УДК 517.51

А. А. Половина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ КОДИРОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

We consider the problem of coding of parametrically defined vector functions by continuous functionals which act on their coordinate functions. We obtain the optimal method for coding some class of vector functions. In the linear case, we show the relation between this method and the informativeness of functionals with respect to the class of coordinate functions.

Розглянуто питання кодування параметрично заданих вектор-функцій неперервними функціоналами, що діють на їх координатні функції. Отримано оптимальний метод кодування для деякого класу вектор-функцій і у лінійному випадку показано зв'язок між ним та інформативністю функціоналів відносно класу координатних функцій.

1. В работе Н. П. Корнейчука [1] была введена количественная характеристика информативности функционала относительно фиксированного множества в метрическом пространстве с использованием понятия множества неопределенности (см., например, [2]). В случае пространства $C[a, b]$ функций одной переменной в статье [1] доказаны теоремы сравнения функционалов по их информативности относительно некоторых классов непрерывных функций. В этой работе рассматривается аналогичная задача для векторнозначных функций.

Пусть X — метрическое пространство с расстоянием $\rho_X(x, y)$, $\mathfrak{M}$ — фиксированное множество в X. С помощью набора

$$M_N = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}$$

непрерывных на X функционалов μ_k, $k = 1, \ldots, N$, элементу x из $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие вектор из $\mathbb{R}^N$

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}.$$

Пусть

$$D(\mathfrak{M}, M_N, X) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \operatorname{diam}_X T^{-1}(x, M_N) =$$

$$= \sup\{\rho_X(y, z) \colon y, z \in \mathfrak{M},\ T(y, M_N) = T(z, M_N)\}. \tag{1}$$

Задача оптимального кодирования элементов множества $\mathfrak{M}$ состоит в отыскании величины

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N} D(\mathfrak{M}, M_N, X) \tag{2}$$

и указании такого набора M_N^*, который реализует в (2) точную нижнюю грань.

Если X — линейное метрическое пространство, то наряду с $\gamma^N(\mathfrak{M}, X)$ также рассматривается величина

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M'_N} D(\mathfrak{M}, M'_N, X), \tag{3}$$

где M'_N — набор линейных непрерывных функционалов. Сразу отметим, что из определений (2) и(3) следует, что

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) \le \lambda^N(\mathfrak{M}, X). \tag{4}$$

В случае адаптивного (активного) метода кодирования элементов множества $\mathfrak{M}$, когда при выборе μ_k учитываются значения $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k-1}(x)$, с каждым шагом множество неопределенности для x сужается, так что уже после первого шага вместо множества $\mathfrak{M}$ надо рассматривать некоторое его подмножество. Поэтому естественно возникает задача оценки информативности функционала и отыскания величин (2) и (3), в том числе при $N = 1$.

Пусть X — линейное пространство векторнозначных функций $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $t \in [a, b]$, таких, что их графики — параметрически заданные кривые в $\mathbb{R}^m$. Займемся исследованием величин (2) и (3) при $N = 1$.

Специфика данного случая связана уже как с выбором расстояния между точками в пространстве $\mathbb{R}^m$, так и расстояния между функциями в пространстве X. Сначала будем считать, что $r(P, Q)$ — евклидово расстояние между точками P и Q из $\mathbb{R}^m$, а расстояние между функциями $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$ из X определим таким образом:

$$R(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{a \le t \le b} r(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)). \tag{5}$$

Это расстояние часто используется (см., например, [1, 3, 4]) при рассмотрении подобных задач, но зависит от выбора параметризации, что не всегда согласуется с геометрической близостью кривых. В этом смысле более естественно хаусдорфово расстояние (см., например, [5, с. 35]):

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \max\left\{ \sup_{P \in \overline{\varphi}(t)} \inf_{Q \in \overline{\psi}(t)} r(P, Q), \ \sup_{P \in \overline{\varphi}(t)} \inf_{Q \in \overline{\psi}(t)} r(P, Q) \right\}. \tag{6}$$

В зависимости от выбора расстояния (5) или (6) в пространстве X будем его обозначать X_R или X_h соответственно.

