z \in S'\} = \operatorname{Re}\varepsilon_i' R = \operatorname{Re}\varepsilon_{i+1}' R$. Оскільки рівняння прямої $l_i'$ : $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\varepsilon_i' R$, то кожна точка $z' \in S'$ лежить в одній півплощині з точкою $z_0$ відносно $l_i'$, а отже, таке ж розміщення мають $S$ і $l_i$.

Лема 3 доведена.

**Теорема 3.** *Якщо для к. в. в. з леми* 3

$$\cos\gamma < (t-1)\sin(\pi n^{-1})$$

*або*

$$\cos\gamma = (t-1)\sin(\pi n^{-1})$$

*за умови* $n \neq 4q$ $(q = \overline{1, n-1})$, *де*

$$\gamma = \pi(2n)^{-1}\min_k |n-2-4k|, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

*то спектр* $S$ *розподілу* $\xi$ *є абсолютно самоподібною ніде не щільною множиною, розмірність Хаусдорфа – Безиковича якої* $\alpha_0(S) = \log_t n$.

***Доведення.*** З теореми 2 внаслідок (5) випливає, що множина $S$ може бути подана у вигляді об'єднання $n$ множин $S_m$, кожна з яких подібна до $S$ з коефіцієнтом подібності $k = t^{-1}$. Справді, використовуючи позначення теореми 2, отримаємо, що для кожного $x \in S_{r1}$

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{i_k} t^{-k} = t^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{i_{(k+1)}} t^{-k} = t^{-1} y, \qquad y \in S,$$

і для кожного $y \in S$ $y = tx$, де $x \in S_{r1}$.

Множини $S_m$ за лемою 3 та вищедоведеним містяться в правильних $n$-кутниках з центрами в точках $\varepsilon_m t^{-1}$ та радіусами описаних кіл $R_1 = R t^{-1} = (t(t-1))^{-1}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Оскільки $t > 2$, то $t^{-1} > R_1$, а отже, якщо не мають спільних точок сусідні $n$-кутники, що містять $S_m$ ($n$-кутники з центрами в $\varepsilon_m t^{-1}$ та $\varepsilon_{m+1} t^{-1}$), то спільних точок не матимуть й інші $n$-кутники.

Не порушуючи загальності, розглянемо $n$-кутники з центрами в точках $A_0 = \varepsilon_0 t^{-1}$ та $A_1 = \varepsilon_1 t^{-1}$ і трикутник $A_0 z_0 A_1$. Для нього кут $A_0 z_0 A_1$ дорівнює $2\pi n^{-1}$, а кути $A_0 A_1 z_0$ та $A_1 A_0 z_0$ дорівнюють $\pi(n-2)(2n)^{-1}$. Легко помітити, що $A_0 A_1 = 2t^{-1} \sin(\pi n^{-1})$, а проекції $d_0$ і $d_1$ $n$-кутників з центрами в $A_0$ і $A_1$ на відрізок $A_0 A_1$ рівні між собою і $d_0 = d_1 = R_1 \cos\gamma$, де $\gamma$ визначається з рівності

$$\gamma = \min_k \left| \pi(n-2)(2n)^{-1} - 2\pi k n^{-1} \right| = \pi(2n)^{-1} \min_k |n - 2 - 4k|, \tag{6}$$

де $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Умова відсутності перетину сусідніх $n$-кутників запишеться у вигляді $A_0 A_1 > 2d_0$ або після перетворень

$$\cos\gamma < (t-1)\sin(\pi n^{-1}), \tag{7}$$

де $\gamma$ визначається з рівності (6).

Якщо

$$\cos\gamma = (t-1)\sin(\pi n^{-1}), \tag{8}$$

то „сусідні” $n$-кутники або дотикаються, або мають спільну сторону. Як неважко переконатись шляхом геометричних міркувань, якщо вказані $n$-кутники мають спільну сторону, то $n = 4q$, де $q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Таким чином, якщо виконується умова (7) або умова (8) одночасно з умовою $n \neq 4q$, то $S$ — абсолютно самоподібна множина, самоподібна розмірність якої збігається, внаслідок замкнености, з її розмірністю Хаусдорфа – Безиковича. Ця розмірність визначається з рівняння $n t^{-\alpha_0} = 1$ і рівна $\alpha_0(S) = \log_t n$. Ніде не щільність $S$ очевидна.

Теорема 3 доведена.

Міркування, проведені в теоремі 3, не можуть бути повторені для випадку $a_k = 2^{-k}$, оскільки при $n = 2q$ всі $n$-кутники, що містять $S_m$, мають спільну точку $z_0 = 0$, а отже, можуть мати суттєві перекриття.

Окремої уваги заслуговує випадок $a_k = 2^{-k}$ і $n = 3$ для в. в. $\xi$ з теореми 3. Як неважко переконатися, спектр $S$ цієї в. в. є не чим іншим, як так званим „трикутним килимом Серпінського”. Відомо, що ця множина ніде не щільна і її розмірність Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0 = \log_2 3$.


1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Допов. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 32–37.
3. *Виннишин Я. Ф., Морока В. А.* Про тип функції розподілу випадкового степеневого ряду // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – К.: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 65–73.
4. *Торбін Г. М.* Випадкова величина, задана за допомогою збіжного знакододатнього ряду // П'ята міжнар. наук. конф., присвячена пам'яті акад. М. Кравчука, К., 16–18 трав. 1996 р. – Тези доп. – К., 1996. – С. 442.
5. *Pratsevityi N. V.* Fractal, superfractal and anomalously fractal distribution of random variables with independent $n$-adic digits, an infinite set of which is fixed / Eds by A. V. Skorokhod, Yu. V. Borovskikh // Exploring stochastic laws. Festschrift in Honor of 70-th Birthday of Acad. V. S. Korolyuk. – VSP, 1995. – P. 409–416.
6. *Reich J. I.* Some results on distribution arising from coin tossing // Ann. Probab. – 1982. – **10**, № 3. – P. 780–786.


Одержано 14.01.97