УДК 517.928

В. А. Плотников (Одес. ун-т),
П. М. Китанов (Юго-Зап. ун-т, Благоевград, Болгария)

ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСАМИ

We consider the averaging method for pulse quasidifferential equations in metric spaces.

Досліджується метод усереднення для імпульсних квазідиференціальних рівнянь в метричних просторах.

Метод усреднения и теория импульсных дифференциальных уравнений широко используются при исследовании многих прикладных задач [1 – 6]. В работе [6] содержится обоснование метода усреднения для дифференциальных и интегро-дифференциальных включений, в [7] — для квазидифференциальных уравнений [8] без импульсов, в [9] доказаны теоремы о непрерывной зависимости решений квазидифференциальных уравнений с импульсами.

В данной работе приводится обоснование метода усреднения для квазидифференциальных уравнений с импульсами.

Пусть X — локально компактное метрическое пространство с метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим на промежутке $0 \le t \le L\varepsilon^{-1}$ квазидифференциальное уравнение

$$\delta(x(t+h), \varphi(\varepsilon, h, t, x(t))) = \varepsilon h \alpha(\varepsilon, h), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $\alpha(\varepsilon, h)$ — бесконечно малая функция при $h \to 0$, отображение $\varphi\colon R^1 \times R^1 \times R^1 \times X \to X$ задает квазидвижение, т. е. выполнено следующее условие.

***Условие** D*. 1. *Аксиома начальных условий*: $\varphi(\varepsilon, 0, t, x) = x$.

2. *Аксиома квазиприпасовывания*:

$$\delta(\varphi(\varepsilon, \tau_1+\tau_2, t, x), \varphi(\varepsilon, \tau_2, t+\tau_1, \varphi(\varepsilon, \tau_1, t, x))) = \\ = \varepsilon(\tau_1+\tau_2)\alpha(\varepsilon, \tau_1+\tau_2).$$

3. *Аксиома непрерывности,* т. е. для любого $\eta > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что $\delta(\varphi(\varepsilon, \tau_1, t, x_1), \varphi(\varepsilon, \tau_2, t, x_2)) < \varepsilon\eta$ при $\delta(x_1, x_2) < \delta_1$, $|\tau_1 - \tau_2| < \delta_2$.

Решением уравнения (1) называется абсолютно непрерывное отображение $x\colon R^1 \to X$, удовлетворяющее (1) при $t \in [0, T)$.

Предположим, что существует отображение $\overline{\varphi}(\varepsilon, h, x)$ такое, что

$$\lim_{T \in \infty} \frac{1}{T}\delta(\overline{\varphi}(\varepsilon, T, x), \varphi(\varepsilon, T, t, x)) = 0. \tag{2}$$

Поставим в соответствие уравнению (1) следующее усредненное квазидифференциальное уравнение:

$$\delta(y(t+h), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y(t))) = \varepsilon h \alpha_1(\varepsilon, h), \tag{3}$$

где $\alpha_1(\varepsilon, h)$ — бесконечно малая функция при $h \to 0$.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q\{\varepsilon \in (0, \sigma],\ h \ge 0,\ t \ge 0,\ x \in P \subset X\}$ *выполнены следующие условия:*

1) *отображения* $\varphi(\varepsilon, h, t, x)$ *и* $\overline{\varphi}(\varepsilon, h, x)$ *удовлетворяют условию* D,

непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по h *с постоянной* $\varepsilon\lambda$ *и условию*

$$|\delta(\varphi(\varepsilon, h, t, x), \varphi(\varepsilon, h, t, y)) - \delta(x, y)| \le \varepsilon h\gamma\delta(x, y),$$
$$|\delta(\overline{\varphi}(\varepsilon, h, x), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y)) - \delta(x, y)| \le \varepsilon h\gamma\delta(x, y); \tag{4}$$

2) *равномерно относительно* t, x *существует предел* (2);

3) *решение квазидифференциального уравнения* (3) *существует при* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *и вместе с* ρ*-окрестностью принадлежит области* P.

Тогда для любого $\eta \in (0, \rho]$ *существует* $\varepsilon^0(\eta) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедлива оценка*

$$\delta(x(t, \varepsilon, x_0), y(t, \varepsilon, x_0)) \le \eta, \tag{5}$$

где $x(t, \varepsilon, x^0)$ *и* $y(t, \varepsilon, x^0)$ — *решения квазидифференциальных уравнений* (1) *и* (3) *соответственно с начальным условием* $x(0, \varepsilon, x^0) = y(0, \varepsilon, x^0) = x^0$.

