УДК 517.956

С. А. Алдашев (Алматинский ин-т инженеров ж.-д. транспорта)

О МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИРИХЛЕ И ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

For the Lavrent'ev–Bitsadze generalized many-dimensional equation, we prove the one-valued solvability of solutions of the Dirichlet and Triciomi problems. We also establish the existence and uniqueness of solution of the Dirichlet problem which is considered in the hyperbolic part of a mixed domain.

Для узагальненого багатовимірного рівняння Лаврентьєва–Біцадзе доведено однозначні розв'язності рішення задач Діріхле і Трікомі. Встановлено також наявність і єдиність рішення задачі Діріхле, що розглядається в гіперболічній частині мішаної області.

1. Постановка задач и результаты. Пусть Ω_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $r = t + \varepsilon$, $r = 1 - t$, $0 \le t \le (1-\varepsilon)/2$, а при $t < 0$ — тороидальной поверхностью T_ε: $r^2 + t^2 + \varepsilon^2 = (1+\varepsilon)\, r$, где $r = |x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \ge 2$, $0 < \varepsilon < 1$.

Пусть далее D_ε — подобласть области Ω_ε, ограниченная при $t > 0$ конической поверхностью Γ_ε:

$$t = \varphi(r), \quad \varphi(\varepsilon) = \varphi(1) = 0,$$

$$\varphi(r) \in C^1([\varepsilon, 1]) \cap C^3((\varepsilon, 1)), \quad |\varphi'(r)| < 1,$$

а при $t < 0$ — поверхностью T_ε. Обозначим через D_ε^+ и D_ε^- части области D_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S^ε — общую часть границ областей D_ε^+ и D_ε^-, представляющую множество $\{t = 0,\ \varepsilon < r < 1\}$ точек из E_m. Части конусов $r = t + \varepsilon$, $r = 1 - t$, ограничивающих область Ω_ε, обозначим через S_ε и S_1 соответственно.

В областях Ω_ε и D_ε рассмотрим обобщенное многомерное уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv \Delta_x u - \operatorname{sgn} t\, u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$.

Рассмотрим следующие задачи Дирихле и Трикоми для уравнения (1).

Задача Д$_1$. Найти решение уравнения (1) в области D_ε^+, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \tau(x), \quad u|_{\Gamma_\varepsilon} = \psi(x). \tag{2}$$

Задача $Д_2$. Найти решение уравнения (1) в области D_ε при $t \neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma_\varepsilon} = \psi(x), \quad u|_{T_\varepsilon} = g(x). \tag{3}$$

Задача T. Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t \neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x), \quad u|_{T_\varepsilon} = g(x)$$

или

$$u|_{S_1} = \sigma_1(x), \quad u|_{T_\varepsilon} = g(x). \tag{4}$$

В случае $\varepsilon = 0$ впервые задача Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе изучалась в [1, 2], при этом вместо поверхности T_0 рассматривалась полусфера $r^2 + t^2 = 1$, $t > 0$. В работе [1] анонсируется корректность задачи T при $m = 2$. В [2] исследован осесимметрический случай задачи (1), (4). В [3] при ограничениях неравенственного типа на коэффициенты уравнения (1) доказана теорема единственности решения задачи (1), (4).

Для $\varepsilon > 0$ однозначные разрешимости сформированных задач при $a_i = b = c \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$, установлены в [4 – 6] (см. также [7]).

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ со сферическими $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$:

$$x_1 = r\cos\theta_1 = r p_1(\theta_1),$$

$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 = r p_2(\theta_1, \theta_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} = r p_{m-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$

$$x_m = r\sin\theta_1\sin\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} = r p_m(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$

$$0 \le \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \le \theta_i \le \pi, \quad i = 2, \ldots, m-1.$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, а $\tilde{S}^\varepsilon = \{(r,\theta) \in S^\varepsilon,\ \varepsilon < \rho < (1+\varepsilon)/2\}$.

