УДС 517.946.9

Ю. А. Митропольский,
А. А. Березовский (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. Х. Шхануков (Кабардино-Балк. ун-т, НИИ ПМА, Нальчик)

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

For thermal and diffusional process in active media which are described by nonlinear evolution equations, effects of spatial localization and stabilization in finite time are studied.

Досліджені ефекти просторової локалізації та стабілізації за скінченний час для теплових та дифузійних процесів в активних середовищах, що описуються нелінійними еволюційними рівняннями.

При решении ряда насущных проблем естествознания, в частности медицины и экологии, возникает необходимость исследования нового типа эволюционных задач со свободными границами для нелинейного уравнения $\operatorname{div}(\psi(u)\operatorname{grad} u) - u_t = f(u)$ [1]. Это уравнение рассматривается в области $\Omega(t) \subset D \subset R^n$, $n = 1, 2, 3$, часть $S(t)$ границы которой задана, а остальная часть $\Gamma(t)$ априори неизвестна и должна быть определена вместе с решением дифференциального уравнения по дополнительному краевому условию на этой границе.

1. Постановка задачи. В общем случае требуется определить $u(x, t)$, $x \in \Omega(t)$, $t > 0$ и $\Gamma(t)$: $\Phi(x, t) = 0$, $t > 0$, такие, что

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot (\psi(u) \nabla u) - u_t = f(u), \quad x \in \Omega(t) \equiv \{u > 0\}, \quad t > 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega(0), \\
\psi(u) \nabla_n u - \alpha u = -\varphi(x, t), \quad x \in S(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap \partial D, \quad t > 0, \\
u = 0, \quad \psi(u) \nabla_n u = 0, \quad x \in \Gamma(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap D, \quad t > 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\nabla \cdot = \operatorname{div}$, а $\nabla = \operatorname{grad}$; $\nabla_n = \partial \backslash \partial n$, n — орт внешней нормали к $\partial\Omega(t)$; $\Omega(t)$ — область, ограниченная известной поверхностью $S(t)$ и неизвестной $\Gamma(t)$; α, φ, u_0 — заданные неотрицательные функции координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t; $\psi(u)$, $f(u)$ — заданные непрерывно дифференцируемые при $u > 0$ ограниченные функции, $\psi(u) \geq 0$, $f(u) \geq 0$, $u > 0$, $f(+0) = 0$; $\Gamma(t)$ — подлежащая определению поверхность нулевого уровня $u(x, t) = 0$; D — некоторая область R^n, содержащая $\Omega(t)$ при любом значении t.

По смыслу соответствующих физических явлений эволюции происходят в ограниченной области $\Omega(t) \subset D \subset R^n$, изменяющейся во времени с конечной скоростью. Вне $\Omega(t)$ искомая функция $u(x, t) \equiv 0$ для всех $t > 0$ и поэтому продолженное по непрерывности в D решение $u = u(x, t)$ имеет характер волны, фронт которой $\Gamma(t)$: $u(x, t) = 0$ распространяется по постоянному невозмущенному фону с конечной скоростью. Существование в общем случае обобщенных решений волнового типа налагает определенные ограничения на характер поведения функций $\psi(u)$ и $f(u)$ вблизи $u = 0$. Если σ и β — порядки малости этих функций в нуле: $\psi(u) \equiv O(u^\sigma)$, $f(u) \equiv O(u^\beta)$, то необходимо, чтобы $\beta - \sigma < 1$, $\sigma > 0$, $\beta \geq 0$ и, кроме того, должен существовать интеграл [2 – 4]

$$\int_0^{\bar{u}} \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{\int_0^u f(v)\psi(v)\,dv}} < \infty, \quad \bar{u} = \text{const}, \tag{2}$$

определяющий максимальный размер носителя решения. При $\psi(0) \neq 0$ параметр $\sigma = 0$, а параметр $\beta \in [0, 1)$.

В реальных физических процессах, описываемых решением поставленных задач со свободными границами, искомое поле $u(x, t)$ есть положительная функция, $\varphi(x, t)$ — монотонная функция t, а $\Omega(t)$ — расширяющаяся область, которая может вырождаться при $t = 0$, $\operatorname{mes}\Omega(0) = 0$.