Доказательство. Разобьем сегмент $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m частей точками $t_k = \dfrac{Lk}{\varepsilon m}$, $k = 0, 1, \ldots$. Построим обобщенные ломаные Эйлера

$$x^m(t, \varepsilon, x_0) = \varphi(\varepsilon, t - t_k, t_k, x^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$
$$y^m(t, \varepsilon, x_0) = \overline{\varphi}(\varepsilon, t - t_k, t_k, y^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Оценим

$$\begin{aligned} &\delta(x^m(t_k, \varepsilon, x_0), x(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \\ &\le \delta(\varphi(\varepsilon, h, t_{k-1}, x^m(t_{k-1}, \varepsilon, x_0)), \varphi(\varepsilon, h, t_{k-1}, x(t_{k-1}, \varepsilon, x_0))) + \\ &+ \delta(\varphi(\varepsilon, h, t_{k-1}, x(t_{k-1}, \varepsilon, x_0)), x(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \\ &\le (1 + \varepsilon h\gamma)\,\delta(x^m(t_{k-1}, \varepsilon, x_0), x(t_{k-1}, \varepsilon, x_0)) + \varepsilon h\alpha(\varepsilon, h) \le \\ &\le \frac{\alpha(\varepsilon, h)}{\gamma}[(1 + \varepsilon h\gamma)^{k+1} - 1] \le \frac{\alpha(\varepsilon, h)}{\gamma}(e^{\gamma L} - 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично получим

$$\delta(y^m(t_k, \varepsilon, x_0), y(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \frac{\alpha(\varepsilon, h)}{\gamma}(e^{\gamma L} - 1). \tag{7}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\delta(x^m(t, \varepsilon, x_0), x^m(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \\ &\le \delta(\varphi(\varepsilon, t - t_k, t_k, x^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \varphi(\varepsilon, 0, t_k, x^m(t_k, \varepsilon, x_0))) \le \varepsilon\lambda(t - t_k) \le \frac{\lambda L}{m}, \\ &\delta(y^m(t, \varepsilon, x_0), y^m(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \frac{\lambda L}{m}, \\ &\delta(y(t, \varepsilon, x_0), y(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \frac{\lambda L}{m}, \\ &\delta(x(t, \varepsilon, x_0), x(t_k, \varepsilon, x_0)) \le \frac{\lambda L}{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, из (6) – (8) следует, что для любого $\eta > 0$ существует такое $m_0(\eta)$, что при $m \geq m_0$ имеем

$$\delta(y(t, \varepsilon, x_0), y^m(t_k, \varepsilon, x_0)) \leq \frac{\eta}{4},$$
$$\delta(x(t, \varepsilon, x_0), x^m(t_k, \varepsilon, x_0)) \leq \frac{\eta}{4}. \tag{9}$$

Из условия 2 теоремы следует, что существует такая монотонно убывающая функция $f(T)$, что

$$\delta(\overline{\varphi}(\varepsilon, T, x), \varphi(\varepsilon, T, 0, x)) \leq \varepsilon T f(T),$$

где $f(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Оценим

$$\begin{aligned} &\delta(x^m(t_{k+1}, \varepsilon, x_0), y^m(t_{k+1}, \varepsilon, x_0)) = \\ &= \delta(\varphi(\varepsilon, h, t_k, x^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y^m(t_k, \varepsilon, x_0))) \leq \\ &\leq \delta(\varphi(\varepsilon, h, t_k, x^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \varphi(\varepsilon, h, t_k, y^m(t_k, \varepsilon, x_0))) + \\ &+ \delta(\varphi(\varepsilon, h, t_k, y^m(t_k, \varepsilon, x_0)), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y^m(t_k, \varepsilon, x_0))) \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon h \gamma)\, \delta(x^m(t_k, \varepsilon, x_0), y^m(t_k, \varepsilon, x_0)) + \varepsilon h f(h) \leq \frac{e^{\gamma L} - 1}{\gamma} f\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (10) следует, что при фиксированном m существует такое ε_0, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\delta(x^m(t_{k+1}, \varepsilon, x_0), y^m(t_{k+1}, \varepsilon, x_0)) < \frac{\eta}{2}. \tag{11}$$

Учитывая (9), (11), получаем (5). Из условия 3 теоремы следует, что решение $x(t, t_0, x_0)$ на сегменте $[0, L\varepsilon^{-1}]$ принадлежит области P.