Кодирующий функционал будем задавать на координатных функциях (каждая координатная функция кодируется одним и тем же функционалом). Такой способ в какой-то мере оправдан и в некоторых случаях дает возможность эффективно применять одномерные результаты. Заметим, что это не единственный подход к кодированию вектор-функций (например, функционал можно задавать на кривых), в чем также особенность многомерного случая.

2. Пусть класс $\mathfrak{M}$ состоит из тех вектор-функций пространства X, координатные функции которых принадлежат множеству KH_0^1, $K > 0$:

$$KH_0^1 = \{ f(t) \colon |f(t') - f(t'')| \le K|t' - t''|, \ t', t'' \in [a, b], \ f(a) = f(b) = 0 \},$$

т. е. $\mathfrak{M} = \{ \overline{\varphi}(t) = \{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m \colon \varphi_i \in KH_0^1, \ i = 1, \ldots, m \}$, вектор-функции из $\mathfrak{M}$ непрерывны, а их графиками являются замкнутые кривые. Метод кодирования элементов класса $\mathfrak{M}$ при $N = 1$ будет иметь вид

$$T(\overline{\varphi}, \mu) = \{ \mu(\varphi_1), \mu(\varphi_2), \ldots, \mu(\varphi_m) \},$$

где $\mu = \mu_1$ — непрерывный функционал на пространстве непрерывных функций $C = C[a, b]$ с метрикой $\rho_0(x, y) = \| x - y \|_C = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$.

При этом соотношение (1) перепишется в виде

$$D(\mathfrak{M}, \mu, X) = \sup \{ \rho_X(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)) \colon \overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t) \in \mathfrak{M};$$

$$\mu(\varphi_i) = \mu(\psi_i), \ i = 1, \ldots, m \}, \tag{1'}$$

где $\rho_X(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t))$ определяется формулой (5) или (6) в зависимости от выбора метрики в пространстве X, и задача оптимального кодирования элементов множества $\mathfrak{M}$ будет состоять в отыскании значений информационного поперечника

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mu} D(\mathfrak{M}, \mu, X), \tag{2'}$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функционалам, и линейного информационного поперечника

$$\lambda^1(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mu'} D(\mathfrak{M}, \mu, X), \tag{3'}$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным линейным функционалам, с указанием функционалов, реализующих точные нижние грани в (2′) и (3′).

Для оценки величин (2′) и (3′) сверху каждый случай, т. е. в зависимости от ввода расстояния (5) или (6) в пространстве вектор-функций X, удобно рассматривать отдельно.

Начнем с общего утверждения для пространства X_R.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{N}_m$ — класс m-мерных вектор-функций, координатные функции которых принадлежат замкнутому множеству $\mathfrak{N}$, то для любого непрерывного функционала μ справедливо равенство*

$$D(\mathfrak{N}_m, \mu, X_R) = \sqrt{m}\, D(\mathfrak{N}, \mu, C). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть μ — функционал, заданный на C, и пусть

$$D(\mathfrak{N}, \mu, C) = \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \in \mathfrak{N};\ \mu(x) = \mu(y)\} = \rho(x_0, y_0), \tag{8}$$

где функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$ принадлежат $\mathfrak{N}$ и $\mu(x_0) = \mu(y_0)$.

Пусть для точки $t_0 \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\rho(x_0, y_0) = \sup_{a \le t \le b} |x_0(t) - y_0(t)| = |x_0(t_0) - y_0(t_0)|. \tag{9}$$

Таким образом, из (8) и (9) получаем, что

$$D(\mathfrak{N}, \mu, C) = |x_0(t_0) - y_0(t_0)|. \tag{10}$$

Для функций $\overline{\psi}_1(t) = \{\psi_{1i}(t)\}_{i=1}^m$ и $\overline{\psi}_2(t) = \{\psi_{2i}(t)\}_{i=1}^m$ из $\mathfrak{N}_m$, таких, что $T(\overline{\psi}_1, \mu) = T(\overline{\psi}_2, \mu)$, а значит таких, что $\mu(\psi_{1i}) = \mu(\psi_{2i})$, $i = 1, \ldots, m$, из равенств (8), (9) и (10) для любых $t \in [a, b]$ и $i = 1, \ldots, m$ записываем

$$\begin{aligned}|\psi_{1i}(t) - \psi_{2i}(t)| &\le \sup_{a \le t \le b} |\psi_{1i}(t) - \psi_{2i}(t)| = \\ &= \rho(\psi_{1i}, \psi_{2i}) \le \rho(x_0, y_0) = |x_0(t_0) - y_0(t_0)|.\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$R(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) = \sup_{a \le t \le b} \sqrt{\sum_{i=1}^m |\psi_{1i}(t) - \psi_{2i}(t)|^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^m \sup_{a \le t \le b} |\psi_{1i}(t) - \psi_{2i}(t)|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_0(t_0) - y_0(t_0)|^2} = \sqrt{m}\, |x_0(t_0) - y_0(t_0)|,$$

