УДК 517.942

Ю. В. Теплинский (Каменец-Подол. пед. ин-т),
А. Ю. Теплинский (Киев. ун-т)

О ТЕОРЕМАХ ЕРУГИНА И ФЛОКЭ – ЛЯПУНОВА ДЛЯ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

For linear difference equations in the space of bounded number sequences, we prove an analogue of Erugin theorem on reducibility. Sufficient conditions for reducibility of countable linear systems of difference equations with periodic coefficients are given.

Для лінійних різницевих рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей доведено аналог теореми Єругіна про звідність. Наведено достатні умови звідності зчисленних лінійних систем різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

В последние годы опубликован ряд результатов [1 – 3], связанных с исследованием задачи приводимости дифференциальных систем различного вида в пространстве ограниченных числовых последовательностей, называемых обычно счетными системами. В настоящей статье некоторые из этих результатов, касающиеся основных положений теории Флокэ – Ляпунова, распространены на случай счетных систем разностных уравнений. При этом достаточные условия приводимости счетных разностных систем с периодическими коэффициентами редуцированы на случай конечномерных разностных систем, которые достаточно хорошо изучены [4].

Рассмотрим однородное разностное уравнение

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \tag{1}$$

где $x = (x^1, x^2, \dots) \in \mathfrak{M}$, $A(n) = [a_{ij}(n)]_{i,j=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица, $\mathfrak{M}$ — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_i \{|x^i|, i = 1, 2, \dots\}$, n пробегает множество Z целых чисел.

Норму матрицы A зададим равенством $\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Очевидно, эта норма согласована с векторной нормой пространства $\mathfrak{M}$.

Множество всех бесконечных постоянных матриц, ограниченных по норме $\|\cdot\|$, обозначим через $\mathcal{B}$. Легко убедиться, что множество $\mathcal{B}$ образует банахово пространство над полем действительных чисел, причем если $P_k \in \mathcal{B}$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$\prod_{k=1}^{s} P_k = P_1 \left(\prod_{k=2}^{s} P_k \right). \tag{2}$$

Будем считать, что при всех $n \in Z$ матрицы $A(n)$ обратимы и $A(n)$, $A^{-1}(n) \in \mathcal{B}$.

Под решением уравнения (1) на отрезке $[a, b] \subset R^1$ (конечном или бесконечном) с начальными значениями $x_l \in \mathfrak{M}$, $n = l \in [a, b]_Z = [a, b] \cap Z$ будем понимать такую дискретную функцию $x_n = x(n, x_l)$, которая обращает (1) в тождество на $[a, b]_Z$, принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ на этом множестве и удовлетворяет условию $x_l = x(l, x_l)$.

Из представления

$$x(n, x_l) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\dots A(l)x_l & \text{при } n > l; \\ A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)\dots A^{-1}(l-1)x_l & \text{при } n < l \end{cases}$$

следует, что для любых начальных значений $l \in Z$, $x_l \in \mathfrak{M}$ существует единственное решение $x_n = x(n, x_l)$ уравнения (1), определенное на отрезке $(-\infty, +\infty)$.

Сформулируем утверждение, необходимое для дальнейшего изложения.

Теорема 1. *Если* $\overset{(i)}{x}_n = \overset{(i)}{x}(n)$, $i = 1, 2, 3 \ldots$, *являются решениями уравнения* (1) *и при некотором* $n = l \in Z$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(i)}{x}{}_l^s| < \beta_0 = \text{const} < \infty, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

то при любом постоянном векторе $c = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \in \mathfrak{M}$ *функция* $z_n = z(n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overset{(i)}{x}(n)$ *также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Не ограничивая общности, положим $l = 0$. Учитывая представление

$$\overset{(i)}{x}{}_1^s = \sum_{j=1}^{\infty} a_{sj}(0) \overset{(i)}{x}{}_0^j, \quad i, s = 1, 2, 3, \ldots,$$

и условие (3), убеждаемся, что повторный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{sj}(0) \overset{(i)}{x}{}_0^j$ абсолютно сходится при всех $s = 1, 2, 3, \ldots$ и сумма его ограничена постоянной $\beta_1 = = \beta_0 \| A(0) \|$. Тогда при всех натуральных s выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(i)}{x}{}_1^s| \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{sj}(0)| |\overset{(i)}{x}{}_0^j| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{sj}(0)| |\overset{(i)}{x}{}_0^j| < \beta_1.$$