Рассмотрим теперь квазидифференциальное уравнение (1) с импульсными воздействиями

$$\delta(x(t+h), \varphi(\varepsilon, h, t, x(t))) = \varepsilon h \alpha(\varepsilon, h), \quad t \neq \tau_i, \tag{12}$$
$$x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i)),$$

где $\{\tau_i = l_i/\varepsilon\}$ — заданная последовательность моментов времени.

Квазидифференциальному уравнению (12) поставим в соответствие усредненное квазидифференциальное уравнение

$$\delta(y(t+h), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y(t))) = \varepsilon h \alpha(\varepsilon, h), \quad t \neq \tau_i, \tag{13}$$
$$y(\tau_i + 0) = \psi_i(y(\tau_i)).$$

Теорема 2. *Пусть в области Q для уравнения* (12) *выполнены условия теоремы* 1 *и отображения $\psi_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной ν.*

Тогда для любого $\eta > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$\delta(x(t, \varepsilon, x_0), y(t, \varepsilon, x_0)) \leq \eta,$$

где $x(t, \varepsilon, x_0)$ и $y(t, \varepsilon, x_0)$ — решения квазидифференциальных уравнений (12) *и* (13) *соответственно с начальным условием $x(0, \varepsilon, x_0) = y(0, \varepsilon, x_0) = x_0$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\delta_i^- = \delta(x(\tau_i), y(\tau_i)), \qquad \delta_i^+ = \delta(x(\tau_i + 0), y(\tau_i + 0)).$$

Из теоремы 1 следует, что для любых η_1 и промежутка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что справедлива оценка

$$\delta(x(t, \varepsilon, z), y(t, \varepsilon, z)) \le \eta_1, \tag{14}$$

где $\tau_0 = 0$, $\tau_{p+1} = L\varepsilon^{-1}$, p — количество импульсов на сегменте $[0, Le^{-1}]$, $x(\tau_i, \varepsilon, z) = y(\tau_i, \varepsilon, z) = z \in P$.

Из теоремы 1 [9] следует справедливость для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ оценки

$$\delta(y(t, \varepsilon, z_1), y(t, \varepsilon, z_2)) \le e^{\gamma(\tau_{i+1} - \tau_i)} \delta(z_1, z_2), \tag{15}$$

где $y(\tau_i, \varepsilon, z_j) = z_j$, $j = 1, 2$.

Из (14), (15) имеем

$$\delta_i^+ = \delta(x(\tau_i + 0, \varepsilon, x_0), y(\tau_i + 0, \varepsilon, x_0)) =$$

$$= \delta(\psi_i(x(\tau_i, \varepsilon, x_0)), \psi_i(y(\tau_i, \varepsilon, x_0))) \le$$

$$\le \nu\delta(x(\tau_i, \varepsilon, x_0), y(\tau_i, \varepsilon, x_0)) = \nu\,\delta_i^-,$$

$$\delta_i^- \le \delta_{i-1}^+ e^{\gamma(\tau_i - \tau_{i-1})} + \eta_1, \qquad \delta_0^+ = 0.$$

Следовательно,

$$\delta(x(t, \varepsilon, x_0), y(t, \varepsilon, x_0)) \le C\eta_1. \tag{16}$$

Выбирая $\eta_1 = \eta / C$, из (16) получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим квазидифференциальное уравнение с нефиксированными моментами импульсных воздействий

$$\delta(x(t+h), \varphi(\varepsilon, h, t, x(t))) = \varepsilon h \alpha(\varepsilon, h), \qquad t \ne \tau_i(x(t)), \tag{17}$$

$$x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i)),$$

и соответствующее усредненное квазидифференциальное уравнение

$$\delta(y(t+h), \overline{\varphi}(\varepsilon, h, y(t))) = \varepsilon h \alpha(\varepsilon, h), \qquad t \ne \tau_i(y(t)), \tag{18}$$

$$y(\tau_i + 0) = \psi_i(y(\tau_i)).$$

Лемма. *Пусть в области Q для уравнения* (17) *выполнены все условия теоремы* 2 *и, кроме того,*

1) *функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной μ;*

2) *для любого $x \in P$ выполнены неравенства*

$$\tau_i(x) \ge \tau_i(\psi_i(x)). \tag{19}$$

Тогда при $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{\lambda\mu}\right)$ любое решение $x(t, \varepsilon, x_0)$ и $y(t, \varepsilon, x_0)$, лежащее в области P при $t \in [0, T]$, пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ один раз.