где последнее неравенство следует из (11). Отсюда получаем

$$\sup\{R(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) \colon \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2 \in \mathfrak{N}_m,\ T(\overline{\psi}_1, \mu) = T(\overline{\psi}_2, \mu)\} \le$$
$$\le \sqrt{m}\, |x_0(t_0) - y_0(t_0)|.$$

Но для функций $\overline{\varphi}_1(t) = \{\varphi_{1i}(t)\}_{i=1}^m$ и $\overline{\varphi}_2(t) = \{\varphi_{2i}(t)\}_{i=1}^m$ таких, что

$\varphi_{1i}(t) \equiv x_0(t)$, $i = 1, \ldots, m$ и $\varphi_{2i}(t) \equiv y_0(t)$, $i = 1, \ldots, m$ (а значит, $\overline{\varphi}_1(t)$, $\overline{\varphi}_2(t) \in \mathfrak{N}_m$):

$$R(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) = |x_0(t_0) - y_0(t_0)| \sqrt{m}.$$

Кроме того, так как $\mu(x_0) = \mu(y_0)$, то $T(\overline{\varphi}_1, \mu) = T(\overline{\varphi}_2, \mu)$. Следовательно,

$$D(\mathfrak{N}_m, \mu, X_R) = \sup\{R(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) : \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2 \in \mathfrak{N}_m,\ T(\overline{\psi}_1, \mu) = T(\overline{\psi}_2, \mu)\} =$$

$$= R(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2) = \sqrt{m}\,|x_0(t_0) - y_0(t_0)|.$$

Отсюда, учитывая (10), получаем (7). Предложение 1 доказано.

Из этого предложения следует, что

$$\inf_{\mu} D(\mathfrak{N}_m, \mu, X_R) = \sqrt{m} \inf_{\mu} D(\mathfrak{N}, \mu, C). \tag{12}$$

Так как точную нижнюю грань с правой стороны этого равенства реализует функционал с наибольшей информативностью относительно класса функций $\mathfrak{N}$, то из (12) следует, что он же задает и оптимальный метод кодирования для вектор-функций класса $\mathfrak{N}_m$, т. е. при $\mathfrak{N} = KH_0^1$, $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{M}$ выполняются равенства

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X_R) = \sqrt{m}\,\gamma^1(KH_0^1, C), \quad \lambda^1(\mathfrak{M}, X_R) = \sqrt{m}\,\lambda^1(KH_0^1, C). \tag{12$'$}$$

В работах [1, 3] показано, что

$$\lambda^1(KH_0^1, C) = D(KH_0^1, \mu_\tau, C) = K\frac{b-a}{2}, \tag{13}$$

где μ_τ является функционалом наибольшей информативности и имеет вид $\mu_\tau(f) = f(\tau)$, $\tau = (b+a)/2$.

Таким образом, из равенств (12′) и (13) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Если в пространстве X введено расстояние* (5), *то для поперечника* (3′) *класса $\mathfrak{M}$ справедливы равенства*

$$\lambda^1(\mathfrak{M}, X_R) = D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_R) = \frac{K\sqrt{m}}{2}(b-a). \tag{14}$$

Заметим, что если вектор-функции кодируются не одним функционалом, а набором M_N, $N > 1$ (действующим на каждую координатную функцию), то, повторяя рассуждение доказательства предложения 1, получаем следующее равенство для величины (2):

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X_R) = \sqrt{m} \inf_{M_N} D(KH_0^1, M_N, C)$$

и, учитывая результаты работы [3], равенство для величины (3):

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X_R) = \frac{K\sqrt{m}}{N+1}(b-a). \tag{15}$$

Равенство (14) дает точное значение величины (3′), а с учетом (4) — ограничение сверху величины (2′) в случае метрики (5). Перейдем к случаю хаусдорфовой метрики (6) и оценим сверху $\gamma^1(\mathfrak{M}, X_h)$ и $\lambda^1(\mathfrak{M}, X_h)$.

