УДК 517.9

А. А. Эльназаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The necessary and sufficient conditions for the exponential dichotomy with matrix projectors of the denumerable system of differential equations with quasiperiodic coefficient are obtained.

Наведено необхідні та достатні умови експоненціальної дихотомії з матричним проектором зліченної системи диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами.

Вопросы экспоненциальной дихотомии систем дифференциальных уравнений в банаховом пространстве рассматривались в [1]. Подобные вопросы для системы уравнений, заданной на прямом произведении m-мерного тора $\mathcal{T}_m$ и евклидова пространства E^n, рассмотрены в [2]. Там же приведены необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомичности с использованием аппарата знакопеременных функций Ляпунова, являющихся квадратичной формой по переменной $x \in E^n$. Новые критерии экспоненциальной дихотомичности, основанные на свойствах решений дифференциальных уравнений на торе, получены в [3]. В настоящей работе подобные вопросы рассматриваются для счетной системы дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.

Пусть m — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_n \{|x_n|\}$.

Рассмотрим бесконечномерную матрицу $P(\varphi) = \left[p_{i,j}(\varphi) \right]_{i,j=1}^{\infty}$ и счетномерную вектор-функцию $f(\varphi)$, элементы $p_{i,j}(\varphi)$ и $f_i(\varphi)$ которых являются функциями переменного $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Пусть $p_{i,j}(\varphi)$ и $f_i(\varphi)$ непрерывны и периодичны по каждой из переменных φ_α $(\alpha = 1, \dots, m)$ с периодом 2π. Множество всех таких матриц и функций, ограниченных по норме

$$\|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left| p_{i,j}(\varphi) \right| \le p_0 < \infty$$

и соответственно

$$\|f(\varphi)\| = \sup_{1,2,\dots} \left\{ \left| f_1(\varphi) \right|, \left| f_2(\varphi) \right|, \dots \right\} \le f_0 < \infty,$$

обозначим через $C(\mathcal{T}_m)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in m$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$— постоянный вектор такой, что для любого целочисленного вектора k

$$(k, \omega) \ne 0, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad k^2 = \sum_i k_i^2 \ne 0, \quad P(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m).$$

Подставив решение первого уравнения (1) $\varphi_t(\varphi) = \omega t + \varphi$ во второе уравнение, получим счетную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x. \tag{2}$$

Известно [4], что если элементы матрицы

$$P(\varphi), \qquad p_s(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} |p_{sj}(\varphi)|$$

непрерывны по φ при любом $s = 1, 2, \dots$ и $P(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, то существует матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi)$ уравнения (2), для которого справедливо равенство

$$\Omega_\tau^t(\varphi_\theta(\varphi)) = \Omega_{\tau+\theta}^{t+\theta}(\varphi). \tag{3}$$

Экспоненциальная дихотомия уравнения (2) понимается в смысле [4]: для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ пространство m разлагается в прямую сумму подпространств $E_1(\varphi)$ и $E_2(\varphi)$: $m = E_1(\varphi) \oplus E_2(\varphi)$ так, что любое решение уравнения (2), принимающее при $t = 0$ значение $x_0 \in E_1(\varphi)$, удовлетворяет оценке

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le K \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \| x_\tau(\varphi, x_0) \|, \qquad t \ge \tau, \qquad t, \tau \in R^1, \tag{4}$$

а принимающее значение $x_0 \in E_2(\varphi)$ — оценке

$$\| x_t(\varphi, x_0) \| \le K \exp\{\gamma(t-\tau)\} \| x_\tau(\varphi, x_0) \|, \qquad t \le \tau, \qquad t, \tau \in R^1, \tag{5}$$

где K, γ — положительные постоянные, не зависящие от φ.

Если существует бесконечномерная матрица $C(\varphi)$, являющаяся проектором пространства m на $E_1(\varphi)$, то экспоненциально дихотомичное на R^1 уравнение (2) называется э-дихотомичным с матричным проектором.