Доказательство. Предположим противное. Пусть некоторое решение $x(t, \varepsilon, x_0)$, начинающееся в некоторой точке $\psi_i(x_0)$ при $t = \tau_i(x_0) + 0$ пересекает данную поверхность $t = \psi_i(x)$ еще в некоторой точке (t_i^*, x^*), $t_i^* = \tau_i(x^*)$. Так как $t^* > \tau_i(x_0)$, то на промежутке $\tau_i(x_0) < t < t_i^*$ решение $x(t, \tau_i(x_0), \psi_i(x_0))$ непрерывно и

$$t_i^* - \tau_i(x_0) = \tau_i(x^*) - \tau_i(x_0) =$$
$$= (\tau_i(x^*) - \tau_i(\psi_i(x_0))) + (\tau_i(\psi_i(x_0)) - \tau_i(x_0)) \le$$
$$\le \mu\,\delta(x^*, \psi_i(x_0)) + \tau_i(\psi_i(x_0)) - \tau_i(x_0) \le$$
$$\le \mu\delta(x(t_i^*, \tau_i(x_0), \psi_i(x_0)), x(\tau_i(x_0), \tau_i(x_0), \psi_i(x_0))) + \tau_i(\psi_i(x_0)) - \tau_i(x_0) \le$$
$$\le \varepsilon\mu\lambda(t_i^* - \tau_i(x_0)) + \tau_i(\psi_i(x_0)) - \tau_i(x_0). \tag{20}$$

Из (20) имеем

$$(1-\varepsilon\mu\lambda)(t_i^* - \tau_i(x_0)) \le \tau_i(\psi_i(x_0)) - \tau_i(x_0). \tag{21}$$

Так как $1-\varepsilon\mu\lambda > 0$, $t_i^* - \tau_i(x_0) > 0$, то (21) противоречит (19). Аналогично доказывается справедливость леммы для решения $y(t, \varepsilon, x_0)$.

Пусть $x(t, \varepsilon, x_0)$ и $y(t, \varepsilon, y_0)$ — решения уравнений (17) и (18) — принадлежат вместе с ρ-окрестностью области P при $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$. Обозначим через τ_i^x, τ_i^y моменты пересечения решениями гиперповерхности $t = \tau_i(x)$.

Теорема 3. *Пусть в области Q для уравнения* (17) *выполнены все условия леммы.*

Тогда для любого $\eta > 0$ существуют такие $\varepsilon^0 > 0$ и $\delta^0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, $\delta \in (0, \delta^0]$ справедлива оценка

$$\delta(x(t, \varepsilon, x_0), y(t, \varepsilon, x_0)) \le \eta$$

при $t \in [0, T] \cap \{|t - \tau_i^x| \ge \delta\}$ и $\delta(x_0, y_0) \le \delta$.

Доказательство. Пусть $\tau_i^- = \min\{\tau_i^x, \tau_i^y\}$, $\tau_i^+ = \max\{\tau_i^x, \tau_i^y\}$. Предположим, что $\tau_i^- = \tau_i^y$, $\tau_i^+ = \tau_i^x$. Тогда

$$x(\tau_i^+ + 0, t_0, x_0) = \psi_i(x(\tau_i^+, t_0, x_0)),$$
$$y(\tau_i^+ + 0, t_0, y_0) = y(\tau_i^+, \tau_i^-, \psi_i(y(\tau_i^-, t_0, y_0))),$$
$$\delta(\psi_i(x(\tau_i^-, t_0, x_0)), \psi_i(x(\tau_i^+, t_0, x_0))) \le$$
$$\le \nu\delta(x(\tau_i^-, t_0, x_0), x(\tau_i^+, t_0, x_0)) \le \varepsilon\lambda\nu|\tau_i^+ - \tau_i^-|,$$
$$\delta(y(\tau_i^+, \tau_i^-, \psi_i(y(\tau_i^-, t_0, y_0))), \psi_i(y(\tau_i^-, t_0, y_0))) \le \varepsilon\lambda|\tau_i^+ - \tau_i^-|, \tag{22}$$
$$\delta(\psi_i(y(\tau_i^-, t_0, y_0)), \psi_i(x(\tau_i^-, t_0, x_0))) \le \nu\,\delta^-,$$
$$\delta_i^+ = \delta(\psi_i(x(\tau_i^+, t_0, x_0)), y(\tau_i^+, \tau_i^-, \psi_i(\tau_i^-, t_0, y_0))) \le$$
$$\le \delta(\psi_i(x(\tau_i^+, t_0, x_0)), \psi_i(x(\tau_i^-, t_0, x_0))) +$$
$$+ \delta(\psi_i(x(\tau_i^-, t_0, x_0)), \psi_i(y(\tau_i^-, t_0, y_0))) +$$
$$+ \delta(\psi_i(y(\tau_i^-, t_0, x_0)), y(\tau_i^+, \tau_i^-, \psi(y(\tau_i^-, t_0, x_0)))) \le$$
$$\le \varepsilon\lambda\nu|\tau_i^+ - \tau_i^-| + \nu\delta_i^- + \varepsilon\lambda|\tau_i^+ - \tau_i^-|.$$

