УДК 517.5

М. М. Шеремета (Львів. ун-т)

ПРО ВЛАСНІ ЧИСЛА ОПЕРАТОРА ФРЕДГОЛЬМА

We prove that, if $\omega\left(t, x, K_2^{(m)}\right) \le c(x)\omega(t)$ for all $x \in [a, b]$ and $t \in [0, b-a]$, where $c \in L^1(a, b)$ and ω is a modulus of continuity, then $\lambda_n = O\left(n^{-m-1/2}\omega(1/n)\right)$, $n \to \infty$, and this estimate can not be improved.

Доведено, що коли $\omega\left(t, x, K_2^{(m)}\right) \le c(x)\omega(t)$ для всіх $x \in [a, b]$ і $t \in [0, b-a]$, де $c \in L^1(a, b)$, а ω — деякий модуль неперервності, тоді $\lambda_n = O\left(n^{-m-1/2}\omega(1/n)\right)$, $n \to \infty$, причому цю оцінку не можна покращити.

1. Вступ. Нехай $\Omega = (a, b) \times (a, b)$, $K(x, y) \in C(\Omega)$, а $\{\lambda_n\}$ — множина власних чисел оператора

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy, \quad -\infty < a < b < +\infty,$$

який діє в $L^2(a, b)$. Будемо вважати, що множина $\{\lambda_n\}$ нескінченна; і пронумеруємо послідовність (λ_n) так, щоб $|\lambda_n| \ge |\lambda_{n+1}|$. Відомо ([1], розд. 11, § 6), що $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, звідки випливає, що $|\lambda_n| = o(1/\sqrt{n})$, $n \to \infty$.

Через $K_2^{(m)}(x, y)$ позначимо частинну похідну функції $K(x, y)$ за другою змінною y порядку m, і нехай

$$\omega\left(t, x, K_2^{(m)}\right) = \sup\left\{\left|K_2^{(m)}(x, y_1) - K_2^{(m)}(x, y_2)\right| : |y_2 - y_1| \le t,\ (y_1, y_2) \in [a, b]^2\right\}$$

— модуль неперервності $K_2^{(m)}$ як функції змінної y. Всюди далі вважатимемо, що $K_2^{(m)} \in C(\overline{\Omega})$, $c = c(x) \in L^1(a, b)$, а $\omega(t)$ — деякий модуль неперервності, тобто неперервна неспадна напівадитивна на $[0, b-a]$ функція така, що $\omega(0) = 0$. Така функція ω називається правильно змінною, якщо існує $\alpha \in [0, +\infty]$ таке, що $\omega(\mu t)/\omega(t) \to \mu^{\alpha}$, $t \to 0+$, для кожного $\mu > 0$.

А. М. Сєдлецький [2] показав, що коли модуль неперервності ω є правильно змінною функцією і

$$\omega\left(t, x, K_2^{(m)}\right) \le c(x)\omega(t) \tag{1}$$

для всіх $x \in [a, b]$ і $t \in [0, b-a]$, тоді

$$|\lambda_n| = O\left(n^{-m-1/2}\omega(1/n)\right), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Правильна зміна модуля неперервності ω означає [2], що $\omega(t) = t^{\alpha} l(t)$, де $\alpha \in [0, 1]$, а l — повільно змінна функція, тобто $l(2t) \sim l(t)$ при $t \to 0+$. Виникає природне питання, чи в теоремі А. М. Сєдлецького умова правильного зростання не є зайвою. Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1. *Який би не був модуль неперервності* ω, *з умови* (1) *випливає співвідношення* (2).

Можемо вважати модуль неперервності ω неперервно диференційовною функцією, оскільки в умові (1) функція $c \in L^1(a, b)$ довільна, а (2) містить $O(1)$. На непокращуваність оцінки (2) вказує така теорема.

Теорема 2. *Для кожного модуля неперервності* ω *такого, що*

$$0 < \varliminf_{t \to 0+} \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} \le \varlimsup_{t \to 0+} \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} < 1, \tag{3}$$

існують функції $K \in C(\overline{\Omega})$, $c \in L^1(a, b)$ *і стала* $p > 0$ *такі, що* $K_2^{(m)} \in$ $\in C(\overline{\Omega})$, *виконується умова* (1) *і*

$$|\lambda_n| = p n^{-m-1/2} \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

При доведенні теорем 1 і 2 будемо використовувати результати і методи з [2], а також методику максимального члена. В кінці статті будуть сформульовані нерозв'язані задачі.