Предположим, что матрица $P(\varphi)$ системы (2) удовлетворяет условию

$$\| P(\varphi) - P(\overline{\varphi}) \| \le \alpha \| \varphi - \overline{\varphi} \|, \qquad \alpha = \text{const} > 0.$$

Лемма 1. *Если система (2) является э-дихотомичной с матричным проектором $C_1(\varphi)$, то существует единственная функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$ системы (1), удовлетворяющая оценке*

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \le K \exp\{-\gamma |\tau|\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $C_1(\varphi)$ — проектор подпространства $E_1(\varphi)$, $\Omega_0^t(\varphi)$ — матрицант системы (2). Определим функцию

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi_\tau(\varphi)) C_1(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau \le 0, \\ \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C_1(\varphi_\tau(\varphi)) - E] & \text{при } \tau > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Известно [4], что эта функция определяет функцию Грина системы (2), причем она удовлетворяет оценке (6). Из условия э-дихотомичности следует, что единственным инвариантным тором системы (2) является тривиальный тор: $x = 0$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Используем это для доказательства единственности функции Грина. Пусть существует отличная от $G_0(\tau, \varphi)$ функция $G_1(\tau, \varphi)$, являющаяся функцией Грина системы (2). Можно проверить, что для любой функции $f \in C(\mathcal{T}_m)$ множество

$$x = u_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau \tag{8}$$

определяет инвариантный тор системы (2). Запишем (8) в виде

$$u_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau$$

и определим на пространстве $C(\mathcal{T}_m)$ оператор T_0 соотношением

$$T_0 f = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau.$$

Очевидно,

$$T_0 f \equiv 0 \qquad \forall f \in C(\mathcal{T}_m). \tag{9}$$

Покажем, что из (9) следует тождество $G_0(\tau, \varphi) \equiv G_1(\tau, \varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$.

Из равномерной ограниченности интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| G_i(\tau, \varphi) \|\, d\tau, \qquad i = 0, 1,$$

следует равномерная ограниченность интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau.$$

Это означает, что можно указать монотонно убывающую к нулю последовательность положительных чисел $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ и монотонно возрастающую к $+\infty$ последовательность положительных чисел t_n, $t_{n+1} > t_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \infty$, таких, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{-\infty}^{-t_n} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau + \int_{t_n}^{+\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \ < \ \varepsilon_n.$$

В силу равенства (9) получаем

$$\left\| \int_{-t_n}^{t_n} \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau \right\| \ \le \ \varepsilon_n \|f\|_0,$$

где $\|f(\varphi)\| = \sup\limits_{\varphi} \|f(\varphi)\|$.

Дуга $\varphi_t(\varphi) = \omega t + \varphi$, $-t_n \le t \le t_n$, траектории на $\mathcal{T}_m$ не имеет самопересечений. Для любой непрерывной, скалярной функции $F(t)$, определенной на R^1, найдется функция $f_n \in C(\mathcal{T}_m)$, связанная с F соотношением $f_n(\omega t + \varphi_0) = F(t)$, $-t_n \le t \le t_n$.

Докажем, что из (9) следует тождество

$$S(\omega t + \varphi) \equiv 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m, \qquad t \in R. \tag{10}$$

Предположим, что $S(\omega t + \varphi) \not\equiv 0$ при $t \in R$. Тогда $\Omega_t^0(\varphi) S(\omega t + \varphi) \not\equiv 0$ при $t \in R$. Пусть $s_{ij}(t)$ является элементом матрицы $\Omega_t^0(\varphi) S(\omega t + \varphi)$, для которого выполняется неравенство $s_{ij}(t) \not\equiv 0$, $t \in R$. Положим

$$\hat{s}_{ij}(t) = \begin{cases} s_{ij}(t) & \text{при } |s_{ij}(t)| \le 1, \\ \operatorname{sign} s_{ij}(t) & \text{при } |s_{ij}(t)| > 1. \end{cases}$$