Рассмотрим

$$|\tau_i^x - \tau_i^y| = |\tau_i(x(\tau_i^x, t_0, x_0)) - \tau_i(y(\tau_i^y, t_0, x_0))| \le$$
$$\le \mu\delta(x(\tau_i^x, t_0, x_0), y(\tau_i^y, t_0, x)) \le$$
$$\le \mu\delta(x(\tau_i^-, t_0, x_0), y(\tau_i^-, t_0, x_0)) + \mu\delta(x(\tau_i^x, t_0, x_0), x(\tau_i^-, t_0, x_0)) \le$$
$$\le \mu\delta_i^- + \varepsilon\mu\lambda|\tau_i^x - \tau_i^y|. \tag{23}$$

Из (23) имеем

$$|\tau_i^x - \tau_i^y| \le \frac{\mu\delta_i^-}{1-\varepsilon\lambda\mu}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22), получаем

$$\delta_i^+ \le \frac{\varepsilon\lambda\mu + \nu}{1-\varepsilon\lambda\mu}\delta_i^-. \tag{25}$$

Оценка (25) получается и при $\tau_i^- = \tau_i^x$, $\tau_i^+ = \tau_i^y$.

Из теоремы 1 и леммы 1 [9] о непрерывной зависимости решений от начальных условий следует, что для любого $\eta_1 > 0$ существует $\varepsilon^0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ справедлива оценка

$$\delta_1^- \le \eta_1, \qquad \delta_{i+1}^- \le \eta_1 + e^{\gamma(\tau_{i+1}^- - \tau_i^+)}\delta_i^+,$$
$$\delta(x(T, t_0, x_0), y(T, t_0, x_0)) \le \eta_1 + e^{\gamma(T-\tau_p)}\delta_p^+, \tag{26}$$

где p — число импульсов на сегменте $[0, T]$. Из (24)–(26) следует утверждение теоремы.

***Пример* 1.** Пусть $X = R^n$,

$$\varphi(\varepsilon, h, t, x) = x + \varepsilon\int_t^{t+h} f(s, x)\,ds,$$
$$\overline{\varphi}(h, x) = x + \varepsilon h\bar{f}(x), \tag{27}$$
$$\bar{f}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s, x)\,ds.$$

Тогда квазидифференциальные уравнения (12), (13), (27) соответствуют импульсным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\dot{x} = \varepsilon f(t, x), \qquad t \ne \tau_i(t),\\ x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i)),\\ \dot{y} = \varepsilon\bar{f}(y), \qquad t \ne \tau_i(y),\\ y(\tau_i + 0) = \psi_i(y(\tau_i)).\end{gathered} \tag{28}$$

Если функция $f(t, x)$ непрерывна, равномерно ограничена постоянной λ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной γ, тогда выполнены все условия теоремы 3 и из теоремы 3 следует обоснование метода усреднения для импульсных дифференциальных уравнений (28).

***Пример* 2.** Рассмотрим R — решение дифференциального включения

$$\dot{z} \in \varepsilon F(t, z), \quad t \neq \tau_i,$$
$$Z(\tau_i + 0) = \psi_i(Z(\tau_i)). \tag{29}$$

Здесь $z \in R^n$, $F\colon R^1 \times R^n \to \operatorname{conv}(R^n)$, $\psi_i = \operatorname{comp}(R^n) \to \operatorname{comp}(R^n)$, $Z\colon R^1 \to \to \operatorname{comp}(R^n)$ — R-решение дифференциального включения (29).