2. Доведення теореми 1. Для спрощення викладок, на зменшуючи загальності, будемо вважати, що $a = 0$ і $b = 1$. Оскільки модуль неперервності ω є неспадною неперервною функцією, то функція $\eta(t) = t^{m+1/2}\omega(t)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, є зростаючою, неперервною і невід'ємною на $[0, 1]$. Тому існує обернена до η функція φ, яка є невід'ємною, неперервною і зростаючою на $[0, \omega(1)]$. Ясно, що $\varphi(0) = 0$, причому в околі точки 0 виконується нерівність $\eta(t) \ge t^{m+1/2}$ і, отже, $\varphi(x) \le x^{2/(m+1)}$. Тому функція

$$\Phi(r) = \int_{1/r}^{\omega(1)} \frac{dx}{x\varphi(x)}$$

є додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $[1/\omega(1), +\infty)$.

Доведемо спочатку, що

$$|\lambda_n| \Phi^{-1}(n) = O(1), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Нехай $\{x_i\}_{i=1}^n$ — довільна множина точок з $(0, 1)$, а

$$\det K(x_i, x_j)_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \ldots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \ldots & K(x_2, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \ldots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix},$$

$$\delta_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left(\det K(x_i, x_j)_{i,j=1}^n\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Фредгольм [3] показав, що функція

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\delta_n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

є цілою, а її нулі z_n мають властивість таку, що $z_n = 1/\lambda_n$, де λ_n — власні числа оператора K. Отже, щоб одержати оцінку (5), необхідно оцінити $r_n =$ $= |z_n|$ знизу.

Нехай $n(r) = \sum_{r_n \le r} 1$ — рахуюча функція нулів функції F, а $M_F(r) =$ $= \max\{|F(z)|: |z| = r\}$. Тоді за нерівністю Йенсена [4, с. 60]

$$n(r) \le \ln M_F(er), \quad r \ge 0. \tag{6}$$

В [2] показано, що з умов, накладених на функції K і c, і нерівності (1) випливає

$$|\delta_n| \le B^n n^{-(m-1/2)n} \omega^n(1/n), \quad n \in \mathbb{N},$$

де $B \equiv \text{const}$ (яким би не був модуль неперервності ω). Тому, використовуючи формулу Стірлінга, маємо

$$M_F(er) \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} |\delta_n| (er)^n \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (Bn^{-m+1/2}\omega(1/n))^n n^{-n} e^n (er)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (n^{-m-1/2}\omega(1/n))^n (2Be^2 r)^n \le 1 + 2\mu(2Be^2 r), \tag{7}$$

де $\mu(r)$ — максимальний член ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-m-1/2}\omega(1/n))^n r^n. \tag{8}$$

Нехай

$$\nu(r) = \max\{n \ge 1: (n^{-m-1/2}\omega(1/n))^n r^n = \mu(r)\}$$

— центральний індекс ряду (8). Якщо $n^{-m-1/2}\omega(1/n) r \le 1$, то n-й член ряду (8) не перевищує 1 і, оскільки $\mu(r) \to \infty$ $(r \to \infty)$, маємо $\nu(r)^{-m-1/2} \times \omega(1/\nu(r)) r > 1$. Звідси одержуємо

$$\frac{1}{r} < (1/\nu(r))^{m+1/2} \omega(1/\nu(r)) = \eta(1/\nu(r)),$$

тобто $\nu(r) < 1/\varphi(1/r)$. Враховуючи тепер рівність

$$\ln\mu(r) = \ln\mu\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) + \int_{1/\omega(1)}^{r} \frac{\nu(t)}{t} dt, \quad \frac{1}{\omega(1)} \le r < \infty,$$

маємо

$$\ln\mu(r) \le \int_{1/\omega(1)}^{r} \frac{dt}{t\varphi(1/t)} + \ln\mu\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) = \int_{1/r}^{\omega(1)} \frac{dx}{x\varphi(x)} + \ln\mu\left(\frac{1}{\omega(1)}\right). \tag{9}$$

