УДК 517.5

А. А. Лигун, Е. В. Черная (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ *

Lower bounds are obtained for solutions of some extremal problems for classes of functions $W^r H_1^\omega$ with an integral modulus of continuity $\omega(t)$. Some of these bounds are regarded as exact.

Одержано оцінки знизу розв'язків деяких екстремальних задач на класах функцій $W^r H_1^\omega$ з інтегральним модулем неперервності $\omega(t)$. Деякі з цих оцінок ми вважаємо точними.

1. Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, — пространства измеримых интегрируемых в p-й степени 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \left\{ \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p};$$

L_∞ — пространство существенно ограниченных 2π-периодических измеримых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup} |f(x)|;$$

$$\omega(f, t)_p = \sup_{|h| \le t} \|f(\cdot + h/2) - f(\cdot - h/2)\|_p$$

— модуль непрерывности функции f в пространстве L_p, $p \in [1, \infty)$, $W^r H_1^\omega$, $r = 1, 2, \ldots$, — множество всех 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $\omega(f^{(r)}, t)_1 \le \omega(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Обозначим через $M_{2n,\omega}$ множество всех 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих следующему условию: существует разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 2\pi$, где $1 \le N \le 2n$, такое, что на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \pm \frac{1}{2} \min\{\omega(2x - 2x_{i-1}), \omega(2x_i - 2x)\}.$$

Пусть $M^0_{2n,\omega}$ — множество всех функций $f(x) \in M_{2n,\omega}$, в среднем равных нулю на периоде, $M^r_{2n,\omega}$ — множество всех r-х периодических интегралов от функций $f(x) \in M^0_{2n,\omega}$. При каждом $n = 1, 2, \ldots$ через $f_{n,0}(\omega, x)$ будем обозначать нечетную $(2\pi/n)$-периодическую функцию, равную

$$\frac{1}{2} \min\{\omega(2x), \omega(2(\pi/n - x))\}$$

для $x \in [0, \pi/n]$, а через $f_{n,r}(\omega, x)$, $r = 1, 2, \ldots$, — r-й периодический интеграл со средним значением 0 на периоде от функции $f_{n,0}(\omega, x)$.

Точных результатов на классах функций, заданных интегральными модулями непрерывности, совсем мало. Нам известны только два из них [1, 2].

В данной работе мы приведем несколько оценок снизу решений некоторых экстремальных задач на классах $W^r H_1^\omega$.

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант № U 92200.

Основные результаты будут базироваться на следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$. *Если* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности и функция* $f \in M_{2n,\omega}$ *имеет* $2n$ *перемен знака на периоде, то* $1/(4n)f(x) \in W^1 H_1^{\omega}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что функция $\omega(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, 2\pi)$. Общий случай легко получить предельным переходом.

Пусть функция $f(x)$ меняет знак в точках $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = 2\pi$. Положим $t_i = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, $t_{2n} = t_0 + 2\pi$. При каждом $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$ определим 2π-периодическую функцию $g_i(x)$ следующим образом:

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0 \text{ — в остальных точках промежутка } [t_0, t_0 + 2\pi]. \end{cases}$$

Для любого $h > 0$ обозначим через $J_1(h)$ множество всех тех $i \in J = \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$, для которых $|t_{i+1} - t_i| \le h$. Пусть $J_2(h) = J \setminus J_1(h)$, $|J_\nu(h)|$ — количество элементов множества $J_\nu(h)$, $\nu = 1, 2$.

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} |f'(x+h/2) - f'(x-h/2)|\, dx \le 2 \sum_{i \in J_1(h)} \int_0^{2\pi} |g_i'(x)|\, dx + \\ + \sum_{i \in J_2(h)} \int_0^{2\pi} |g_i'(x+h/2) - g_i'(x-h/2)|\, dx. \tag{1}$$

Так как $\omega(t)$ — выпуклая вверх функция, то

$$\sum_{i \in J_1(h)} \int_0^{2\pi} |g_i'(x)|\, dx \le \frac{1}{2} \sum_{i \in J_1(h)} (\omega(2(x_{i+1} - t_i)) + \omega(2(t_{i+1} - x_{i+1}))) \le \\ \le \sum_{i \in J_1(h)} \omega(t_{i+1} - t_i) \le |J_1(h)|\, \omega(h). \tag{2}$$

Пусть теперь $i \in J_2(h)$. Положим $a_1 = x_{i+1} - t_i$, $a_2 = t_{i+1} - x_{i+1}$, $a_0 = \min\{a_1, a_2\}$. Учитывая монотонность функции f на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, нетрудно подсчитать, что если $a_0 \le h/2$, то

$$\int_0^{2\pi} |g_i'(x+h/2) - g_i'(x-h/2)|\, dx = \omega(2a_0) + \omega(2h - 2a_0) \le 2\,\omega(h);$$

если же $a_0 > h/2$, то

$$\int_0^{2\pi} |g_i'(x+h/2) - g_i'(x-h/2)|\, dx = 2\,\omega(h).$$

Таким образом,

$$\sum_{i \in J_2(h)} \int_0^{2\pi} |g_i'(x+h/2) - g_i'(x-h/2)|\, dx \le 2\,|J_2(h)|\,\omega(h). \tag{3}$$

Из оценок (1)–(3) следует

$$\int_0^{2\pi} |f'(x+h/2) - f'(x-h/2)|\, dx \le 4n\,\omega(h),$$

откуда вытекает утверждение теоремы 1.