Предложение 3. *Если в пространстве X введено расстояние* (6), *то для поперечника* (3′) *класса $\mathfrak{M}$ выполняется неравенство*

$$\lambda^1(\mathfrak{M}, X_h) \leq \frac{K\sqrt{m}}{4}(b-a). \tag{16}$$

Доказательство. Для доказательства (16) сначала оценим сверху величину $D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_h)$, где μ_τ, как и прежде, имеет вид $\mu_\tau(f) = f(\tau)$, $\tau = (b+a)/2$.

Рассмотрим расстояние между функциями $\overline{\varphi}(t)$, $\overline{\psi}(t)$ из $\mathfrak{M}$ такими, что $T(\overline{\varphi}, \mu_\tau) = T(\overline{\psi}, \mu_\tau)$, т. е. $\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\psi}(\tau)$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{a \leq u \leq b} \inf_{a \leq s \leq b} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)). \tag{17}$$

Очевидно, что для правой части (17) справедливо следующее равенство:

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \max\{h_1(\overline{\varphi}, \overline{\psi}), h_2(\overline{\varphi}, \overline{\psi})\}, \tag{18}$$

где

$$h_1(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{a \leq u \leq \tau} \inf_{a \leq s \leq b} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),$$

$$h_2(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{\tau \leq u \leq b} \inf_{a \leq s \leq b} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)).$$

Пусть $\tau' = (a+\tau)/2$, тогда

$$h_1(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \max\{h_{11}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}), h_{12}(\overline{\varphi}, \overline{\psi})\}, \tag{19}$$

где

$$h_{11}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{a \leq u \leq \tau'} \inf_{a \leq s \leq b} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),$$

$$h_{12}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{\tau' \leq u \leq \tau} \inf_{a \leq s \leq b} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(s)),$$

и для которых справедливы следующие соотношения:

$$h_{11}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \leq \sup_{a \leq u \leq \tau'} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(a)) = \sup_{a \leq u \leq \tau'} r\left(\overline{\varphi}(u), \overline{0}\right) =$$

$$= \sup_{a \leq u \leq \tau'} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi_i(u))^2} \leq \sup_{a \leq u \leq \tau'} \sqrt{\sum_{i=1}^m (K(u-a))^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{m} K(\tau' - a) = \sqrt{m} K \frac{b-a}{4},$$

т. е.

$$h_{11}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \leq \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}, \tag{20}$$

$$h_{12}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \leq \sup_{\tau' \leq u \leq \tau} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\psi}(\tau)) = \sup_{\tau' \leq u \leq \tau} r(\overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(\tau)) =$$

$$= \sup_{\tau' \leq u \leq \tau} \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi_i(u) - \varphi_i(\tau))^2} \leq \sup_{\tau' \leq u \leq \tau} \sqrt{\sum_{i=1}^m (K(u-\tau))^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{m} K(\tau - \tau') = \sqrt{m} K \frac{b-a}{4},$$

т. е.

$$h_{12}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}. \tag{21}$$

Учитывая (20) и (21), из (19) получаем

$$h_1(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}. \tag{22}$$

С помощью аналогичных рассуждений имеем

$$h_2(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}. \tag{23}$$

Применяя (22) и (23) к (18), получаем

$$h(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) \le \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}.$$

Так как это неравенство выполняется для любых $\overline{\varphi}(t)$, $\overline{\psi}(t)$ из $\mathfrak{M}$ таких, что $T(\overline{\varphi}, \mu_\tau) = T(\overline{\psi}, \mu_\tau)$, то справедливо неравенство

$$D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_h) \le \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}. \tag{24}$$

А так как $\lambda^1(\mathfrak{M}, X_h) \le D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_h)$, по определению величины (3), то из (24) получаем (16).