Оскільки функція $\ln\mu(r)$ є опуклою відносно $\ln r$, то яке б не було число $a > 0$, існує число $b \ge 1$ таке, що $\ln\mu(r) + a \le \ln\mu(br)$. Тому з нерівностей (6), (7) і (9) випливає

$$n(r) \le \ln(1 + 2\mu(2Be^2 r)) \le \ln 4 + \ln\mu(2Be^2 r) =$$

$$= \ln\mu(2Be^2 r) + \ln\mu(1/\omega(1)) + \ln 4 - \ln\mu(1/\omega(1)) \le$$

$$\le \ln\mu(B^* r) - \ln\mu\left(\frac{1}{\omega(1)}\right) \le \int_{1/B^* r}^{\omega(1)} \frac{dx}{x\varphi(x)} = \Phi(B^* r),$$

де $2Be^2 \le B^* < \infty$. Якщо в цій нерівності візьмемо $r = r_n$, то будемо мати нерівність $n \le \Phi(B^* r_n)$, тобто $|\lambda_n| \Phi^{-1}(n) = (1/r_n)\Phi^{-1}(n) \le B^*$, і отже, співвідношення (5) справджується.

Доведемо оцінку (2). Оскільки модуль неперервності ω є півадитивною функцією, тобто $\omega(x+y) \le \omega(x) + \omega(y)$, то $\omega(2x) \le 2\omega(x)$. Покладемо $f(x) = 1/\omega(1/x)$. Тоді функція f неперервно диференційовна на $[1, +\infty)$ (оскільки за припущенням такою є функція ω), неспадна до ∞ і задовольняє нерівність $f(2x) \le 2f(x)$. Звідси випливає, що f є RO-змінною функцією [5, с. 86], і за теоремою II.I з [5, с. 87] її можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \exp\left\{\delta^*(x) + \int_1^x \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt\right\},$$

де, як видно з доведення цієї теореми, функції $\delta^*(x)$ і $\varepsilon^*(t) \ge 0$ є неперервними і обмеженими на $[1, +\infty)$. Звідси маємо

$$\omega(t) = \exp\left\{-\delta(t) - \int_t^1 \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\} = e^{-\delta(t)}\omega_1(t),$$

де функції $\delta(t) = \delta^*(1/t)$ і $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(1/x) \ge 0$ є неперервними і обмеженими на $(0, 1]$. Отже,

$$\eta(t) = r^{m+1/2}\omega_1(t)e^{-\delta(t)} = \eta_1(t)e^{-\delta(t)}.$$

Легко бачити, що функція ω_1 неспадна і, отже, функція η_1 зростаюча. Нехай φ_1 — функція, обернена до η_1. Тоді

$$\varphi(x) = \varphi_1(xe^{\delta(\varphi(x))}) = \varphi_1(Ax),$$

де $A \in (1, +\infty)$ — деяка стала. Тому

$$\Phi(r) \ge \int_{1/r}^{\omega(1)} \frac{dx}{x\varphi_1(Ax)}.$$

Оскільки $d\ln\omega_1(t)/d\ln t = \varepsilon(t) = O(1)$, $t \to 0+$, то існує число $q \in (1, +\infty)$ таке, що $d\ln\eta_1(t)/d\ln t \le q$ і тому $d\ln\varphi_1(Ax)/d\ln x \ge 1/q$ для всіх $x \in (0, \omega(1))$. Звідси випливає

$$\ln\varphi_1(Ax) - \ln\varphi_1(Axq^{-q}) = \int_{xq^{-q}}^{x} \frac{d\ln\varphi_1(At)}{d\ln t} d\ln t \ge \frac{1}{q}\int_{xq^{-q}}^{x} \frac{dt}{t} = \ln q,$$

тобто $\varphi_1(Ax)/q \ge \varphi_1(Axq^{-q})$ і, отже,

$$\Phi(r) \ge \int_{1/r}^{\omega(1)} \frac{\varphi_1(Ax)}{Ax\varphi_1'(Ax)} \frac{A\varphi_1'(Ax)}{\varphi_1^2(Ax)} dx \ge$$

$$\ge \frac{1}{q}\int_{1/r}^{\omega(1)} d\left(-\frac{1}{\varphi_1(Ax)}\right) = \frac{1}{q}\frac{1}{\varphi_1(A/r)} \ge \frac{1}{\varphi_1(Aq^{-q}/r)}.$$

З цієї нерівності одержуємо

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(x)} \le \frac{1}{A} q^q \eta_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{A} q^q \eta\left(\frac{1}{x}\right) e^{\delta(1/x)} \le Q\eta\left(\frac{1}{x}\right) = Qx^{-m-1/2}\omega\left(\frac{1}{x}\right), \tag{10}$$

де $Q > 1$ — стала. Тому з (5) випливає (2). Теорема 1 доведена.