Определим в пространстве $X = \operatorname{comp}(R^n)$ отображения

$$\varphi(\varepsilon, h, t, x) = \bigcup_{z \in x} \left\{ z + \varepsilon \int_t^{t+h} F(s, z)\, ds \right\},$$
$$\overline{\varphi}(\varepsilon, h, x) = \bigcup_{z \in x} \{ z + \varepsilon h \overline{F}(z) \}, \tag{30}$$
$$\overline{F}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(s, x)\, ds,$$

где $x \in X$, $z \in R^n$, интеграл от многозначных отображений в (30) понимается в смысле Аумана, а сходимость — в смысле метрики Хаусдорфа.

***Пример* 3.** Пусть $X = \operatorname{conv}(R^n)$ и отображения $\varphi(\varepsilon, h, t, x)$ и $\overline{\varphi}(\varepsilon, h, x)$ заданы с помощью (27).

Тогда квазидифференциальное уравнение (12), (27) соответствует дифференциальному уравнению с производной Хукухары

$$\overset{t}{D} x(t) = \varepsilon f(t, x(t)), \quad t \neq \tau_i(x),$$
$$x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i)),$$

где $x\colon R^1 \to \operatorname{conv}(R^n)$, $f\colon R^1 \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{conv}(R^n)$, $\psi_i\colon \operatorname{conv}(R^n) \to \to \operatorname{conv}(R^n)$.

В этом случае из теоремы 3 следует теорема Боголюбова для импульсных дифференциальных уравнений с производной Хукухары.

***Пример* 4.** Пусть $X = R^n \times \operatorname{comp}(R^m) \times \operatorname{conv}(R^1)$ и отображение $\varphi(\varepsilon, h, t, x)$ задано следующим образом:

$$\varphi_1(\varepsilon, h, t, x) = x_1 + \varepsilon \int_t^{t+h} f(s, x)\, ds,$$
$$\varphi_2(\varepsilon, h, t, x) = \bigcup_{z \in x_2} \left\{ z + \varepsilon \int_t^{t+h} F(s, x_1, z, x_3)\, ds \right\},$$
$$\varphi_3(\varepsilon, h, t, x) = x_3 + \varepsilon \int_t^{t+h} g(s, x)\, ds,$$
$$\overline{\varphi}_1(\varepsilon, h, x) = x_1 + \varepsilon h \bar{f}(x), \tag{31}$$
$$\overline{\varphi}_2(\varepsilon, h, x) = \bigcup_{z \in x_2} \{ z + \varepsilon h \overline{F}(x_1, z, x_3) \},$$
$$\overline{\varphi}_3(\varepsilon, h, x) = x_3 + \varepsilon h \overline{g}(x),$$
$$x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i(x))).$$

Здесь

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1 \in R^n, \quad x_2 \in \operatorname{comp}(R^m), \quad x_3 \in \operatorname{conv}(R^n),$$

$$f\colon R^1 \times X \to R^n, \qquad F\colon R^1 \times R^n \times R^m \times \operatorname{conv}(R^1) \to \operatorname{conv}(R^1).$$

Тогда квазидифференциальное уравнение (12), (31) соответствует системе уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \varepsilon f(t, x_1, x_2, x_3), \qquad x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{z} \in \varepsilon F(t, x_1, z, x_3), \qquad z(0) \in x_{20}, \\ D x_3 = \varepsilon g(t, x_1, x_2, x_3), \qquad x_3(0) = x_{30}, \qquad t \neq \tau_i(x), \\ x(\tau_i + 0) = \psi_i(x(\tau_i)), \end{gathered} \tag{32}$$

где $z \in R^n$, $x_2\colon R^1 \to \operatorname{comp}(R^m)$ — R-решение соответствующего дифференциального включения.

Системы вида (32) в литературе не рассматривались.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
3. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
4. *Lakshmikantam V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1990. – 275 p.
5. *Bainov D. D., Kostadinov S. I., Nguyen van Minh.* Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations. – Singapore: Sci. Culture Technol. Publ., 1994. - 110 p.
6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев, Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
7. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Частичное усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1444–1449.
8. *Панасюк А. И.* О квазидифференциальных уравнениях в метрическом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1344–1353.
9. *Plotnikov V. A., Kitanov P.* Continuous dependence of solutions of quasidifferential equations with impulses // Discrete mathematics and applications. Research in mathematics. – 1995. – № 5. – P. 238–245.

Получено 05.02.96