Под классическим решением задачи (1) будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую положительную функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнениям (1) и достаточно гладкую поверхность $\Gamma(t)$, определяемую как поверхность нулевого уровня этой функции: $u(x, t) = 0$. Вопросы существования, единственности, положительности, монотонности и гладкости таких решений до настоящего времени практически не рассматривались.

2. Стационарная задача. Если порождающая решение функция $\varphi(x, t)$ при $t \to \infty$ преобразуется в функцию $\varphi(x)$, то и $u(x, t)$ преобразуется в $u(x)$, а $S(x, t)$, $\Omega(x, t)$ и $\Gamma(x, t)$ преобразуются соответственно в S, $\Omega \equiv \{ u(x) > 0 \}$ и $\Gamma \equiv \{ u(x) = 0 \}$. Для определения u и Γ получаем стационарную задачу

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot (\psi(u) \nabla u) = f(u), \quad x \in \Omega, \\
\psi(u) \nabla_n u - \alpha u = -\varphi(x), \quad x \in S, \\
u = 0, \quad \psi(u) \nabla_n u = 0, \quad x \in \Gamma(t) \equiv \partial\Omega \cap D.
\end{gathered} \tag{3}$$

Эта задача допускает вариационную формулировку, не содержащую в постановке свободной границы Γ. Исследованию такого рода задач методами вариационных неравенств посвящена обширная литература (см., например, [5]).

3. Одномерные задачи со свободной границей. Ниже мы ограничимся рассмотрением соответствующих одномерных задач вида (1) и (3), когда искомая функция зависит только от одной пространственной координаты и времени, а свободная граница вырождается в точку $x = s(t)$. В этом случае для определения пары функций $u = u(x, t)$, $x_0 < x < s(t)$, и $s = s(t)$, $t > 0$, получаем следующую задачу со свободной границей для одномерного эволюционного уравнения [6 – 14]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1}\psi(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), \quad x_0 \leq x \leq s(0), \\
\psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u = -\varphi(t), \quad x = x_0, \\
u = 0, \quad \psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $n = 1, 2, 3$ соответственно при плоской, цилиндрической и сферической симметрии решения задачи; x — расстояние от плоскости, оси или точки; $x_0 = 0$ при $n = 1$ и отлично от нуля при $n = 2; 3$.

Соответствующая (4) стационарная задача упрощается к виду

$$\begin{gathered}
\frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\psi(u)\frac{du}{dx}\right) = f(u), \quad x_0 < x < s, \\
\psi(u)\frac{du}{dx} - \alpha u = -\varphi, \quad x = x_0,
\end{gathered} \tag{5}$$

$$u = 0, \quad \psi(u)\frac{du}{dx} = 0, \quad x = s.$$

4. Пространственная локализация. В простейшем случае $n = 1$, $x_0 = 0$ дифференциальное уравнение задачи (5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\psi(u)\frac{du}{dx}\right)^2 = \psi(u)f(u), \tag{6}$$

а после интегрирования с учетом второго из краевых условий при $x = s$ получаем

$$\psi(u)\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2\int_0^u \psi(v)f(v)dv}. \tag{7}$$

Выбирая в (7) знак минус, соответствующий монотонно убывающему решению, находим

$$\frac{\psi(u)du}{\sqrt{2\int_0^u \psi(v)f(v)dv}} = -dx. \tag{8}$$

Далее, полагая $u(0) = \bar{u}$, $x(\bar{u}) = 0$ и интегрируя второй раз, получаем

$$x(u) = \int\limits_u^{\bar{u}} \frac{\psi(u)du}{\sqrt{2\int_0^u \psi(v)f(v)dv}}. \tag{9}$$

Для определения постоянной $\bar{u}$ воспользуемся оставшимся неучтенным краевым условием (5) при $x = x_0 = 0$. С учетом (7) это приводит к нелинейному уравнению относительно $\bar{u}$:

$$\sqrt{2\int\limits_0^{\bar{u}} \psi(v)f(v)dv} + \alpha\bar{u} - \varphi = 0, \tag{10}$$

имеющему, как нетрудно установить, единственный положительный корень. Свободная граница $x = s$ при этом находится по решению (9) при $u = 0$:

$$s = x(0) = \int\limits_0^{\bar{u}} \frac{\psi(u)du}{\sqrt{2\int_0^u \psi(v)f(v)dv}}. \tag{11}$$

Если третье краевое условие в (5) заменить условием Дирихле

$$u(0) = \bar{u}, \tag{5$'$}$$

то отпадет необходимость в решении уравнения (10), так как $\bar{u}$ уже задано. Формально переход к условию (5′) можно осуществить, полагая $\varphi = \alpha\bar{u}$ и затем переходя в (5) и (10) к пределу при $\alpha \to \infty$.