Методом полной математической индукции заключаем, что при всех $n \in \in Z^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(i)}{x}{}_n^s| < \beta_0 \prod_{j=0}^{n-1} A(j) = \beta_n = \text{const} < \infty, \quad s \in Z^+. \tag{4}$$

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что при всех $n \in Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\overset{(i)}{x}{}_n^s| < \beta_0 \prod_{j=-1}^{n} A^{-1}(j) = \gamma_n = \text{const} < \infty, \quad s \in Z^+. \tag{5}$$

Оценки (4) и (5) означают, что условие (3) выполняется при любом $n \in Z$. В таком случае функция $z_n = z(n)$ существует и принадлежит $\mathfrak{M}$ при всех целых n.

Неравенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{sj}(n) c_i \overset{(i)}{x}{}_n^j \right| < \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \|c\| |a_{sj}(n)| \beta_n \le \|c\| \beta_n \| A(n) \|, & n \ge 0; \\ \sum_{j=1}^{\infty} \|c\| |a_{sj}(n)| \gamma_n \le \|c\| \gamma_n \| A(n) \|, & n < 0 \end{cases}$$

гарантируют справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i a_{sj}(n) \overset{(i)}{x}{}_n^j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{sj}(n) c_i \overset{(i)}{x}{}_n^j$$

при всех $n \in Z$ и $s \in Z^+$. Это значит, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \overset{(i)}{x}_{n+1} = A(n) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overset{(i)}{x}_n.$$

Теорема доказана.

Сконструируем матрицу $\Omega(n, l)$, i-м столбцом которой является решение $\overset{(i)}{x}_n = \overset{(i)}{x}(n, x_l)$ уравнения (1) с начальными значениями $n = l$, $\overset{(i)}{x}_l = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Это означает, что $\Omega(l, l) = E$, где E — единичная матрица. Построенную матрицу назовем матрицантом уравнения (1) и обозначим через Ω_l^n. Очевидно, матрицант Ω_l^n является решением матричного уравнения

$$\Omega_l^{n+1} = A(n)\Omega_l^n, \quad n \in Z, \tag{6}$$

что приводит к представлению

$$\Omega_l^n = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\ldots A(l), & n > l; \\ E, & n = l; \\ A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)\ldots A^{-1}(l-1), & n < l. \end{cases} \tag{7}$$

Матрицу $X(n)$ назовем фундаментальной матрицей уравнения (1), если при всех $n \in Z$ $X(n+1) = A(n)X(n)$ и для всякого решения $x_n = x(n)$ уравнения (1) существует такой постоянный вектор $c \in \mathfrak{M}$, что $x_n = X(n)c$. Из теоремы 1 следует, что при любом $c \in \mathfrak{M}$ функция $x_n = \Omega_l^n c$ является решением уравнения (1). Учитывая равенство (6), приходим к выводу, что матрицант уравнения (1) является фундаментальной матрицей.

Будем считать уравнение (1) приводимым к виду

$$y_{n+1} = B y_n, \quad n \in Z, \tag{8}$$

с постоянной матрицей B, если существует бесконечная обратимая матрица $T(n)$ такая, что любое решение $x_n = x(n)$ уравнения (1) связано с решением $y_n = y(n)$ уравнения (8) соотношением

$$x_n = T(n)y(n), \tag{9}$$

причем $T(n)$, $T^{-1}(n) \in \mathcal{B}$, $n \in Z$.

Отметим, что матрица B в (8) должна быть обратимой и ограниченной вместе со своей обратной матрицей в силу представления

$$B = T^{-1}(n+1)A(n)T(n), \quad n \in Z.$$

О приводимости уравнения (1) говорит следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Еругина.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *приводимо к виду* (8) *заменой переменных* (9) *тогда и только тогда, когда некоторая его фундаментальная матрица* $X(n)$ *может быть представлена в виде*

$$X(n) = T(n)B^n, \quad n \in Z. \tag{10}$$

Доказательство. Договоримся сначала, что при $n \in Z^-$ под выражением B^n будем понимать $(B^{-1})^{-n}$. Пусть условие (10) справедливо. Тогда замена переменных $x_n = X(n)B^{-n}y_n$, $n \in Z$, преобразует уравнение (1) к виду

$$A(n)X(n)B^{-(n+1)}y_{n+1} = A(n)X(n)B^{-n}y_n. \tag{11}$$

Равенства (10) и (2) приводят к обратимости матрицы $X(n)$ и ограниченности матрицы $X^{-1}(n)$ по норме при любых $n \in Z$. Тогда из соотношения (11) выводим уравнение (8).