2. В дальнейшем нам потребуются следующие утверждения.

Теорема А. *Пусть* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности,* $n, r = 0, 1, 2, \ldots,$ $p \in [1, \infty]$ *и* $f(x) \in M^r_{2n,\omega}$. *Тогда*

$$\|f\|_p \geq \|f_{n,r}(\omega)\|_p.$$

В случае, когда $r \geq 1$ и $p = 1$, утверждение теоремы А получено В. П. Моторным и В. И. Рубаном [3], а для всех $r \geq 1$ и $p > 1$ — А. А. Лигуном [4]. При $r = 0$ это неравенство легко устанавливается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Теорема В. *Пусть выполнены условия теоремы* А *и неотрицательная функция* $f(x) \in M^r_{2n,\omega}$ *имеет* $2n$ *локальных экстремумов. Тогда справедливо следующее неравенство*:

$$\|f\|_p = \left\|\|f_{n,r}(\omega)\|_\infty + f_{n,r}(\omega)\right\|_p.$$

В случае, когда $p = 1, \infty$, теорема В доказана В. П. Моторным [5], в общем случае это утверждение установлено А. А. Лигуном [6, с. 55].

Теорема С [5]. *Каковы бы ни были* n *точек* $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 2\pi$, *существует неотрицательная функция* $f \in M^r_{2n,\omega}$, *обращающаяся в нуль в этих точках* $(n, r = 1, 2, \ldots)$.

Теорема D [7]. *Пусть* S_{m+1} — *сфера с центром в нуле в* $(m+1)$-*мерном пространстве* R_{m+1} *и* $\tau(\xi) = (\tau_1(\xi), \ldots, \tau_m(\xi))$ — *непрерывное* m-*мерное поле, заданное на сфере* S_{m+1}, *такое, что для всех* $\xi \in S_{m+1}$ $\tau(-\xi) = -\tau(\xi)$. *Тогда существует точка* $\xi_0 \in S_{m+1}$ *такая, что* $\tau(\xi_0) = 0$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были* $2n$ *точек* $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} \leq 2\pi$, *существует функция* $f(x) \in M^r_{2n,\omega}$, *обращающаяся в нуль в этих точках* $(n, r = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство теоремы 2 основано на идеях В. И. Рубана и фактически содержится в [3], однако для полноты изложения мы приведем полное доказательство.

Доказательство. Обозначим через S_m сферу с центром в нуле радиуса $\sqrt{2}\pi$ в m-мерном евклидовом пространстве R_m. Для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}) \in S_{2n}$ определим на периоде $[0, 2\pi)$ функцию $g_0(\xi, t)$ равенством

$$g_0(\xi, t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\xi_k \min\{\omega(2t - 2\eta_{k-1}), \omega(2\eta_k - 2t)\},$$

где $t \in [\eta_{k-1}, \eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$ и $\eta_k = \sum_{i=1}^k \xi_i^2$.

Далее для $i = 1, 2, \ldots, r-1$ введем в рассмотрение функции

$$g_i(\xi, t) = \int_0^t g_{i-1}(\xi, u)\,du - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^v g_{i-1}(\xi, u)\,du\,dv;$$

$$g_r(\xi, t) = \int_{x_1}^t g_{r-1}(\xi, u)\,du. \tag{4}$$

В случае, когда $r = 1$, определим функцию $g_1(\xi, t)$ равенством (4). Определим на сфере S_{2n} непрерывное $(2n-1)$-векторное поле $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \nu_2(\xi), \ldots, \nu_{2n-1}(\xi))$ следующим образом:

$$\nu_1(\xi) = \int_0^{2\pi} g_0(\xi, x)\,dx, \qquad \nu_i(\xi) = g_r(\xi, x_i), \qquad i = 2, 3, \ldots, 2n.$$

Так как $\nu(-\xi) = -\nu(\xi)$ для любого $\xi \in S_{2n}$, то в силу теоремы D существует вектор $\xi_* \in S_{2n}$ такой, что $\nu(\xi_*) = 0$, т. е. $\nu_i(\xi_*) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n-1$. Из условия

$$\nu_1(\xi_*) = \int_0^{2\pi} g_0(\xi_*, x)\,dx$$

следует, что 2π-периодическое продолжение функции $g_r(\xi_*, t)$ принадлежит $M^r_{2n,\omega}$. Кроме того, в силу (4) $g_r(\xi_*, x_1) = 0$ и $\nu_i(\xi_*) = g_r(\xi_*, x_i) = 0$ для всех $i = 2, \ldots, 2n$, что и требовалось доказать.

