УДК 517.944

А. О. Ботюк (Терноп. пед. ін-т)

ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ

We study the boundary-value periodic problem $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+T)=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbf{R}^2$. By using the Vejvoda–Shtedry operator, we determine a solution of this problem.

Вивчається крайова періодична задача $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+T)=u(x,t)$, $(x,t)\in\mathbf{R}^2$. За допомогою оператора Вейводи – Штедри знаходиться розв'язок даної задачі.

В [1, 2] доведено, що задача

$$u_{tt}-u_{xx}=F(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t), \qquad (x,t)\in\mathbf{R}^2, \tag{3}$$

може мати класичний розв'язок принаймні в трьох просторах A_1, A_2, A_3 функцій, що відповідають періодам

$$T_1=\frac{(2p-1)\pi}{s}, \qquad T_2=\frac{4\pi p}{2s-1},$$

$$T_3=\frac{2\pi(2p-1)}{2s-1}, \qquad p\in\mathbf{Z}, \qquad s\in\mathbf{N}.$$

Розглянемо такі простори функцій: C — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$; G_t — простір функцій двох змінних, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$ разом з похідною відносно t; Q_T — простір T-періодичних відносно t на $\mathbf{R}^2$ функцій, а також підпростір A_1^0 простору A_1 вигляду

$$A_1^0=\{F\colon F(x,t)=F(\pi-x,t)=F(x,t+T_1)=-F(-x,t)=-F(x,-t)\}, \tag{4}$$

де $T_1=\pi/q$, $q\in\mathbf{N}$.

Для функцій $F\in C$ розглянемо оператор

$$(SF)(x,t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_\xi^x\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta+$$

$$+\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_\xi^x\{F(\xi,t+\xi-\eta)+F(\xi,t-\xi+\eta)\}d\eta\equiv$$

$$\equiv-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}F(\xi,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}F(\xi,\tau)d\tau. \tag{5}$$

Справедливі наступні твердження.

Лема 1. *Для кожної функції* $F\in G_t\cap Q_T$ *функція* $u=SF$ *задовольняє рівняння* (1) *і умову* (3);

$$(SF)(x,-t)=-(SF)(x,t), \tag{6}$$

$$(SF)(x, t+T_1) = (SF)(x, t), \tag{7}$$

$$(SF)(\pi - x, t) = (SF)(x, t). \tag{8}$$

Лема 2. *Якщо* $F \in A_1^0 \cap C$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau = 0.$$

Доведення лем 1, 2 проводиться безпосередньою перевіркою.

Теорема 1. *Якщо* $F \in A_1^0 \cap C$, *то* $u = SF \in A_1^0$.

Доведення. Оскільки має місце лема 1, то для доведення теореми 1 залишається показати, що $(SF)(-x, t) = -(SF)(x, t)$.

Справді, тому що оператор S допускає зображення

$$(SF)(x, t) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau,$$

то на основі леми 2 маємо

$$(SF)(-x, t) = -\frac{1}{2}\int_0^{-x} d\xi \int_{t+x+\xi}^{t-x-\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t+x+\xi}^{t-x-\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x} dy \int_{t+x-y}^{t-x+y} F(-y, \tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int_0^{-\pi} dy \int_{t+x-y}^{t-x+y} F(-y, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y, \tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^{\pi} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y, \tau)\, d\tau + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{0} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y, \tau)\, d\tau =$$

$$= -(SF)(x, t) + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{t-x+y}^{t+x-y} F(y, \tau)\, d\tau = -(SF)(x, t).$$

Теорему 1 доведено.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо* $F \in G_t \cap A_1^0$, *то існує єдина функція* $u = SF \in C^2 \cap A_1^0$, *яка задовольняє умови* (1)–(3) *і для якої справедливі оцінки*

$$\| u(x, t) \|_C \le \frac{\pi^2}{4} \| F(x, t) \|_C,$$

$$\| u_t(x, t) \|_C \le \frac{\pi}{2} \| F(x, t) \|_C, \tag{9}$$

$$\| u_x(x, t) \|_C \le \frac{\pi}{2} \| F(x, t) \|_C,$$

де

$$\| F(x, t) \|_C = \sup \{ | F(x, t) |;\ (x, t) \in \mathbf{R}^2 \}.$$

Доведення. Те, що $u = SF$ задовольняє умови (1) та (3), випливає з леми 1. Тепер покажемо, що для всіх $F \in A_1^0$ виконується умова (2). При $x = 0$ з (5) одержуємо

$$u(0, t) = (SF)(0, t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Звідси знаходимо

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4}\int_0^\pi \{\, F(\xi, t+\xi) - F(\xi, t-\xi)\,\} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi F(\xi, t+\xi)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_0^\pi F(\xi, t-\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Зробимо в першому інтегралі останньої рівності заміну змінних $\xi = \pi - \eta$:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = \frac{1}{4}\int_\pi^0 F(\pi-\eta, t+\pi-\eta)\, d\eta + \frac{1}{4}\int_0^\pi F(\xi, t-\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Через те, що $F \in A_1^0$, то $\dfrac{\partial u(0, t)}{\partial t} \equiv 0$. Отже, $u(0, t) = C$.

Оскільки

$$u(0, 0) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{-\xi}^{\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau \equiv 0,$$

то $C \equiv 0$. Отже, $u(0, t) = 0$. Перша рівність умови (2) виконується.

Враховуючи лему 1, знаходимо

$$u(\pi, t) = (SF)(\pi, t) = (SF)(0, t) = 0.$$

Таким чином, ми показали, що $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, тобто для $u(x, t) = (SF)(x, t)$ виконується умова (2).

Доведемо тепер справедливість оцінок (9). Для цього використаємо наступне зображення оператора (5):

$$(SF)(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{13}$$

де $Q(\xi) = -1$ при $0 \le \xi \le x$ і $Q(\xi) = 1$ при $x < \xi \le \pi$.

Маємо

$$|(SF)(x, t)| = \frac{1}{4}\left|\int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F(\xi, \tau)\, d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4}\| F(x, t)\|_C \left|\int_0^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} d\tau\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\| F(x, t)\|_C \int_0^\pi |x-\xi|\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\| F(x,t)\|_C \left\{ \int_0^x (x-\xi)\,d\xi - \int_0^\pi (x-\xi)\,d\xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\| F(x,t)\|_C \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(x-\pi)^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\| F(x,t)\|_C \left(2x^2 - 2\pi x + \pi^2 \right) \le \frac{\pi^2}{4}\| F(x,t)\|_C.$$

Знайдемо похідні u_t і u_x. Одержимо

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^x \{ F(\xi, t+x-\xi) - F(\xi, t-x+\xi) \}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{4}\int_\pi^x \{ F(\xi, t-x+\xi) - F(\xi, t+x-\xi) \}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\{ F(\xi, t-x+\xi) - F(\xi, t+x-\xi) \}\,d\xi,$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^x \{ F(\xi, t+x-\xi) + F(\xi, t-x+\xi) \}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{4}\int_x^\pi \{ -F(\xi, t-x+\xi) - F(\xi, t+x-\xi) \}\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\{ F(\xi, t-x+\xi) + F(\xi, t+x-\xi) \}\,d\xi.$$

Звідси

$$\| u_t(x,t)\|_C \le \frac{\pi}{2}\| F(x,t)\|_C,$$

$$\| u_x(x,t)\|_C \le \frac{\pi}{2}\| F(x,t)\|_C.$$

Теорему 2 доведено.

1 *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

Одержано 04.06.96