Остановимся теперь на доказательстве необходимости. Пусть уравнение (1) приводится к виду (8) заменой переменных (9). Обозначим через Ω_0^n матрицант уравнения (8). Тогда любое его решение $y_n = y(n)$ можно представить в виде $y_n = \Omega_0^n c$, где c — некоторый постоянный вектор из $\mathfrak{M}$. При этом $\Omega_0^n = B^n$, $n \in Z$, откуда следует $y_n = B^n c$. В этом случае любое решение $x_n = x(n)$ уравнения (1) представимо в виде $x_n = T(n)B^n c$, $n \in Z$. Обозначим $T(n)B^n$ через $X(n)$. Легко видеть, что $X(n)$ — фундаментальная матрица уравнения (1).

***Следствие* 1.** *Для любой постоянной обратимой бесконечной матрицы B такой, что $B, B^{-1} \in \mathcal{B}$, существует матрица $T(n)$, приводящая уравнение* (1) *к виду* (8).

Доказательство. Учитывая теорему 2, достаточно показать, что матрицант Ω_0^n уравнения (1) можно представить в виде $T(n)B^n$, $n \in Z$, где $T(n)$ — обратимая матрица и $T(n), T^{-1}(n) \in \mathcal{B}$. Матрица

$$T(n) = \Omega_0^n B^{-n} \tag{12}$$

имеет нужные свойства.

Предположим теперь, что матрица $A(n)$ N-периодична, т. е. периодична по n с периодом $N \in Z^+ : A(n+N) = A(n)$, $n \in Z$. Для уравнения (1) и в этом случае справедливо следствие 1. Ситуация усложняется, если потребовать от приводящей матрицы $T(n)$ равномерной относительно $n \in Z$ ограниченности по норме $\|\cdot\|$. Для этого достаточно, чтобы матрица $T(n)$ в выражении (12) была периодической по n с некоторым периодом. Следующая теорема приводит условия существования такой матрицы.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием N-периодичности матрицы $T(n)$, заданной выражением* (12), *в котором Ω_0^n — матрицант уравнения* (1) *с N-периодической матрицей $A(n)$, является существование действительного корня N-й степени из матрицы монодромии Ω_0^N такого, что*

$$B^N = \Omega_0^N, \quad B, B^{-1} \in \mathcal{B}. \tag{13}$$

Достаточность приведенного условия следует из соотношений

$$T(n+N) = \Omega_0^n \, \Omega_0^N B^{-(n+N)} = \Omega_0^n B^{-n} = T(n), \quad n \in Z.$$

Предположение о N-периодичности матрицы (12) приводит к равенству $\Omega_0^n = \Omega_0^{n+N} B^{-N}$, полагая в котором $n = 0$, убеждаемся в справедливости условия (13), т. е. в необходимости последнего.

Отметим, что отыскание корня N-й степени из бесконечномерной матрицы является достаточно сложной задачей. Ее можно связать с задачей отыскания логарифма этой матрицы. Так, если у матрицы Ω_0^N существует ограниченный по норме действительный логарифм, то можно положить

$$B = (\Omega_0^N)^{1/N} = \exp\left\{\frac{1}{N} \ln \Omega_0^N\right\}. \tag{14}$$

Однако даже в конечномерном случае не от всякой действительной невырожденной матрицы существует действительная ветвь логарифма. Но в этом случае всегда существует действительная его ветвь для матрицы $(\Omega_0^N)^2$. Учитывая соотношение (7), ведущее к равенству $(\Omega_0^N)^2 = \Omega_0^{2N}$, аналогично (14) полагаем

$$B = (\Omega_0^{2N})^{1/2N} = \exp\left\{\frac{1}{2N}\ln\Omega_0^{2N}\right\}.$$

Тогда матрицы B и $T(n)$ являются действительными, причем последняя из них $2N$-периодическая.