Функция $\hat{s}_{ij}(t)$ непрерывна при $t \in R$ и $\max\limits_{t \in R} |\hat{s}_{ij}(t)| \le 1$. Выберем скалярные функции $f_n \in C(\mathcal{T}_m)$ так, чтобы выполнялись условия

$$f_n(\omega t + \varphi_0) = \hat{s}_{ij}(t), \quad -t_n \le t \le t_n, \quad \|f_n\|_0 \le 1.$$

Рассмотрим равенство (9) для функций $f_n(\varphi)e_j$, где $e_j = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ — j-й единичный орт. Имеем

$$\left\| \int\limits_{-t_n}^{t_n} \Omega_t^0(\varphi_0) S(\omega t + \varphi_0) f_n(\omega t + \varphi_0) e_j \, d\tau \right\| \le \varepsilon_n,$$

откуда

$$\int\limits_{-t_n}^{t_n} s_{ij}(\tau)\hat{s}_{ij}(\tau)\, d\tau \le \varepsilon_n. \tag{11}$$

Так как $s_{ij}(t)\hat{s}_{ij}(t) \not\equiv 0$ при $t \in R$, то

$$\int\limits_{-t_N}^{t_N} s_{ij}(\tau)\hat{s}_{ij}(\tau) d\tau = \delta > 0$$

для некоторого достаточно большого N. Но тогда

$$\int\limits_{-t_n}^{t_n} s_{ij}(\tau)\hat{s}_{ij}(\tau)\, d\tau \ge \delta \quad \forall\, n \ge N,$$

что противоречит неравенству (11) и условию $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Отсюда следует, что $\Omega_t^0(\varphi) S(\omega t + \varphi) \equiv 0$, $t \in R$. Это означает, что справедливо тождество (10), ведущее к тождеству $G_0(\tau, \varphi) \equiv G_1(\tau, \varphi)$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $G_0(\tau, \varphi)$ *(определенная в лемме 1) является функцией Грина системы уравнений (2). Тогда матрица* $C_1(\varphi) = G_0(0, \varphi)$ *удовлетворяет равенству*

$$\Omega_t^0(\varphi) C_1(\varphi_t(\varphi)) = C_1(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \quad \forall\, t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть равенство (12) не имеет места для некоторого $t_1 \ne 0$, т. е.

$$S(\varphi) = \Omega_{t_1}^0(\varphi) C_1\big(\varphi_{t_1}(\varphi)\big) - C_1(\varphi)\Omega_{t_1}^0(\varphi) \not\equiv 0.$$

Рассмотрим функцию

$$G_1(\tau, \varphi) = G_0(\tau, \varphi) + \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)),$$

для которой выполняется цепочка неравенств

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G_1(\tau, \varphi) \| \, d\tau \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \| \, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| \Omega_\tau^0(\varphi) S(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \le$$

$$\le K + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \Omega^0_{\tau+t_1}(\varphi) C_1\big(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\big) - \Omega^0_\tau(\varphi) C_1(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega^0_{t_1}(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \le$$

$$\le K + \int_{-\infty}^{-t_1} \left\| \Omega^0_{\tau+t_1}(\varphi) C_1\big(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi)\big) \right\| d\tau + \int_{-t_1}^{\infty} \left\| \Omega^0_{\tau+t_1}(\varphi) \big[E - C_1(\varphi_{\tau+t_1}(\varphi))\big] \right\| d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-t_1} \left\| \Omega^0_\tau(\varphi) C_1(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \left\| \Omega^0_{t_1} \right\|_0 +$$

$$+ \int_{-t_1}^{+\infty} \left\| \Omega^0_{\tau+t_1}(\varphi) - \Omega^0_\tau(\varphi) C_1(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega^0_{\tau_1}(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau \le K_1 < \infty,$$

где $\left\| \Omega^0_{t_1} \right\|_0 = \sup\limits_{\varphi} \left\| \Omega^0_{t_1}(\varphi) \right\|$. Это означает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| G_1(\tau, \varphi) \| \, d\tau \le K_1$$

равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$, что противоречит предположению о единственности функции Грина.

