УДК 517.5

О. В. Поляков (Днепропетр. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ПОЛУНОРМ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *

We obtain the inequalities for upper bounds of seminorms of classes of 2π-periodic functions, which are determined by a linear differential operator and by the majorant of module of continuity.

Одержані нерівності для верхніх меж напівнорм класів 2π-періодичних функцій, що задаються за допомогою лінійного диференціального оператора та мажорантою модуля неперервності.

Пусть C і L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$. Для $f \in L_p$ и чисел $\alpha, \beta > 0$ положим $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x); 0\}$,

$$NF_{p;\alpha,\beta} := \{f \in L_p \colon \|f\|_{p;\alpha,\beta} \le N\}, \qquad F_p = F_{p;1,1}.$$

Если H — подмножество L_p, то величину

$$E(f;H)_{p;\alpha,\beta} := \inf\{\|f-u\|_{p;\alpha,\beta} \colon u \in N\}$$

назовем наилучшим (α,β)-приближением функции f множеством H в метрике L_p. Задача наилучшего (α,β)-приближения класса функций $\mathcal{M} \subset L_p$ состоит в том, чтобы найти величину

$$E(\mathcal{M};H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f\in\mathcal{M}} E(f;H)_{p;\alpha,\beta}.$$

При $\alpha = \beta = 1$ получаем обычное наилучшее приближение и вместо $E(f;H)_{p;1,1}$ пишем $E(f;H)_p$. Если H локально слабо компактно, то (см. [1], теорема 2, а также [2])

$$\lim_{\beta\to\infty} E(f;H)_{1;1,\beta} = E^+(f;H)_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to\infty} E(f;H)_{1;\alpha,1} = E^-(f;H)_1,$$

где $E^\pm(f;H)_1$ — наилучшее приближение соответственно снизу $(+)$ и сверху $(-)$.

Свертку $K * g$ функций $K \subset L_1$ (ядра свертки) и $g \in L_1$ определим равенством

$$(K*g)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)g(t)\,dt.$$

Для ядра K положим

$$M(k) = \left\{m \in \mathbb{Z} \colon \int_0^{2\pi} K(t)e^{-imt}\,dt = 0\right\}.$$

Если $M \subset \mathbb{Z}$ — конечное центрально-симметричное множество, то через $H^T(M)$ обозначим линейное пространство тригонометрических полиномов вида

$$T(x) = \sum_{m\in M} c_m e^{imx}, \qquad c_{-m} = c_m$$

(если $M = \varnothing$, то $T(x) \equiv 0$),

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № U92000) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$H^T(\{-(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (n-1)\}) = H^T_{2n-1}.$$

Пусть заданы ядро K и множество $F \subset L_1$. Через $K * F$ обозначим класс функций вида

$$f(x) = T(x) + (K * g)(x), \quad T \in H^T(M(k)), \quad g \in F, \quad g \perp H^T(M(k))$$

$\Big($условие $g \perp A$, где A — некоторый класс функций, означает, что для всех функций $f \in A$ справедливо равенство $\int_0^{2\pi} g(x)\, f(x)\, dx = 0\Big)$.

Пусть $\mathcal{P}$ — алгебраический многочлен r-й степени, все корни которого вещественны, и $\mathcal{P}(0) = 0$.

Результат применения дифференциального оператора $\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right)$ к функции f будем записывать так: $\mathcal{P} f$. Через $NW^{\mathcal{P}}_{p;\alpha,\beta}$ обозначим класс функций $B(\mathcal{P}, \cdot) * NF_{p;\alpha,\beta}$, где

$$B(\mathcal{P}, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{imx}}{\mathcal{P}(im)},$$

$\sum'$ означает, что суммирование ведется по таким индексам m, что $\mathcal{P}(im) \neq \neq 0$.