3. Для любой функции $f \in W^r H_1^\omega$, $i = 2, 3, \ldots$, рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{1} p_{kl} f^{(l)}(x_k), \tag{5}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, узлы $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 2\pi$, и коэффициенты p_{kl} произвольны. Как обычно, величину

$$R(W^r H_1^\omega, \{x_k\}, \{p_{kl}\}) = \sup_{f \in W^r H_1^\omega} \left| \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{1} p_{kl} f^{(l)}(x_k) \right|$$

будем называть погрешностью квадратурной формулы (5) на классе функций $W^r H_1^\omega$. Обозначим

$$R_n(W^r H_1^\omega) = \inf_{\{x_k\}, \{p_{kl}\}} R(W^r H_1^\omega, \{x_k\}, \{p_{kl}\}).$$

***Следствие* 1.** *Пусть $n, r = 1, 2, \ldots$ и $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$R_n(W^{r+1} H_1^\omega) \ge \frac{1}{4n} \big\| \|f_{n,r}(\omega)\|_\infty + f_{n,r}(\omega) \big\|_1.$$

Доказательство. В силу теоремы 2 каковы бы ни были узлы $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 2\pi$, существует неотрицательная функция $g \in M^r_{2n,\omega}$ такая, что $g(x_k) = g'(x_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, очевидно, $g^{(r)}(x)$ имеет $2n$ перемен знака на периоде, поэтому по теореме 1 $1/(4n)\, g(x) \in W^{r+1} H_1^\omega$. Таким образом,

$$R_n(W^{r+1} H_1^\omega) \ge \frac{1}{4n} \|g\|_1.$$

Оценивая снизу правую часть последнего неравенства с помощью теоремы B, получаем утверждение следствия 1.

4. Методом восстановления функции $f \in L_p$, $p \in [1, \infty]$, назовем любое отображение $S(v^n) = S(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n-мерного пространства R_n в пространство L_p, а набор $\Psi^n = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ из n линейных на L_p функционалов — информацией. Набор $\Psi^n(f) = \{\psi_1(f), \psi_2(f), \ldots, \psi_n(f)\}$ будем называть информацией о функции f, а $S(\Psi^n(f))$ — восстановлением функции f по информации Ψ^n.

Величину

$$R(f)_p = R(f, \Psi^n, S)_p = \|f - S(\Psi^n(f))\|_p$$

назовем погрешностью восстановления функции f методом S по информации Ψ^n в метрике пространства L_p, а величину

$$R(\mathcal{M}, \Psi^n, S)_p \overset{\text{def}}{=} \sup\{ R(f, \Psi^n, S)_p \mid f \in \mathcal{M}\}$$

— погрешностью восстановления методом S на классе $\mathcal{M}$ по информации Ψ^n.

В дальнейшем будем рассматривать только такие методы восстановления S: $R_n \to L_p$, для которых $S(\theta_1) = S(\theta_2)$, где θ_1 и θ_2 — нулевые элементы в пространствах R_n и L_p соответственно.

***Следствие* 2.** *Пусть* $n, r = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty]$ *и* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любого метода восстановления* S: $R_{2n} \to L_p$ *функций* $f \in L_p$ *по информации*

$$\Psi^{2n}(f) = \{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_{2n})\},$$

где $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n} \le 2\pi$ — *произвольные точки (узлы), справедливо неравенство*

$$R(W^{r+1}H_1^{\omega}, \Psi^{2n}, S)_p \ge \frac{1}{4n}\|f_{n,r}(\omega)\|_p.$$

Замечание. По-видимому, неравенства в следствии 1 при четных r и в следствии 2 при всех r являются точными и обращаются в равенства при равноотстоящем расположении узлов. Доказательство этого факта, на наш взгляд, не тривиально.

***Следствие* 3.** *Если* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности, то каков бы ни был метод восстановления* S: $R_{2n} \to L_p$, $p \in [1, \infty]$, *функций* $f \in L_p$ *по информации*

$$\Psi^{2n}(f) = \{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_n)\},$$

где $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le 2\pi$ — *произвольные точки (узлы), для всех* $n, r = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$R(W^{r+1}H_1^{\omega}, \Psi^{2n}, S)_p \ge \frac{1}{4n}\Big\| \|f_{n,r}(\omega)\|_\infty + f_{n,r}(\omega)\Big\|_p.$$

Утверждение следствия 2 легко следует из теорем 1, A и 2, а следствие 3 вытекает из теорем 1, B и C.

1. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15–26.
2. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 16–19.
3. *Моторный В. П., Рубан В. И.* Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L // Мат. заметки. – 1975. – **11**, № 4. – С. 531–543.
4. *Лигун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Там же. – 1980. – **27**, № 1. – С. 61–65.
5. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**, № 3. – С. 583–614.
6. *Лигун А. А.* Неравенства для полунорм и экстремальные задачи приближения функций полиномами и сплайнами: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 232 с.
7. *Borsuk K.* Drei Satze uber die n-dimentionale euklidishe Sphare // Fund. Math. – 1933. – **20**. – S. 177–191.

Получено 18.10.95