Лемма 1 [8, с. 147]. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)\,Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом $f_n^k(r) = \int_\Gamma f(r,\theta)\,Y_{n,m}^k(\theta)\,d\Gamma$, где Γ — единичная сфера в E_m.

Через $\tau_n^k(r)$, $\psi_n^k(r)$, $g_n^k(r)$, $\tilde{a}_n^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения ряда (5) соответственно функций $\tau(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, $g(r,\theta)$, $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i p_i(\theta)\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$.

Введем множество функций:

$$M^l(S^\varepsilon) = \left\{ f(r,\theta)\colon f \in W_2^l(S^\varepsilon),\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left(\|f_n^k(r)\|^2_{C([\varepsilon,1])} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|f_n^k(r)\|^2_{C^2((\varepsilon,1))} \right)(\exp 2n^2) n^{2l} < \infty,\ l > \frac{3m}{2} \right\},$$

$$C_\alpha(D_\varepsilon) = \left\{ u(x,t)\colon u(x,0) = (|x|-\varepsilon)^\alpha \overline{u}(x,0),\ \overline{u} \in W_2^l(D_\varepsilon), \right.$$

$$\left. \alpha > \frac{m}{2} - 1,\ l \geq m+1 \right\}.$$

Пусть проекциями областей D_ε, D_ε^+, D_ε^- на плоскости (r, t) являются соответственно области H_ε, H_ε^+, H_ε^-.

Если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(\Omega_\varepsilon)$, $l \geq m-1$, $i = 1, \ldots, m$, то справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $\tau(r,\theta)$, $\psi(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon)$, *то задача* $Д_1$ *однозначно разрешима в классе* $W_2^l(D_\varepsilon^+)$, $l \geq m+1$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(r,\theta)$, $g(r,\theta) \in M^l(S^\varepsilon)$. *Тогда задача* $Д_2$ *в классе* $C_\alpha(\Omega_\varepsilon)$ *разрешима, причем единственным образом.*

Теорема 3. *Если* $\sigma_\varepsilon(r,\theta) \in W_2^l(\tilde{S}^\varepsilon)$, $\sigma_1(r,\theta) \in W_2^l(S^\varepsilon \setminus \tilde{S}^\varepsilon)$, $g(r,\theta) \in$ $\in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l \geq m+5$, *то задача T в классе функций* $C_\alpha(\Omega_\varepsilon)$ *имеет единственное решение.*

2. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах $r, \theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_{m-1}, t$ уравнение (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \sigma u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} +$$

$$+ b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \tag{6}$$

где

$$\sigma \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

При этом известно [8], что спектр оператора σ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$.

Так как $u \in W_2^l(D_\varepsilon^+)$, $l \geq m+1$, то в силу леммы 1 она разложима в ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} v_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

причем однозначно определяются

$$v_n^k(r,t) = \int_\Gamma u(r,\theta,t) Y_{n,m}^k(\theta) d\Gamma, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{8}$$

Подставим (7) в (6). Затем полученное выражение сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрируем по единичной сфере Γ. Тогда для v_n^k получим ряд

$$\rho_0^1 v_{0rr}^1 - \rho_0^1 v_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right) v_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 v_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 v_0^1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \left\{\rho_n^k v_{nrr}^k - \rho_n^k v_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^1\right) v_{nr}^k + \tilde{b}_n^k v_{nt}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\hat{a}_{in-1}^k - n\hat{a}_{in}^k)\right] v_n^k\right\} = 0. \tag{9}$$

Здесь мы использовали тот факт, что [8]

$$Y_{0,m}^1(\theta) = \text{const}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} Y_{n,m}^k(\theta) = \left.\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1} - np_i Y_{n,m}^k(\theta),$$