Заметим, что если $\mathcal{P}(\cdot) = (\cdot)^r$, то функция $B(\mathcal{P}, x)$ есть функция Бернулли $B_r(x)$, а класс $NW^{\mathcal{P}}_{p;\alpha,\beta}$ — хорошо известный в теории аппроксимации класс $NW^r_{p;\alpha,\beta}$ (см., например, [2]).

Пусть $\omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$, $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности и $H^\omega = \{ f \in C \colon \omega(f; t) \le \omega(t),\ t \ge 0 \}$.

Через $W^{\mathcal{P}} H^\omega$ обозначим класс функций $B(\mathcal{P}, \cdot) * H^\omega$, а через $\mathcal{P} \cdot (\cdot)^k f$ — результат применения к функции f дифференциального оператора $\mathcal{P}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \left(\frac{d^k}{dx^k}\right)$.

В случае $\mathcal{P}(\cdot) = (\cdot)^r$ будем иметь известный в теории приближения класс $W^r H^\omega$.

Обозначим через $\varphi_{1;\alpha,\beta}(x)$ четную 2π-периодическую функцию, принимающую значение α на интервале $[0; \pi\beta/(\alpha+\beta)]$, значение $-\beta$ на интервале $[\pi\beta/(\alpha+\beta); \pi]$ и имеющую на периоде нулевое среднее значение. Пусть $\varphi_{b;\alpha,\beta}(x) = \varphi_{1;\alpha,\beta}(bx)$, $b > 0$; $\varphi_{b;\mathcal{P};\alpha,\beta}(x)$ — решение уравнения $\mathcal{P} f = = \varphi_{b;\alpha,\beta}(x)$.

Положим

$$M^+_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha, \beta) = \max_t \varphi_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k;\alpha,\beta}(x),$$

$$M^-_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha, \beta) = \min_t \varphi_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k;\alpha,\beta}(x),$$

$$M_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\left(M^+_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha, \beta) - M^-_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha, \beta)\right).$$

Вопросы аппроксимации класса классом изучались многими авторами (см. библиографию в [3]).

В работе [3] (гл. 8) изучались вопросы наилучшего и наилучшего одностороннего приближения класса $W^r H^\omega$ классом NW_1^{r+k} в интегральной метрике и на основании полученных результатов методом промежуточного приближения были установлены неравенства для верхних граней полунорм класса $W^r H^\omega$. В работе [4] были получены неулучшаемые оценки наилучшего (α, β)-приближения и наилучшего одностороннего приближения класса $W^{\mathcal{P}} H^\omega$ классом $NW_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}$.

В данной статье мы получим неравенства для верхних граней полунорм классов $W^{\mathcal{P}} H^\omega$, выраженные через полунормы некоторых несимметричных классов дифференцируемых периодических функций, обобщив тем самым результаты работы [5], в которой соответствующие неравенства получены для классов $W^r H^\omega$.

Пусть $\Psi(x)$ — произвольная полунорма и

$$\Psi(W^0_{p;\alpha,\beta}) = \sup\{\Psi(x) \colon \|x\|_{p;\alpha,\beta} \le 1\},$$

$$\Psi(W^{\mathcal{P}} H^\omega) = \sup\{\Psi(x) \colon x \in W^{\mathcal{P}} H^\omega\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(t)$ *— выпуклый вверх модуль непрерывности и ядро* $B(\mathcal{P};\cdot)$ *— четное. Тогда для любой полунормы* $\Psi(x)$ *при всех* $\alpha, \beta > 0$ *и* $k \ge 2$ *справедливо неравенство*

$$\Psi(W^{\mathcal{P}} H^\omega) \le \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta}) \int\limits_0^{2\pi} \Phi(\varphi_{\xi,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1;\alpha,\beta}(\xi^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt,$$

где $\Phi(g;t)$ *—* Σ*-перестановка Корнейчука функции* $|g|$ *(определение и свойства* Σ*-перестановки см., например, в* [2]*), число* ξ *определяется из условия*

$$\Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}) = \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta})\, M_{\xi,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha,\beta).$$