Таким образом, в бесконечномерном случае прямого аналога теоремы Флокэ – Ляпунова о приводимости уравнения (1) с N-периодической матрицей сформулировать не удается. Сейчас мы подойдем к решению этой задачи иначе, не находя корня из матрицы монодромии этого уравнения .

Наряду с (1) рассмотрим уравнение

$$\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{A}(n)\overset{(s)}{x}_n, \quad n \in Z, \tag{15}$$

которое получается из (1) урезанием по x до s-го порядка, т. е. $\overset{(s)}{x} = (\overset{(s)}{x}{}^1, \overset{(s)}{x}{}^2, \ldots, \overset{(s)}{x}{}^s)$, $\overset{(s)}{A}(n) = [a_{ij}(n)]_{i,j=1}^s$.

Уравнение (15) рассматривается в конечномерном пространстве R^s и является приводимым при любом $s \in Z^+$, если только матрица $A(n)$ N-периодическая. Это означает, что при любом $s \in Z^+$ существует обратимая матрица $\overset{(s)}{T}(n)$, приводящая уравнение (15) к виду

$$\overset{(s)}{y}_{n+1} = \overset{(s)}{B}\overset{(s)}{y}_n, \quad n \in Z, \tag{16}$$

где $\overset{(s)}{B}$ — постоянная обратимая матрица.

Последовательность матриц $\overset{(n)}{C} = [\overset{(n)}{c}_{ij}]_{i,j=1}^\infty$ называют правильной, если она равномерно ограничена и сходится к некоторой матрице по координатам, причем ряды $\sum_{j=1}^\infty |\overset{(n)}{c}_{ij}|$, $i = 1, 2, \ldots$, сходятся равномерно по n. Если при этом последнее условие выполняется равномерно по $i = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{\overset{(n)}{C}\}$ называют усиленно правильной [1].

Укажем условия, при которых из сходимости матричной последовательности $\{\overset{(s)}{T}(n)\}$, $s \to \infty$, следует приводимость уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть матрица $A(n)$ N-периодическая, причем существует такое $n^0 \in Z^+$, при котором*

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{ij}(n^0)| \le K_{n^0}(m), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

где $K_{n^0}(m) \to 0$ при $m \to \infty$, и матрицы $\overset{(s)}{A}(n)$ обратимы при всех $s \in Z^+$, $n \in Z$. Если последовательность матриц $\{\overset{(s)}{T}(n)\}$, приводящих (15) к виду (16), усиленно правильная, а последовательность матриц $\{\overset{(s)}{T}{}^{-1}(n)\}$ правильная при всех $n \in Z$, то покоординатно

$$\lim_{s\to\infty}\overset{(s)}{T}(n) = T(n), \quad \lim_{s\to\infty}\overset{(s)}{B} = B$$

и уравнение (1) *приводимо к виду* (8) *на любом отрезке* $[a, +\infty)$ *с помощью* $2N$*-периодической матрицы* $T(n)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, положим $a = 0$ и покажем, что покоординатно

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}(n, \overset{(s)}{x}_0) = x(n, x_0), \tag{18}$$

где $\overset{(s)}{x}_n = \overset{(s)}{x}(n, \overset{(s)}{x}_0)$ и $x_n = x(n, x_0)$ — решения уравнений соответственно (15) и (1), $n \in [0, +\infty)_Z$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $\overset{(s)}{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^s) \in R^s$.

Для простоты докажем равенство (18) для первых координат векторов $\overset{(s)}{x}_n$ и x_n. При $n = 1$ имеем

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_1^1 = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{s} a_{1j}(0) x_0^j = x_1^1,$$

причем $\| \overset{(s)}{x}_1 \| \le \| A(0) \| \| x_0 \|$ равномерно по $s \in Z^+$.

Аналогично получаем равенство

$$\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_2^1 = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(1) \overset{(s)}{x}{}_1^j, \tag{19}$$

где при $j > s$ положено $\overset{(s)}{x}{}_1^j = 0$.

Поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(1) \overset{(s)}{x}{}_1^j$ мажорируется числовым сходящимся рядом $\| A(0) \| \| x_0 \| \sum_{j=1}^{\infty} \| a_{1j}(1) \|$, то он сходится равномерно по $s \in Z^+$. Тогда из (19) следует, что $\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}{}_2^1 = x_2^1$, причем $\| \overset{(s)}{x}_2 \| \le \| A(0) \| \| A(1) \| \| x_0 \|$ равномерно по $s \in Z^+$.