5. Стабилизация за конечное время. Представляет интерес эволюция пространственно-локализованного начального распределения $u(x, 0) = u_0(x)$, когда $\varphi(t) \equiv 0$ для любого $t \geq 0$. В качестве последнего может быть принято точное решение (9) – (11) стационарной задачи.

Для конкретных функциональных зависимостей $\psi(u) = u^\sigma$, $f(u) = u^\beta$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, интегралы в (9) – (11) вычисляются, и мы получаем

$$x(u) = \frac{\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}{1+\sigma-\beta}\left(\bar{u}^{(1+\sigma-\beta)/2} - u^{(1+\sigma-\beta)/2}\right) = s\left[1 - \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^{(1+\sigma-\beta)/2}\right], \tag{12}$$

где

$$s = \frac{\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}{1+\sigma-\beta}\,\overline{u}^{(1+\sigma-\beta)/2}, \tag{13}$$

а $\overline{u}$ — положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{1+\sigma-\beta}}\,\overline{u}^{(1+\sigma-\beta)/2} + \alpha\overline{u} - \varphi = 0. \tag{14}$$

Решая (12), находим

$$u(x) = \overline{u}\left(1-\frac{x}{s}\right)^{2/(1+\sigma-\beta)}; \quad 0 \le x \le s. \tag{15}$$

Выбирая в качестве начального распределения $u_0(x)$ это решение, для определения $u(x,t)$ получаем следующую одномерную задачу со свободной границей;

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - u^{\beta}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s(0) = s, \\
u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha u \quad (u=0,\ \alpha\to\infty), \quad x = 0, \quad t > 0, \\
u = 0, \quad u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $u_0(x)$ и s определяются согласно (15) и (13).

Если ограничиться рассмотрением среднего по $x \in [0, s(t)]$ решения этой задачи

$$u(t) = \frac{1}{s(t)}\int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx, \tag{17}$$

то при определенных допущениях можно прийти к задаче Коши для дифференциального неравенства

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} \le -\alpha u - u^{\beta}, \quad t > 0, \\
u(0) = u_0,
\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$u_0 = \frac{1}{s}\int_0^s u(x)\,dx = \frac{1+\sigma-\beta}{3+\sigma-\beta}\,\overline{u}.$$

Разделяя переменные в дифференциальном неравенстве (18) и выполняя интегрирование с учетом начального условия, находим

$$t \le \int_u^{u_0} \frac{du}{u^{\beta}(1+\alpha u^{1-\beta})}. \tag{19}$$

При $u \to 0$ этот несобственный интеграл существует, если $0 \le \beta < 1$. Соответствующее значение времени $t = T$ в случае $u = 0$ оценивается по формуле

$$T \le \int_0^{u_0} \frac{du}{u^{\beta}(1+\alpha u^{1-\beta})} < \infty. \tag{20}$$

Подобный подход в случае задачи Дирихле $(\alpha = \infty)$ для пространственно-однородного решения $u(t) \geq u(x, t)$ рассмотрен в работе [15], что позволило получить следующую оценку для времени стабилизации за конечное время:

$$T < \int_0^{\max u_0(x)} \frac{du}{f(u)} < \infty, \quad f(u) = O(u^\beta), \quad u \to 0, \quad 0 \leq \beta < 1. \tag{21}$$