3. Доведення теореми 2.

Лема 1 [6, с. 319–320]. *Нехай стала* $c > 0$ *і*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ick\ln k} e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді існує додатна стала Q_1 *така, що для всіх* $x \in \mathbb{R}$, $h \in [0, 1]$ *і* $n \in \mathbb{N}$ *виконуються нерівності*

$$|s_n(x)| \le Q_1\sqrt{n}, \tag{11}$$

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| \le Q_1 hn\sqrt{n}. \tag{12}$$

Лема 2. *Нехай стала* $c > 0$, *а* ψ — *додатна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[1, +\infty)$ *функція така, що*

$$\frac{1}{2} < \varliminf_{x \to +\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} \le \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} < \frac{3}{2}. \tag{13}$$

Тоді ряд Фур'є

$$k(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(n)} e^{icn\ln n} e^{inx} \tag{14}$$

рівномірно збіжний і для всіх $x \in \mathbb{R}$ *і* $h \in [0, 1]$ *справедлива нерівність*

$$| k(x+h) - k(x) | \le \frac{Q_2 h^{-1/2}}{\psi(1/h)}, \quad Q_2 \equiv \text{const} > 0. \tag{15}$$

Доведення. З першої умови (13) випливає існування додатного числа γ такого, що для всіх досить великих x виконується нерівність $\psi(x) \ge x^{1/2+\gamma}$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(n)\sqrt{n}} < \infty. \tag{16}$$

Нехай $S_n(x)$ — часткова сума ряду (14). Тоді, завдяки (11), для всіх $p \in \mathbb{N}$ і $q \in \mathbb{N}$ маємо

$$| S_q(x) - S_p(x) | = \left| \sum_{n=p+1}^{q} \frac{s_n(x) - s_{n-1}(x)}{\psi(n)} \right| =$$

$$= \left| -\frac{s_p(x)}{\psi(p+1)} + \sum_{n=p+1}^{q-1} \left(\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right) s_n(x) + \frac{s_q(x)}{\psi(q)} \right| \le$$

$$\le Q_1 \left(\frac{\sqrt{p}}{\psi(p+1)} + \sum_{n=p+1}^{q-1} \left(\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right) \sqrt{n} + \frac{\sqrt{q}}{\psi(q)} \right) =$$

$$= Q_1 \left(\frac{2\sqrt{p}}{\psi(p+1)} + \sum_{n=p+1}^{q} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\psi(n)} \right) \le Q_1 \left(\frac{2\sqrt{p}}{(p+1)^{1/2+\gamma}} + \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{\psi(n)\sqrt{n}} \right).$$

Звідси і з (16) випливає рівномірна збіжність ряду (14).

Оскільки

$$S_q(x) = \sum_{n=1}^{q-1} \left(\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right) s_n(x) + \frac{s_q(x)}{\psi(q)}$$

і

$$\frac{|s_q(x)|}{\psi(q)} \le Q_1 \frac{\sqrt{q}}{\psi(q)} \to 0 \quad (q \to \infty),$$

то, переходячи до границі, маємо

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right) s_n(x).$$

Тому, використовуючи (11) і (12), для довільного $N \in \mathbb{N}$ одержуємо нерівність

$$|k(x+h)-k(x)| \le \left(\sum_{n=1}^{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}\right)\left(\frac{1}{\psi(n)}-\frac{1}{\psi(n+1)}\right)|s_n(x+h)-s_n(x)| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{\psi(n)}-\frac{1}{\psi(n+1)}\right)Q_1 hn\sqrt{n} + \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{\psi(n)}-\frac{1}{\psi(n+1)}\right)2Q_1\sqrt{n} =$$

$$= Q_1 h\left(\frac{1}{\psi(1)}+\sum_{n=2}^{N-1}\frac{n\sqrt{n}-(n-1)\sqrt{n-1}}{\psi(n)}-\frac{(N-1)\sqrt{N-1}}{\psi(N)}\right)+$$

$$+ 2Q_1\left(\frac{\sqrt{N}}{\psi(N)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\psi(n)}\right) \le$$

$$\le Q_1 h\left(\frac{1}{\psi(1)}+\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{N-1}\frac{\sqrt{n}}{\psi(n)}\right) + 2Q_1\left(\frac{\sqrt{N}}{\psi(N)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\psi(n)\sqrt{n}}\right) \le$$

$$\le 2Q_1\left(h\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sqrt{n}}{\psi(n)}+\frac{\sqrt{N}}{\psi(N)}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{\psi(n)\sqrt{n}}\right).$$

