УДК 517.5

Б. В. Винницький, О. В. Шаповаловський
(Дрогобицький держ. пед. ін-т ім. І. Франка)

ПРО ЗРОСТАННЯ ФУНКЦІЙ, ЗОБРАЖЕНИХ РЯДАМИ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ, НА ДІЙСНІЙ ОСІ

For the Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(\lambda_n z)$, we found the conditions under which the inequality $|F(x)| \le \gamma(x), x \ge x_0$, implies the relation $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n \exp(\lambda_n z)| \le \gamma((1+o(1))x)$, $x \to +\infty$, where γ is a nondecreasing function on $(-\infty, +\infty)$.

Знайдено умови, за яких для ряду Діріхле $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(\lambda_n z)$ із нерівності $|F(x)| \le \gamma(x), x \ge x_0$, випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} |d_n \exp(\lambda_n z)| \le \gamma((1+o(1))x)$, $x \to +\infty$, де γ — неспадна функція на $(-\infty, +\infty)$.

Нехай ціла функція F зображена абсолютно і рівномірно збіжним на кожному компакті з $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(\lambda_n z), \tag{1}$$

де (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел таких, що

$$|\arg \lambda_n| \le \alpha_0 < \pi/2, \tag{2}$$

$$\tau := \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n/|\lambda_n| < \infty. \tag{3}$$

Нехай, крім цього,

$$\mathfrak{M}_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |d_n \exp(\lambda_n x)|, \qquad \rho = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\ln\ln \mathfrak{M}_F(x)}{x},$$

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - (z/\lambda_n)^2\right), \qquad S(x) = \sum_{|\lambda_n| \le x} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}, \qquad \tau_0 = \underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{S(x)}{\ln x},$$

$$\delta = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{|\lambda_n| \ln|\lambda_n|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}$$

і γ — додатна неспадна на $(-\infty; +\infty)$ функція. Через $K, K_1, K_2, \ldots, K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon), \ldots$ позначаємо додатні сталі.

Поводження рядів Діріхле на дійсній осі вивчалось в ряді робіт [1 – 5]. Мета даної статті — довести, зокрема, наступне твердження, яке є узагальненням одного результату із [3].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (2), (3) $\delta = 0$ *і* $\tau_0 < \infty$, $2\rho\tau_0 < 1$. *Тоді якщо* $|F(x)| \le \gamma(x)$, $x \ge x_0$, *то знайдуться стала* $\eta = \eta(\rho, \tau_0)$ *і послідовність* (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, *для яких*

$$\mathfrak{M}_F(x_k) \le \gamma((\eta + o(1))x_k), \qquad k \to +\infty. \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 нам будуть потрібні деякі допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай* $z = x + iy = r\exp(i\varphi)$ *і виконуються умови* (2), (3). *Тоді для добутку*

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(z/\lambda_n + z/\overline{\lambda}_n\right) \tag{5}$$

в кожному із кутів $\{z: -\pi/2 \le \arg z \le -\alpha_1 < -\alpha_0\}$ *і* $\{z: \alpha_0 < \alpha_1 \le \arg z \le \le \pi/2\}$ *виконується нерівність*

$$|H(z)| \ge K_1 \exp(2xS(r) - K_2 x). \tag{6}$$

Доведення. Нехай

$$n(t) = \sum_{|\lambda_n| \le t} 1, \qquad W_n(z) = \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(z/\lambda_n + z/\overline{\lambda}_n\right).$$

Тоді

$$\ln|H(z)| = \ln\left|\prod_{|\lambda_n| \le 8r} W_n(z)\right| + \ln\left|\prod_{|\lambda_n| > 8r} W_n(z)\right| \ge$$

$$\ge \sum_{|\lambda_n| \le 8r} \ln|W_n(z)| - \sum_{|\lambda_n| > 8r} |\ln|W_n(z)|| = I_1 - I_2.$$