Отметим, что эффект стабилизации за конечное время, обусловленный нелинейностью $f(u)$ задачи (16), имеет место только при эволюции начального распределения $u_0(x)$ к нулю. Если же начальное условие было нулевым, а решение порождается функцией $\varphi(t)$, становящейся постоянной после некоторого значения $t = t_0$: $\varphi(t) \equiv \varphi = \mathrm{const}$, $t \geq t_0$, то выход на стационарное решение при указанных ограничениях на $f(u)$ уже не осуществляется за конечный отрезок времени. Это следует из того, что в этом случае вместо (18) получается следующая задача Коши для дифференциального неравенства:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} \geq F(u), \quad t > 0, \\ u(0) = 0, \end{gathered} \tag{22}$$

где $F(u) = \varphi - \alpha u - u^\beta$. Стационарное решение здесь определяется как единственный положительный корень $\bar{u}$ уравнения $F(u) = 0$. Разделение переменных и интегрирование в (22) приводит к неравенству

$$t \leq \int_0^{u(t)} \frac{du}{F(u)}. \tag{23}$$

Для того, чтобы интеграл в этом неравенстве существовал при $u(t) \to \bar{u}$, необходимо, чтобы функция $F(u)$ при стремлении u к $\bar{u}$ имела гельдеровский порядок малости:

$$u \to \bar{u}, \Rightarrow F(u) - F(\bar{u}) = O[(\bar{u} - u)^\mu], \quad \mu < 1. \tag{24}$$

Нетрудно убедиться в том, что порядок малости для рассматриваемой функции липшицев: $\mu = 1$. Из этого следует, что интеграл в (23) при $u(t) \to \bar{u}$ не существует и, следовательно, стабилизация к стационарному решению осуществляется при $t \to \infty$.

Как оценка (21), полученная в приближении пространственно-однородного решения $u(x, t) \simeq u(t)$, так и оценка (20) для среднего по x решения $u(t)$ (17) не отражает всех параметров задачи. Проведенные численные расчеты [8] показывают, что эти оценки дают завышенные значения для времени стабилизации T. В связи с этим перейдем к получению более точных оценок.

6. Априорные оценки. Умножим дифференциальное уравнение (16) на $(u^{1+\sigma})_t$, проинтегрируем результат по x от 0 до $s(t)$:

$$\int_0^{s(t)} u_t (u^{1+\sigma})_t \, dx + \int_0^{s(t)} u^\beta (u^{1+\sigma})_t \, dx = \int_0^{s(t)} (u^\sigma u_x)_x (u^{1+\sigma})_t \, dx \tag{25}$$

и займемся преобразованием каждого из полученных интегралов. Для первого из них получаем

$$\int_0^{s(t)} u_t (u^{1+\sigma})_t \, dx = (1+\sigma) \int_0^{s(t)} u_t^2 (u^{\sigma/2})^2 \, dx = (1+\sigma) \| u_t^2 u^{\sigma/2} \|^2, \tag{26}$$

где

$$(u, v) = \int_0^{s(t)} uv \, dx, \quad \| u \|^2 = \int_0^{s(t)} u^2(x,t) dx.$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части (25) с учетом краевых условий, последовательно получаем

$$\int_0^{s(t)} (u^\sigma u_x)_x (u^{1+\sigma})_t \, dx = \frac{1}{1+\sigma} \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} (u^{1+\sigma})_t \, dx =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma} (u^{1+\sigma})_x (u^{1+\sigma})_t \Big|_0^{s(t)} - \frac{1}{2(1+\sigma)} \int_0^{s(t)} [(u^{1+\sigma})_x^2]_t \, dx =$$

$$= -\frac{\alpha(1+\sigma)}{1+\sigma} (u(0,t)) (u^{1+\sigma}(0,t))_t - \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} [(u^{1+\sigma})_x]^2 \, dx =$$

$$= -\frac{\alpha(1+\sigma)}{2+\sigma} \frac{d}{dt} (u^{2+\sigma}(0,t)) - \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \left\| (u^{1+\sigma})_x \right\|^2 =$$

$$= -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \left\| (u^{1+\sigma})_x \right\|^2 + \frac{\alpha(1+\sigma)}{2+\sigma} \frac{d}{dt} (u^{2+\sigma}(0,t)) \right\}. \tag{27}$$