Методом полной математической индукции убеждаемся в справедливости равенства (18) при всех $n \in Z^+$, причем равномерно по $s \in Z^+$

$$\| \overset{(s)}{x}_n \| \le \| x_0 \| \prod_{\alpha=0}^{n-1} \| A(\alpha) \|.$$

Но при всех $s \in Z$ $\overset{(s)}{y}_n = \overset{(s)}{T}{}^{-1}(n) \overset{(s)}{x}_n$, где $\overset{(s)}{y}_n$ — решение уравнения (16). В координатной форме, полагая $\overset{(s)}{T}{}^{-1}(n) = [t_{ij}^{(s)}]_{i,j=1}^{s}$, получаем

$$\overset{(s)}{y}{}_n^p = \sum_{i=1}^{\infty} t_{pi}^{(s)}(n) \overset{(s)}{x}{}_n^i \quad (p \in Z^+,\ t_{pi}^{(s)}(n) \overset{(s)}{x}{}_n^i = 0 \ \text{ при } \ i > s,\ p > s). \tag{20}$$

Последний ряд сходится равномерно по $s \in Z$, ибо он мажорируется числовым рядом

$$\left(\prod_{\alpha=0}^{n-1} \| A(\alpha) \| \right) \| x_0 \| \sum_{i=1}^{\infty} | t_{pi}^{(s)}(n) |, \quad n \in Z^+,$$

а последовательность матриц $\{ \overset{(s)}{T}{}^{-1}(n) \}$ правильная.

Это приводит к тому, что при $s \to \infty$ последовательность $\{\overset{(s)}{y_n}\}$ покоординатно сходится к вектору $y_n = T^{-1}(n)x_n$ при любом $n \in Z^+$, где матрица $T^{-1}(n)$ обратная по отношению к матрице $T(n) = \lim\limits_{s\to\infty} \overset{(s)}{T}(n)$.

Остается показать, что матричная последовательность $\{\overset{(s)}{B}\}$ покоординатно сходится к матрице $B \in \mathcal{B}$. Действительно, при всех $n \in Z^+$ $\overset{(s)}{B} = \overset{(s)}{T}{}^{-1}(n+1)\overset{(s)}{A}(n)\overset{(s)}{T}(n)$. Поскольку $\overset{(s)}{B}$ — постоянные матрицы при $s \in Z^+$, то положим

$$\overset{(s)}{B} = \overset{(s)}{T}{}^{-1}(n^0+1)\overset{(s)}{A}(n^0)\overset{(s)}{T}(n^0). \tag{21}$$

Условие (17) гарантирует усиленную правильность матричной последовательности $\{\overset{(s)}{A}(n^0)\}$, $s \in Z^+$. Поскольку произведение правильной последовательности на усиленно правильную является правильной последовательностью [1], то из (21) следует, что последовательность $\{\overset{(s)}{B}\}$ правильная. Последнее означает, что она покоординатно сходится к некоторой матрице B. Обратимость и ограниченность матрицы B легко доказывается.

Очевидно, матрица $T(n)$ $2N$-периодическая, если матрицы $\overset{(s)}{T}(n)$ имеют это свойство при всех $s \in Z^+$.

***Замечания.* 1.** Утверждение теоремы 4 остается в силе, если индекс s, фигурирующий в ее условии, принимает значения $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$, где $m_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$.

2. Теорему 4 можно распространить на всю числовую прямую $(-\infty, +\infty)$. Для этого достаточно дополнительно потребовать, чтобы матричная последовательность $\{\overset{(s)}{A}{}^{-1}(n)\}$, $s \in Z^+$, была правильной для всех $n \in Z$. При этом ход доказательства сохраняется, но при $n \in Z^-$ ряд (20) будет мажорироваться сходящимся числовым рядом

$$\left(\prod_{\alpha=n}^{-1} A^0(\alpha)\right)\|x_0\| \sum_{i=1}^{\infty} |t_{pi}^{(s)}(n)|,$$

где $\|\overset{(s)}{A}{}^{-1}(n)\| \le A^0(n)$, $n \in Z$.

1. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 194–201.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. *Теплинский Ю. В., Лучик В. Е.* О приводимости дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1376–1382.
4. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. –246 с.

Получено 07.10.94