З першої умови (13) випливає, що функція $\sqrt{x}/\psi(x)$ є спадною для всіх досить великих x. Спадною також є функція $1/\psi(x)\sqrt{x}$. Тому існує стала Q_3 така, що

$$|k(x+h)-k(x)| \le 2Q_1\left\{h\left(\int_1^N \frac{\sqrt{x}\,dx}{\psi(x)}+Q_3\right)+\frac{\sqrt{N}}{\psi(N)}+\int_N^{\infty}\frac{dx}{\psi(x)\sqrt{x}}\right\}.$$

Але, використовуючи правило Лопіталя і умови (13), маємо

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left\{\left(\int_1^y \frac{\sqrt{x}\,dx}{\psi(x)}+Q_3\right)\Big/\left(\frac{y\sqrt{y}}{\psi(y)}\right)\right\} \le \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left\{1\Big/\left(\frac{3}{2}-\frac{y\psi'(y)}{\psi(y)}\right)\right\} =$$

$$= 1\Big/\left(\frac{3}{2}-\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{y\psi'(y)}{\psi(y)}\right) < +\infty$$

і

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\left\{\int_y^{\infty}\frac{dx}{\psi(x)\sqrt{x}}\Big/\left(\frac{\sqrt{y}}{\psi(y)}\right)\right\} \le \overline{\lim_{y\to+\infty}}\left\{1\Big/\left(\frac{y\psi'(y)}{\psi(y)}-\frac{1}{2}\right)\right\} =$$

$$= 1\Big/\left(\underline{\lim}_{y\to+\infty}\frac{y\psi'(y)}{\psi(y)}-\frac{1}{2}\right) < +\infty.$$

Тому існує стала Q_4 така, що для всіх $x\in\mathbb{R}$, $h\in[0,1]$ та $N\in\mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|k(x+h)-k(x)| \le 2Q_4Q_1\left\{h\frac{N\sqrt{N}}{\psi(N)}+\frac{\sqrt{N}}{\psi(N)}\right\}. \tag{17}$$

Візьмемо $N=[1/h]$. Тоді, використовуючи (13), як і вище, неважко показати, що

$$\frac{N\sqrt{N}}{\psi(N)} = O\left(\frac{1}{h\sqrt{h}\psi(1/h)}\right), \quad \frac{\sqrt{N}}{\psi(N)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}\psi(1/h)}\right), \quad h\to 0.$$

Тому з (17) випливає нерівність (15). Лема 2 доведена.

Розглянемо тепер ряд Фур'є

$$k^*(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^{-1}(n)} e^{icn\ln n} e^{inx}, \tag{18}$$

де Φ — функція, визначена в п. 2. Ясно, що

$$k^{*(m)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^m i^m}{\Phi^{-1}(n)} e^{icn\ln n} e^{inx},$$

тобто одержуємо ряд (14) з $\psi(x) = x^{-m}\Phi^{-1}(x)$. Оскільки

$$\frac{d\ln\psi(x)}{d\ln x} = \frac{d\ln\Phi^{-1}(x)}{d\ln x} - m,$$

а за правилом Лопіталя

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{d\ln\Phi^{-1}(x)}{d\ln x} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{d\ln r}{d\ln\Phi(r)} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{d\ln r}{d\ln\int_{1/r}^{\omega(1)}(dx/x\varphi(x))} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{-d\ln t}{d\ln\int_t^{\omega(1)}(dx/x\varphi(x))} \lesseqgtr \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\int_t^{\omega(1)}(dx/x\varphi(x))}{1/\varphi(x)} \lesseqgtr \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\varphi(t)}{t\varphi'(t)} =$$

$$= \overline{\lim_{x\to 0+}} \frac{d\ln\eta(x)}{d\ln x} = m + \frac{1}{2} + \overline{\lim_{x\to 0+}} \frac{d\ln\omega(x)}{d\ln x}$$

(тут верхнім границям відповідає знак $\le$, а нижнім — знак $\ge$), то з (3) випливає виконання умов (13), і за лемою 2 виконується нерівність

$$|k^{*(m)}(x+h) - k^{*(m)}(x)| \le Q_2 h^{-1/2-m}/\Phi^{-1}(1/h).$$

Але з (10) випливає

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(1/h)} \le Q_5\left(\frac{1}{h}\right)^{-m-1/2}\omega(h), \quad Q_2 \equiv \text{const}.$$

Тому для функції (18) виконується нерівність

$$|k^{*(m)}(x+h) - k^{*(m)}(x)| \le Q\,\omega(h), \quad Q \equiv \text{const}, \tag{19}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $h \in [0, 1]$.