В силу (26), (27) равенство (25) переписывается в виде

$$\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \left[\left\| (u^{1+\sigma})_x \right\|^2 + \frac{2(1+\sigma)^2}{2+\sigma} \alpha u^{2+\sigma}(0,t) \right] +$$

$$+ (1+\sigma) \| u_t u^{\sigma/2} \|^2 + (u^\beta, (u^{1+\sigma})_t) = 0. \tag{28}$$

Используя дифференциальное уравнение (16), преобразуем два последних слагаемых в (28):

$$(1+\sigma) \int_0^{s(t)} u_t^2 u^\sigma \, dx + \int_0^{s(t)} u^\beta (u^{1+\sigma})_t \, dx = (1+\sigma) \int_0^{s(t)} \left[\frac{1}{1+\sigma} (u^{1+\sigma})_{xx} - \right.$$

$$\left. - u^\beta \right]^2 u^\sigma \, dx + (1+\sigma) \int_0^{s(t)} \left[\frac{1}{1+\sigma} (u^{1+\sigma})_{xx} - u^\beta \right] u^\beta u^\sigma \, dx =$$

$$= (1+\sigma) \int_0^{s(t)} \left[\frac{1}{(1+\sigma)^2} ((u^{1+\sigma})_{xx})^2 - \frac{2}{1+\sigma} (u^{1+\sigma})_{xx} u^\beta + u^{2\beta} \right] u^\sigma \, dx +$$

$$+ (1+\sigma) \int_0^{s(t)} \left[\frac{1}{1+\sigma} (u^{1+\sigma})_{xx} u^\beta - u^{2\beta} \right] u^\sigma \, dx =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma} \int_0^{s(t)} [(u^{1+\sigma})_{xx}]^2 u^\sigma \, dx - \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} u^\beta u^\sigma \, dx. \tag{29}$$

Интегрируя по частям последний интеграл из (29) с учетом краевых условий, после ряда тождественных преобразований получаем цепочку равенств

$$-\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} u^{\sigma+\beta} dx = -(1+\sigma) \int_0^{s(t)} (u^{\sigma} u_x)_x u^{\sigma+\beta} dx =$$

$$= \alpha(1+\sigma) u^{1+\sigma+\beta}(0,t) + (1+\sigma) \int_0^{s(t)} (u^{\sigma} u_x)(u^{\sigma+\beta})_x dx =$$

$$= (1+\sigma)\alpha u^{1+\sigma+\beta}(0,t) + \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 \frac{(u^{\sigma+\beta})_x}{(u^{1+\sigma})_x} dx =$$

$$= (1+\sigma)\alpha u^{1+\sigma+\beta}(0,t) + \frac{\sigma+\beta}{1+\sigma} \int_0^{s(t)} \frac{(u^{1+\sigma})_x^2}{[(u^{1+\sigma})^2]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}} dx. \tag{30}$$

Далее, так как $u(s(t), t) = 0$, то, очевидно, что

$$u^{1+\sigma}(x,t) = -\int_x^{s(t)} [u^{1+\sigma}(x,t)]_x dx. \tag{31}$$

Возводя (27) в квадрат и используя неравенство Буняковского, имеем

$$(u^{1+\sigma}(x,t))^2 = \left(\int_x^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x dx \right)^2 \le (s(t)-x) \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 dx \le$$

$$\le s(0) \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 dx. \tag{32}$$

Интегрируя (28), приходим к неравенству Пуанкаре – Фридрихса

$$\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma}(x,t))^2 dx \le s^2(0) \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma}(x,t))_x^2 dx. \tag{33}$$

В силу (32) интеграл в правой части последнего равенства (30) оценивается следующим образом:

$$\frac{\sigma+\beta}{1+\sigma} \int_0^{s(t)} \frac{(u^{1+\sigma})_x^2}{[(u^{1+\sigma})^2]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}} dx \ge$$

$$\ge \nu_1 \left[\int_0^{s(t)} [(u^{1+\sigma}(x,t))_x]^2 dx \right]^{(1+2\sigma+\beta)/2(1+\sigma)}, \tag{34}$$

где

$$\nu_1 = \frac{\sigma+\beta}{(1+\sigma)[s(0)]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}.$$