3. Для оценки величин (2′) и (3′) снизу будем считать, что среди непрерывных функционалов μ, реализующих точную нижнюю грань в формуле (2′), есть нечетные функционалы, т. е. такие, что для всех $f(t)$ из $C[a, b]$ выполняется $\mu(-f) = -\mu(f)$. Действительно, замена координатной функции на ее противоположную должна менять знак соответствующей координаты кодирующей точки в $\mathbb{R}^m$. Таким образом в дальнейшем будем считать, что в (2′) точная нижняя грань берется по всем непрерывным нечетным функционалам, действующим на $C[a, b]$, т. е.

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} D(\mathfrak{M}, \mu, X),$$

где $\mathcal{M}$ — множество непрерывных и нечетных на $C[a, b]$ функционалов.

В этой ситуации имеет место факт общего характера, доказанный в работе [4], который здесь мы сформулируем при $N = 1$.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{N}$ — *центрально симметрический класс функций* $f(t) \in C[a, b]$; $\mathfrak{N}_m$ — *класс вектор-функций* $\bar{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)\}$, *у которых* $f_i(t) \in \mathfrak{N}$, $i = 1, \ldots, m$. *Если для непрерывного нечетного функционала* μ *на* $C[a, b]$ *в классе* $\mathfrak{N}$ *существует функция* $g(t)$ *такая, что* $\mu(g) = 0$ *и* $\|g\|_C \ge q$, *то выполняются неравенства*

$$D(\mathfrak{N}_m, \mu, X_R) \ge 2\sqrt{mq}, \quad D(\mathfrak{N}_m, \mu, X_h) \ge \sqrt{mq}. \tag{25}$$

Использование этого факта позволяет доказать следующее утверждение.

Предложение 5. *Если* μ — *нечетный непрерывный функционал, то выполняются неравенства*

$$D(\mathfrak{M}, \mu, X_R) \ge \sqrt{m} K \frac{b-a}{2}, \tag{26}$$

$$D(\mathfrak{M}, \mu, X_h) \ge \sqrt{m} K \frac{b-a}{4}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть μ — непрерывный нечетный функционал. Функции $g_\theta(t)$, $\theta \in [a, b]$, определим таким образом:

$$g_\theta(t) = \begin{cases} \max\{K(a-t), K(t-\theta)\}, & a \le t \le \theta, \\ \min\{K(b-t), K(\theta-t)\}, & \theta \le t \le b. \end{cases}$$

Сразу отметим три очевидных свойства таких функций, непосредственно следующих из определения $g_\theta(t)$:

$$1)\ g_\theta(t) \in KH_0^1, \quad a \le \theta \le b, \tag{28}$$

$$2)\ g_a(t) \equiv -g_b(t), \tag{29}$$

$$3)\ \|g_\theta\|_C \ge \frac{K}{4}(b-a), \quad a \le \theta \le b. \tag{30}$$

Рассмотрим функцию $f(\theta)$, определенную таким образом:

$$f(\theta) = \mu(g_\theta), \quad \theta \in [a, b].$$

Из непрерывности функционала μ следует непрерывность $f(\theta)$ на $[a, b]$. Из нечетности μ и (29) следует, что $\mu(g_a) = -\mu(g_b)$, а значит, $f(a) = -f(b)$. Следовательно, существует точка θ^* из $[a, b]$ такая, что $f(\theta^*) = 0$, а значит, $\mu(g_{\theta^*}) = 0$, т. е. функция $g_{\theta^*}(t)$ удовлетворяет условиям предложения 4.

Учитывая свойство 3 функций $g_\theta(t)$ и неравенство (25), получаем утверждение предложения 5.

Объединяя установленные результаты и учитывая соотношения (4), (14), (26), (27), сформулируем следующее утверждение.

Теорема. *Для информационных поперечников, определенных формулами* (2′) *и* (3′), *справедливы равенства*

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X_R) = \lambda^1(\mathfrak{M}, X_R) = D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_R) = \frac{K\sqrt{m}}{2}(b-a), \tag{31}$$

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X_h) = \lambda^1(\mathfrak{M}, X_h) = D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_h) = \frac{K\sqrt{m}}{4}(b-a), \tag{32}$$

где функционал μ_τ *определен для* $f(t) \in C[a, b]$ *следующим образом:* $\mu_\tau(f) = f(\tau)$, $\tau = (a+b)/2$.