$Q_n^k(x) = r^n Y_{n,m}^k(\theta)$ — гармоническая функция от x, причем $\left.\dfrac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1}$ есть m-мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 v_{0rr}^1 - \rho_0^1 v_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 v_{0r}^1 = 0, \tag{10}$$

$$\rho_1^k v_{1rr}^k - \rho_1^k v_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k v_{1r}^k + \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k v_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1 v_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 v_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 v_0^1\right), \quad n=1, \quad k=\overline{1, k_n}, \tag{11}$$

$$\rho_n^k v_{nrr}^k - \rho_n^k v_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k v_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k v_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m \hat{a}_{in-1}^k v_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k v_{n-1t}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in-2}^k - (n-1)\hat{a}_{in-1}^k\right] v_n^k\right\}, \quad k=\overline{1, k_n}, \quad n=2,3,\ldots. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что если $\{v_n^k\}$, $k=\overline{1, k_n}$, $n=0,1,\ldots$, — решение системы (10)–(12), то оно является и решением уравнения (9). При этом из (7) и (8) вытекает, что другие решения (9) совпадают с указанным выше.

Далее из краевого условия (2) для функций $v_n^k(r,t)$ с учетом леммы 1 будем иметь

$$v_0^1(r,0) = \tau_0^1(r), \quad v_0^1(r,\varphi(r)) = \psi_0^1(r), \quad \varepsilon \le r \le 1, \tag{13}$$

$$v_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad v_n^k(r,\varphi(r)) = \psi_n^k(r), \quad k=\overline{1, k_n}, \quad n=1,2,\ldots. \tag{14}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дирихле в области

H_ε^+ для уравнений (10) – (12). Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10) – (12) можно представить в виде

$$v_{nrr}^k - v_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} v_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

где $f_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv 0$.

Используя результаты работы [6], в которой задача (15), (14) изучалась при $f_n^k(r) \equiv 0$, нетрудно установить однозначную разрешимость задачи (15), (14) в классе $C(\overline{H}_\varepsilon^+) \cap C^2(H_\varepsilon^+)$. Решив сначала задачу (10), (13), а затем (11), (14) при $n = 1$ и (11), (14) при $n = 2, 3, \ldots$, найдем все $v_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, показано, что

$$\int_\Gamma \rho(\theta) Lu \, d\Gamma = 0. \tag{16}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)$ плотна в $L_2(t + \varepsilon, 1 - t)$, $\rho(\theta) \in C^\infty(\Gamma)$ плотна в $L_2(\Gamma)$, $T(t)$ плотна в $L_2\left(0, \frac{1-\varepsilon}{2}\right)$. Тогда $f(r, \theta, t)$ плотна в $L_2(D_\varepsilon^+)$. Отсюда, а также из (16) следует, что

$$\int_{D_\varepsilon^+} f(r, \theta, t) Lu \, dD_\varepsilon^+ = 0, \qquad Lu = 0 \quad \forall (r, \theta, t) \in D_\varepsilon^+.$$

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ и на коэффициенты уравнения (1), можно показать, как в [6], что полученное решение $u(r, \theta, t)$ задачи $Д_1$ в виде (6) принадлежит искомому классу.

Следовательно, теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим тороидальные координаты (η, φ), $0 \le \eta \le \infty$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, связанные с декартовыми координатами (r, t) по формуле [7]

$$r = \frac{c \operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi}, \quad t = \frac{c \sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi} \Leftrightarrow \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{(r+c)^2 + t^2}{(r-c)^2 + t^2}, \tag{17}$$

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln \frac{r^2 + (t - ic)^2}{r^2 + (t + ic)^2}, \quad c \text{ — масштабный множитель.}$$

Из п. 2 вытекает, что задача (1), (3) сводится к задаче Дирихле в области H_ε для систем уравнений (10) – (12). При этом каждое уравнение этой системы представимо в виде

$$v_{nrr}^k - \operatorname{sgn} t \, v_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} v_{nr}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, \ldots, \tag{18}$$

где $f_n^k(r, t)$ определяется из предыдущих уравнений системы, при этом $f_0^1(r, t) \equiv 0$.