На основании (34) для последних двух слагаемых равенства (28) получаем оценку

$$(1+\sigma)\| u_t u^{\sigma/2} \|^2 + (u^{\beta}, (u^{1+\sigma})_t) = \frac{1}{1+\sigma} \int_0^{s(t)} [(u^{1+\sigma}(x,t))_{xx}]^2 u^{\sigma} dx +$$

$$+\alpha(1+\sigma)u^{1+\sigma+\beta}(0,t)+\frac{\sigma+\beta}{1+\sigma}\int\limits_0^{s(t)}\frac{(u^{1+\sigma})_x^2}{[(u^{1+\sigma})^2]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}\,dx\ \geq$$

$$\geq\ \alpha(1+\sigma)u^{1+\sigma+\beta}(0,t)+\nu_1\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|^2\right]^{(1+2\sigma+\beta)/2(1+\sigma)}. \tag{35}$$

7. Дифференциальное неравенство. Подставляя неравенство (35) в (28), находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|(u^{1+\sigma})_x\right\|^2+\frac{2(1+\sigma)^2}{2+\sigma}\alpha u^{2+\sigma}(0,t)\right]+$$

$$+\alpha(1+\sigma)^2[u^{2+\sigma}(0,t)]^{(1+\sigma+\beta)/(2+\sigma)}+\nu[\|(u^{1+\sigma})_x\|^2]^{(1+2\sigma+\beta)/2(1+\sigma)}\leq 0, \tag{36}$$

где $\nu=(1+\sigma)\nu_1$.

При $\sigma=0$ неравенство (36) упрощается к виду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u_x\|^2+\alpha u^2(0,t)]+\alpha[u^2(0,t)]^{(1+\beta)/2}+$$

$$+\frac{\beta}{s(0)^{(1-\beta)/2}}[\|u_x\|^2]^{(1+\beta)/2}\leq 0. \tag{37}$$

Оно только усилится, если последние два слагаемых в (37) заменить на

$$\nu_1\|u_x\|^2+\alpha u(0,t)\geq\nu_0[\|u_x\|^2+\alpha u^2(0,t)], \tag{38}$$

где

$$\nu_0=\min\left(\frac{\sigma+\beta}{[s(0)]^{(1-\beta)/2}},1\right).$$

Далее, воспользовавшись элементарным неравенством

$$a^x+\alpha b^x\geq(a+\alpha b)^x,\quad \alpha>0,\quad b>0, \tag{39}$$

справедливым при $x\in(0,1)$, получаем

$$[\|u_x\|^2]^\kappa+\alpha[u^2(0,t)]^\kappa\geq[\|u_x\|^2+\alpha u^2(0,t)]^\kappa, \tag{40}$$

где $\kappa=(1+\beta)/2<1$.

8. Оценка для времени стабилизации за конечное время. В силу неравенств (38) и (40) из (37) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dy(t)}{dt}+2\nu_0[y(t)]^\kappa\leq 0 \tag{41}$$

для квадрата нормы

$$y(t)=\|u_x(x,t)\|^2+\alpha u^2(0,t). \tag{42}$$

Используя начальное распределение (15)

$$u(x,0)=\overline{u}\left(1-\frac{x}{s}\right)^{1/\kappa} \tag{43}$$

находим

$$y(0) = \frac{\bar{u}^2}{\kappa s} + \alpha\bar{u}^2 = (1 + \alpha\kappa s)\frac{\bar{u}^2}{\kappa s}, \tag{44}$$

где $\bar{u}$ — положительный корень уравнения (14):

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\,u^{\kappa} + \alpha u - \varphi = 0. \tag{45}$$

Решение задачи Коши (41), (44) для дифференциального неравенства записывается в виде

$$t \le -\frac{1}{2\nu_0}\int\limits_{y(0)}^{y(t)}\frac{dy}{y^{\kappa}} = \frac{1}{2\nu_0}\int\limits_{y(t)}^{y(0)}\frac{dy}{y^{\kappa}} = \frac{1}{2\nu_0(1-\kappa)}\left[y^{1-\kappa}(0) - y^{1-\kappa}(t)\right]. \tag{46}$$

Для времени стабилизации, т. е. того значения $t = T$, при котором $y(T) = 0$, из (46) и (44) получаем выражение

$$T \le \frac{1}{1-\beta}\,y^{(1-\beta)/2}(0) = \left[\frac{2}{(1+\beta)s(0)}\left(1 + \alpha\,\frac{1+\beta}{2}\,s(0)\right)\right]^{(1-\beta)/2}\bar{u}^{1-\beta}, \tag{47}$$

где

$$s(0) = \frac{1}{1-\beta}\sqrt{2(1+\beta)}\,\bar{u}^{(1-\beta)/2}. \tag{48}$$

Из условия $y(T) = 0$, т. е. согласно (42)

$$\|\,u_x(x,T)\,\|^2 + \alpha u^2(0,T) = 0, \tag{49}$$

следует $u(0,T) = 0$.