Доказательство. Будем использовать рассуждения А. А. Лигуна [4, с. 165–167]. Пусть $f(x)$. — произвольная функция из класса $W^{\mathcal{P}} H^\omega$. Обозначим через $u(x)$ функцию наилучшего (α, β)-приближения для f в классе $W^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}$. Тогда, учитывая, что $\Psi(\cdot)$ — полунорма, получаем

$$\Psi(f) \le \Psi(f-u) + \Psi(u) \le \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta})\|f-u,\|_{1;\alpha,\beta} + \Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}),$$

т. е.

$$\Psi(W^{\mathcal{P}} H^\omega) \le \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta})\, E(W^{\mathcal{P}} N^\omega; HW_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k})_{1;\alpha,\beta} + N\Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}).$$

Отсюда и из теоремы 3 из [4] получаем

$$\Psi(W^{\mathcal{P}} H^\omega) \le N\Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}) +$$

$$+ \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta}) \sup_{b>0} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \Phi(\varphi_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1;\alpha,\beta}(b^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt - NM_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha,\beta) \right\}.$$

Пусть $\eta > 0$. Виберем число N таким образом, чтобы верхняя грань

$$\sup_{b>0}\left\{\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1;\alpha,\beta}(b^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt - NM_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha,\beta)\right\}$$

достигалась при $b=\eta$. В качестве числа N возьмем

$$N = N(\eta) = \left.\frac{\frac{\partial}{\partial b}\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1;\alpha,\beta}(b^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt}{\frac{\partial}{\partial b}M_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha,\beta)}\right|_{b=\eta}.$$

Поэтому для любого $\eta>0$ найдется $N=N(\eta)$ такое, что

$$\Psi(W^{\mathcal{P}}H^{\omega}) \le N\Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}) +$$

$$+\ \Psi(W^0_{1;\alpha,\beta})\left(\int_0^{2\pi}\Phi(\varphi_{\eta,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1;\alpha,\beta}(\eta^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt - N(\eta)M_{\eta,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(\alpha,\beta)\right).$$

Полагая $\eta=\xi$, получаем утверждение теоремы.

Пусть $B_1(t)$ — функция Бернулли и $B_{b,1}(t) = -2b^{-1}B_1(bt)$.

Обозначим через $B_{b,\mathcal{P}}(t)$ 2π-периодическое решение уравнения

$$\mathcal{P}g = B_{b,1}.$$

Легко установить, что

$$\lim_{\beta\to\infty}\varphi_{b,\mathcal{P};1,\beta}(t) = B_{b,\mathcal{P}}(t).$$

Положим

$$H_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k} = \lim_{\beta\to\infty}M_{b,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}(1,\beta)$$

и пусть для произвольной полунормы $\Psi(x)$

$$\Psi(W_p^{0,+}) = \sup\{\Psi(x)\colon \|x\|_p\le 1,\ \ x(t)\ge 0\ \ (t\in[0,2\pi])\}.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, и используя теорему 4 из [4], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности и ядро $B(\mathcal{P};\cdot)$ — четное. Тогда для любой полунормы $\Psi(x)$ при всех $k\ge 2$ справедливо неравенство*

$$\Psi(W^{\mathcal{P}}H^{\omega}) \le \Psi(W_1^{0,+})\int_0^{2\pi}\Phi(B_{\xi,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^1}(\xi^{-1}\cdot);t)\omega'(t)\,dt,$$

где число ξ определяется из условия

$$\Psi(W_1^{\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}) = \Psi(W_1^{0,+})\,H_{\xi,\mathcal{P}\cdot(\cdot)^k}.$$

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409–416.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 252 с.
4. *Поляков О. В.* Несимметричные приближения класса классом, задаваемых при помощи линейного дифференциального оператора // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1083–1088.
5. *Поляков О. В.* Неравенства для верхних граней полунорм класса W^rH^{ω} // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 51–55.

Получено 21.11.95