Уравнение (18) при $f_n^k(r, t) \equiv 0$ изучено в [4, 7]. При $t < 0$, аналогично [4, 7], уравнение (18) в тороидальных координатах (17) можно представить в виде

$$\omega_{n\eta\eta}^k + \omega_{n\varphi\varphi}^k + (m-1) \operatorname{cth}\eta \, \omega_{n\eta}^k + \left[\frac{(m-1)^2}{4} + \frac{\lambda_n}{\operatorname{sh}^2 \eta} \right] \omega_n^k = d_n^k(\eta, \varphi), \tag{19}$$

$$\omega_n^k(\eta,\varphi) = (\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi)^{(1-m)/2}\, v_n^k\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}, \frac{\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}\right],$$
$$d_n^k(\eta,\varphi)\operatorname{sh}\eta\,(\operatorname{ch}\eta - \cos\varphi)^{(m-3)/2} = f_n^k\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}, \frac{\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi}{\operatorname{ch}\eta-\cos\varphi}\right]. \tag{20}$$

При этом область $\overline{H}_\varepsilon^-$ переходит в область $\overline{G}_{\eta_0} = \{(\eta,\varphi):\ \eta_0 \le \eta \le \infty,\ 0 \le \le \varphi \le \pi,\ \eta_0 = \ln((1+\sqrt{\varepsilon})/(1-\sqrt{\varepsilon}))\}$, а краевое условие (3) в условие

$$\omega_n^k(\eta_0,\varphi) = \varphi_n^k(\eta_0,\varphi),$$
$$\varphi_n^k(\eta_0,\varphi) = (\operatorname{ch}\eta_0 - \cos\varphi)^{(1-m)/2}\, g_n^k\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{ch}\eta_0}{\operatorname{ch}\eta_0-\cos\varphi}\right), \quad 0\le\varphi\le\pi. \tag{21}$$

Известно [9], что система функций $\left\{\frac{1}{2}, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi,\ l=1,2,\ldots\right\}$ полна, ортогональна в $C([0,\pi])$, следовательно, и замкнута.

Отсюда следует, что функция $\omega_n^k(\eta,\varphi)$ разложима в ряд

$$\omega_n^k(\eta,\varphi) = \frac{\overline{\omega}_{n,0}^k(\eta)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[\overline{\omega}_{n,l}^k(\eta)\cos 2l\varphi + \overline{\overline{\omega}}_{n,l}^k(\eta)\sin 2l\varphi\right]. \tag{22}$$

Аналогично имеем

$$d_n^k(\eta,\varphi) = \frac{\overline{d}_{n,0}^k(\eta)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[\overline{d}_{n,l}^k(\eta)\cos 2l\varphi + \overline{\overline{d}}_{n,l}^k(\eta)\sin 2l\varphi\right],$$
$$\varphi_n^k(\eta_0,\varphi) = \frac{\overline{\varphi}_{n,0}^k(\eta)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[\overline{\varphi}_{n,l}^k(\eta_0)\cos 2l\varphi + \overline{\overline{\varphi}}_{n,l}^k(\eta_0)\sin 2l\varphi\right]. \tag{23}$$

Далее, подставляя (22) в (19), для коэффициентов $\overline{\omega}_{n,l}^k(\eta)$, $\overline{\overline{\omega}}_{n,l}^k(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$\overline{\omega}_{n,l\eta\eta}^k + (m-1)\operatorname{cth}\eta\,\overline{\omega}_{n,l\eta}^k - \left[\mu^2 + \frac{\lambda_n^2}{\operatorname{sh}^2\eta} - \frac{(m-1)^2}{4}\right]\overline{\omega}_{n,l}^k =$$
$$= \overline{d}_{n,l}^k(\eta), \quad m=2,3,\ldots,\quad \mu=2l,\quad l=0,1,2,\ldots,$$

которое можно переписать в виде

$$(1-s^2)\overline{\omega}_{nss}^k - 2(m+1)s\,\overline{\omega}_{ns}^k + \left[\nu(\nu+1) - m(m+1) - \frac{\lambda_n^2}{1-s^2}\right]\overline{\omega}_n^k =$$
$$= \overline{d}_{n,l}^k(\eta), \quad s=\operatorname{sh}\eta,\quad m=0,1,\ldots,\quad \nu=\mu-\frac{1}{2},\quad \mu=0,2,4,\ldots. \tag{24}$$