Итак, в случае $\sigma = 0$, когда $u^{\sigma} = 1$ — дифференциальное уравнение и краевые условия в (16) линейны, формула (47) позволяет оценить время стабилизации. В отличие от оценок (20) и (21) она содержит все параметры задачи, включая начальное распределение $u_0(x)$ и его носитель $s = s(0)$.

При получении соответствующей оценки для случая $\sigma > 0$ возникают затруднения, связанные с необходимостью уравнивания показателей степени при $\|\,(u^{1+\sigma})_x\,\|$ и $u^{2+\sigma}(0,t)$ в (36). Если положить $\sigma = 0$ только в краевых условиях рассматриваемых задач, сохранив его в дифференциальных уравнениях, то оба показателя оказываются равными

$$\kappa = \frac{1+2\sigma+\beta}{2(1+\sigma)}, \quad \beta - \sigma \le 1, \;\Rightarrow\; \kappa < 1.$$

При этом

$$\nu_0 = \min\left(\frac{\sigma+\beta}{[s(0)]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}},\, 1\right),$$

$$y(t) = \|\,[u^{1+\sigma}(x,t)]_x\,\|^2 + \alpha(1+\sigma)^2u^{2(1+\sigma)}(0,t), \tag{50}$$

сохраняется дифференциальное неравенство (41) и незначительно изменяется начальное условие (44).

1. *Березовский А. А.* Классические и специальные постановки задач Стефана // Нестационар-

ные задачи Стефана. – Киев, 1988. – С. 3–20. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
2. *Мартинсон Л. К.* О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1976. – **16**, № 5. – С. 1233–1241.
3. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Там же. – 1974. – **14**, № 4. – С. 891–905.
4. *Березовский А. А.* Пространственная локализация криовоздействия на биологические ткани // Пространственная локализация в задачах Стефана. – Киев, 1987. – С. 3–12. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 87.60).
5. *Фридман А.* Вариационные принципы в задачах со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
6. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1987. – Вып. 7. – С. 50–60.
7. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2-х ч. – Киев: Наук. думка, 1976. – Ч. 1. – 452 с.; Ч. 2. – 292 с.
8. *Березовский А. А., Ивахненкова В. В., Андреева Т. А.* Численно–аналитическая реализация пространственно локализованных и стабилизирующихся за конечное время решений нелинейного эволюционного уравнения // Нелинейные задачи диффузии и сложного теплообмена. – Киев, 1990. – С. 1–18. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 90.42).
9. *Mitropolsky Yu. A., Berezovsky A. A., Berezovsky S. A.* Free boundary problems for nonlinear evolution equations in metallurgy, medicine and ecology. – Kiev, 1994. – 54 p. – (Preprint / Nat. Acad. Scien. Ukraine. Math. Inst.; 94.20).
10. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Плотницкий Т. А.* Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 67–76.
11. *Березовская Л.М., Березовский А. А., Жураев К. О.* Основные уравнения осесимметричной гипотермии и криодеструкции биоткани // Задачи Стефана со свободными границами. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 5–8.
12. *Березовский А. А., Плотницкий Т. А., Андреева Т. А.* Задачи Стефана в проблемах криовоздействия на биоткани. – Киев, 1988. – 64 с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 88.71).
13. *Березовский С. А., Ивахненкова В. В.* Временная локализация решения одномерных задач диффузии с реакцией // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их прил. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 22–25.
14. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Кудаева Ф. Х.* Задачи со свободной границей в криохирургии // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1993. – Вып. 18 (52). – С. 87–95.
15. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – 42, вып. 2(254). – С. 135–164.

Получено 09.08.95