Закінчимо доведення теореми 2. Можемо вважати, що $a = 0$ і $b = 2\pi$, а нерівність (19) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $h \in [0, 2\pi]$. Покладемо $K(x, y) = k^*(x-y)$. Тоді $K_2^{(m)}(x, y) = (-1)^m k^{*(m)}(x-y)$, і з (19) випливає (1) з $c(x) \equiv Q$.

З іншого боку, неважко показати, що у випадку, коли $K(x, y) = k^*(x-y)$, власні числа ядра K збігаються з коефіцієнтами Фур'є функції k^*, помноженими на 2π, тобто

$$\lambda_n = 2\pi/\Phi^{-1}(n), \tag{20}$$

і нам залишилося довести, що для всіх досить великих x виконується нерівність

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(x)} \ge \delta x^{-m+1/2}\omega\left(\frac{1}{x}\right), \tag{21}$$

де δ — деяке додатне число.

Покладемо $\delta = 4^{-2/(2m+3)}$. Оскільки за умовою (3)

$$\varliminf_{t \to 0+} \frac{d\ln\varphi(t)}{d\ln t} = \varliminf_{x \to 0+} \frac{d\ln x}{d\ln\eta(x)} =$$

$$= \varliminf_{x \to 0+} \frac{1}{m + 1/2 + d\ln\omega(x)/d\ln x} > \frac{1}{m+3/2},$$

то

$$\ln\varphi\left(\frac{1}{\delta r}\right) - \ln\varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \int\limits_{1/r}^{1/\delta r} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{dx}{x} \geq \frac{2}{2m+3}\ln\frac{1}{\delta},$$

тобто

$$\frac{1}{\varphi(1/r)} \geq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2/(2m+3)} \frac{1}{\varphi(1/\delta r)} = \frac{4}{\varphi(1/\delta r)} \tag{22}$$

для всіх досить великих r. Але

$$\frac{d\ln\varphi(x)}{d\ln x} = \frac{d\ln t}{d\ln\eta(t)}\bigg|_{t=\varphi(x)} = \frac{1}{m+1/2+d\ln\omega(t)/d\ln t}\bigg|_{t=\varphi(x)} \leq \frac{1}{m+1/2}.$$

Тому з (22) маємо

$$\Phi(r) = \int\limits_{1/r}^{\omega(1)} \frac{\varphi(x)}{x\varphi'(x)}\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}dx \geq \left(m+\frac{1}{2}\right)\int\limits_{1/r}^{\omega(1)} \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi(1/r)} - \frac{1}{\varphi(\omega(1))}\right) \geq \frac{2}{\varphi(1/\delta r)} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\varphi(1/\delta r)}$$

для всіх досить великих r. Звідси випливає

$$\frac{1}{\Phi^{-1}(x)} \geq \delta\eta\left(\frac{1}{x}\right) = \delta\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1/2}\omega\left(\frac{1}{x}\right),$$

тобто нерівність (21), а з нею і теорема 2, доведені.

4. Нерозв'зані задачі. Наведемо декілька природних питань, на які не вдалося дати відповіді.

1. Наскільки умови (3) в теоремі 2 є необхідними?

2. Чи можна побудувати модуль неперервності ω, ядро K і функцію c такі, щоб виконувались умова (1) і співвідношення (5), але не виконувалось співвідношення (2)?

3. Співвідношення (5) доведене для довільного модуля неперервності ω. Його точність, як видно з (20), доведена лише при виконанні умов (3). Чи точна оцінка (5) для довільного модуля ω?

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966.
2. *Седлецкий А. М.* О скорости убывания собственных чисел оператора Фредгольма // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 5. – С. 120–127.
3. *Fredholm I.* Sur une classe d'equations fonctionelles // Acta math. – 1903. – **27**. – P. 365–390.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1.
7. *Hille E., Tamarkin J. D.* On the characteristic values of linear integral equations // Acta Math. – 1931. – **57**. – P. 1–76.

Одержано 13.04.94