Лемма доказана.

Замечание. Бесконечномерная матрица $C_1(\varphi)$ в условии леммы 2 является матричным проектором подпространства $E_1(\varphi)$, поэтому она удовлетворяет равенству

$$C_1^2(\varphi) = C_1(\varphi). \tag{13}$$

Теорема 1. *Для того чтобы система* (2) *была экспоненциально дихотомичной с матричным проектором, необходимо и достаточно, чтобы существовали бесконечномерная матрица* $C_1(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющая условиям* (12), (13), *и положительные постоянные* T *и* $d < 1$, *для которых выполняются неравенства*

$$\left\| \Omega^T_0(\varphi) C_1(\varphi) \right\| \le d, \qquad \left\| \Omega^{-T}_0(\varphi)(E - C_1(\varphi)) \right\| \le d. \tag{14}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (2) является экспоненциально дихотомичной с матричным проектором $C_1(\varphi)$. Согласно лемме 2 проектор $C_1(\varphi)$ удовлетворяет условиям (12) и (13).

Из (6) и (7) следуют оценки:

$$\left\| \Omega^t_0(\varphi) C_1(\varphi) \right\| \le K \exp\{-\gamma t\}, \qquad t \ge 0, \tag{15}$$

$$\left\| \Omega^t_0(\varphi)(E - C_1(\varphi)) \right\| \le K \exp\{\gamma t\}, \qquad t \le 0. \tag{16}$$

Из неравенств (15) и (16) следует существование положительных T и $d < 1$, которые удовлетворяют неравенствам (14).

Достаточность. Пусть существуют бесконечномерная матрица $C_1(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющая условиям (12) и (13), и положительные постоянные T и $d < 1$, удовлетворяющие неравенствам (14). Согласно [4] матрицант системы (2) удовлетворяет равенству

$$\Omega^t_{t_0}(\varphi) = \Omega^t_{t_1}(\varphi) \Omega^{t_1}_{t_0}(\varphi). \tag{17}$$

Пусть $t \ge 0$, $t = kT + \tau$, $k \in N$, $\tau \in [0, T]$.

Используя равенства (3), (12), (13), (17), получаем оценку

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi) C_1(\varphi) \right\| = \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \Omega_0^{kT}(\varphi) C_1^2(\varphi) \right\| =$$

$$= \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \Omega_0^T(\varphi_{(k-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) \Omega_0^T(\varphi) C_1^2(\varphi) \right\| =$$

$$= \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \Omega_0^T(\varphi_{(k-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) C_1(\varphi_T) \Omega_0^T(\varphi) C_1(\varphi) \right\| =$$

$$= \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \Omega_0^T(\varphi_{(k-1)T}) \ldots \Omega_0^T(\varphi_T) C_1^2(\varphi_T) \right\| d \le$$

$$\le \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \right\| d^k = \left\| \Omega_0^\tau(\varphi_{kT}) \exp\{-(\ln d / T)\tau\} \right\| \exp\{(\ln d / T) t\} \le$$

$$\le K \exp\{-\gamma t\}, \tag{18}$$

где

$$K = \max \left\| \Omega_0^\tau(\varphi) \exp\left\{\left(-\ln \frac{d}{T}\right)\tau\right\} \right\|, \ \gamma = \left| \ln \frac{d}{T} \right| > 0.$$

Аналогично доказывается оценка

$$\left\| \Omega_0^t(\varphi)(E - C_1(\varphi)) \right\| \le K \exp\{\gamma t\}, \qquad t \le 0. \tag{19}$$

Условия (12) и (13) вместе с оценками (18) и (19) означают экспоненциальную дихотомию системы (2).

1. *Далецкий Ю. М., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
3. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665–1699.
4. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.

Получено 06.03.97