Вводя в (24) новую неизвестную функцию $V(s) = (s^2-1)^{m/2}\,\overline{\omega}_{n,l}^k$, получаем неоднородное уравнение Лежандра

$$(1-s^2)V_{ss} - 2sV_s + \left[\nu(\nu+1) - \frac{(n+m)^2}{1-s^2}\right]V = f(\eta),$$
$$f(\eta) = (-1)(s^2-1)^{m/2}\,\overline{d}_{n,l}^k(\eta),$$

которое имеет общее решение вида

$$V_{n,m,\nu}(s) = g_1(s)\int \frac{g_2(t)f(t)}{L(t)}dt -$$

$$- g_2(s)\int \frac{g_1(t)f(t)}{L(t)}dt + Ag_1(s) + Bg_2(s), \tag{25}$$

где A, B — произвольные постоянные, $L(s) = g_1(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2(s)$, а $g_1(s) = P_\nu^{n+m}(s)$, $g_2(s) = Q_\nu^{n+m}(s)$ — присоединенные функции Лежандра.

Так как $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ — линейные независимые функций, то, очевидно, $L(s) \neq 0$. Для функций $P_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)$, $Q_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)$ имеет место разложение [10], из которого вытекает, что $|P_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)| \to \infty$, $|Q_{\mu-1/2}^m(\operatorname{ch}\eta)| \to 0$ при $\eta \to \infty$. Поэтому, учитывая класс $C_\alpha(\Omega_\varepsilon)$ решения задачи (1), (3), в (25) следует положить $A = 0$. Постоянную B найдем из (21), (23). Действительно, из (22), (25) с учетом (21), (23) получим

$$B = \frac{(\operatorname{sh}\eta_0)^{m/2-1}}{Q_{\mu-1/2}^{n+m/2-1}(\operatorname{ch}\eta_0)}\overline{\psi}_{n,l}^k(\eta_0) -$$

$$- \frac{g_1(\operatorname{ch}\eta_0)}{g_2(\operatorname{ch}\eta_0)}\int \frac{g_2(t)f(t)}{L(t)}dt + \int \frac{g_1(t)f(t)}{L(t)}dt. \tag{26}$$

Таким образом, решение уравнения (19) записывается в виде ряда (22), в котором $\overline{\omega}_{n,l}^k(\eta)$, $\overline{\overline{\omega}}_{n,l}^k(\eta)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, определяются из (25), (26). Учитывая ограничения на заданную функцию $g(r, \theta)$, а также оценки [8, с. 147], можно показать, что $v_n^k \in C(\overline{H_\varepsilon^-}) \cap C^2(H_\varepsilon^-)$. Теперь из (22), (20) единственным образом можем найти $v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, задача (1), (3) сведена к задаче Дирихле в области H_ε^+ для уравнения (18) с данными $v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r)$, $v_n^k(r, \varphi(r)) = \psi_n^k(r)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, которая изучена в п. 1.

Далее, как и в случае теоремы 1, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Теорема 3 доказывается аналогично теоремам 2 и 1, с учетом результатов работы [7, гл. 1].

1. *Пулькин С. В.* Сингулярная задача Трикоми // Труды третьего Всесоюз. матем. съезда. – 1956. – **1**. – С. 65–66.
2. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, № 6. – С. 901–902.
3. *Каратопраклиев Г. Д.* О единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа и гиперболических уравнений в пространстве // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 59–63.
4. *Алдашев С. А.* Задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 568–572.
5. *Алдашев С. А.* О корректности задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Докл. АН Украины. – 1992. – № 3. – С. 5–7.
6. *Aldashev S. A.* On the correctness of Dirichlet problem for multimeasurable wave equation and equation of Lavrentiev–Bitsadze //Докл. НАН РК. – 1995. № 1.
7. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.

Получено 02.09.96