Отметим, что в случае метрики (5) оценку сверху величины $\lambda^1(\mathfrak{M}, X_R)$ можно было бы получить методом, аналогичным тому, как была получена оценка сверху величины $\lambda^1(\mathfrak{M}, X_h)$ (см. доказательство предложения 3), что в итоге, при $m = 1$, дало бы нам новое доказательство теоремы 1 работы [1]. Но изложенный выше способ получения этой оценки показывает прямую связь между линейным непрерывным функционалом с наибольшей информативностью относительно класса KH_0^1 (см. [1]) и оптимальным методом кодирования линейными непрерывными функционалами класса вектор-функций $\mathfrak{M}$ (см. предложения 1 и 2).

Заметим также, что в данной работе, как частный случай (при $m = 1$), получено значение $\gamma^1(KH_0^1, C)$, которое равно значению величины $\lambda^1(KH_0^1, C)$, вычисленному в работах [1, 3].

Сравним полученные результаты с некоторыми результатами работы [4]. Для параметрически заданных вектор-функций из класса $\mathfrak{M}'$ с координатными функциями из сходного с KH_0^1 множества

$$KH^1 = \{ f(t) \in C: |f(t') - f(t'')| \le K|t' - t''|,\ t', t'' \in [a, b] \}$$

были получены следующие равенства:

$$\gamma^1(\mathfrak{M}', X_R) = \lambda^1(\mathfrak{M}', X_R) = K\sqrt{m}(b-a),$$

$$\gamma^1(\mathfrak{M}', X_h) = \lambda^1(\mathfrak{M}', X_h) = \frac{K\sqrt{m}}{2}(b-a),$$

т. е. соответствующие поперечники класса $\mathfrak{M}$ в два раза меньше, чем поперечники $\mathfrak{M}'$. Если же координатные функции кодируются набором линейных непрерывных функционалов M_N, $N > 1$, то в [4] при $[a, b] = [0, 1]$ установлено, что $\lambda^N(\mathfrak{M}', X_R) = K\sqrt{m}/N$, т. е. с учетом соотношения (15) и последнего равенства можно сказать, что чем больше N, тем ближе значения $\lambda^N(\mathfrak{M}', X_R)$ и $\lambda^N(\mathfrak{M}, X_R)$.

4. Как уже было замечено, одной из особенностей многомерного случая является выбор метрики в пространстве $\mathbb{R}^m$. Способ доказательства приведенных выше утверждений позволяет перенести результаты этой работы на случай, если расстояние между точками $P = \{p_i\}_{i=1}^m$ и $Q = \{q_i\}_{i=1}^m$ из $\mathbb{R}^m$ задается не евклидовой, а другой метрикой вида

$$d(P, Q) = d(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, \ldots, |p_m - q_m|).$$

Повторяя изложенные выше рассуждения для данного расстояния, получаются результаты, аналогичные (31) и (32). Например, если в $\mathbb{R}^m$ задана метрика Минковского (см. [5, с. 35]): $m(P, Q) = \max_{1 \le i \le m} |p_i - q_i|$, то для расстояний между функциями $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\psi}(t)$, определенных таким образом:

$$R_m(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \sup_{a \le t \le b} m(\overline{\varphi}(t), \overline{\psi}(t)),$$

$$h_m(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \max\left\{ \sup_{P \in \varphi(t)} \inf_{Q \in \overline{\psi}(t)} m(P, Q), \ \sup_{P \in \varphi(t)} \inf_{Q \in \overline{\psi}(t)} m(P, Q) \right\},$$

имеют место следующие равенства:

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X_{R_m}) = \lambda^1(\mathfrak{M}, X_{R_m}) = D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_{R_m}) = \frac{K}{2}(b-a),$$

$$\gamma^1(\mathfrak{M}, X_{h_m}) = \lambda^1(\mathfrak{M}, X_{h_m}) = D(\mathfrak{M}, \mu_\tau, X_{h_m}) = \frac{K}{4}(b-a).$$

1. *Корнейчук Н. П.* Информативность функционалов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1148–1155.
2. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожняковский Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183 с.
3. *Корнейчук Н. П.* О сравнении информативности фупкциналов // Допов. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 15–16.
4. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 6. – С. 737–744.
5. *Сендов Бл.* Хаусдорфовы приближения. – София: Изд-во Болгар. АН. – 1979. – 372 с.

Получено 25.11.96