Оцінимо I_1. Оскільки $|\lambda_n|^2 + r^2 \ge 2|\lambda_n| r$ і $\ln(1-x) \ge -x/(1-x)$ для $x \in [0; 1)$, то

$$\left|\frac{\lambda_n - z}{\overline{\lambda}_n + z}\right|^2 = 1 - \frac{4|\lambda_n| r \cos\varphi \cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2 + r^2 + 2|\lambda_n| r \cos(\varphi + \varphi_n)} \ge 1 - \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1+\cos(\varphi+\varphi_n)} \ge$$

$$\ge \exp\left(-\frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1+\cos(\varphi+\varphi_n)}\left(1 - \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1+\cos(\varphi+\varphi_n)}\right)^{-1}\right) = \exp\left(-\frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1-\cos(\varphi-\varphi_n)}\right) \ge$$

$$\ge \exp(-2K_3 \cos\varphi). \tag{7}$$

Враховуючи (3) і (7), маємо

$$I_1 \ge -2K_3 \cos\varphi\, n(8r) + 2xS(8r) \ge 2xS(r) - K_4 x. \tag{8}$$

За лемою 1 із [4] при $\operatorname{Re} z \ge 0$ і $|\lambda_n| > 8r$ виконується $|\ln|W_n(z)|| \le \le K_5 x r \operatorname{Re}\lambda_n / |\lambda_n|^3$. Тому, враховуючи (2) і (3), отримуємо

$$I_2 = \sum_{|\lambda_n| > 8r} |\ln|W_n(z)|| \le K_5 x r \sum_{|\lambda_n| > 8r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^3} \le K_5 x r \int_{8r}^{\infty} \frac{dn(t)}{t^2} \le K_6 x. \tag{9}$$

Із нерівностей (8) і (9) випливає (6), що завершує доведення леми.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (2), (3). *Тоді на деяких півколах* $C_k = = \{z: |z| = r_k,\ |\arg z| \le \pi/2\}$, $0 < r_k \uparrow +\infty$, *виконується нерівність* (6).

Доведення. Якщо z лежить в одному з кутів $\{z: -\pi/2 \le \arg z \le -\alpha_1 < < -\alpha_0\}$, $\{z: \alpha_0 < \alpha_1 \le \arg z \le \pi/2\}$, то твердження леми 2 випливає з леми 1. Розглянемо випадок, коли z лежить в куті $\{z: |\arg z| \le \alpha_1\}$. Маємо $H(z) = = L(z)/(l_1(z) l_2(z))$, де

$$l_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/\lambda_n) \exp(-z/\lambda_n),$$

$$l_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + z/\overline{\lambda}_n\right) \exp\left(-z/\overline{\lambda}_n\right).$$

Але [6, с. 199]

$$\left.\begin{aligned} |l_1(z)| &\le \exp\left(-\mathrm{Re}\left(z\sum_{|\lambda_n|\le r} 1/\lambda_n\right) + K_7 r\right), \\ |l_2(z)| &\le \exp\left(-\mathrm{Re}\left(z\sum_{|\lambda_n|\le r} 1/\overline{\lambda}_n\right) + K_8 r\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Крім цього [1, с. 41], знайдеться послідовність (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, така, що на колах $\{z: z = r_k\}$ виконується

$$|L(z)| \ge \exp(-K_9|z|). \tag{11}$$

Справедливість леми 2 випливає з наведених вище оцінок (10) і (11).

***Зауваження* 1.** Надалі вважатимемо, що якщо виконується (2), то послідовність (λ_n) перенумерована в порядку неспадання $\mathrm{Re}\,\lambda_n$.

Лема 3. *Нехай* $\tau < \infty$, $\delta = 0$ *і* $\tau_0 > 0$. *Тоді існує нерівна тотожно нулю ціла функція вигляду* (1), *для якої* $2\rho\tau_0 \le 1$, $|F(x)| = O(1)$ *при* $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Покажемо, що шуканою є функція

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(z\lambda_n)}{(1+\lambda_n)^2 H'(\lambda_n)}. \tag{12}$$

Розглянемо спочатку $H'(\lambda_n)$. Легко бачити, що

$$H'(\lambda_n) = L'(\lambda_n) / (l_1(\lambda_n) l_2(\lambda_n)). \tag{13}$$

З умови $\delta = 0$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$|L'(\lambda_n)| \ge \exp(-\varepsilon \mathrm{Re}\lambda_n \ln \mathrm{Re}\lambda_n), \quad n \ge n_0. \tag{14}$$

Зауважимо також, що

$$S(|\lambda_n|) = \sum_{|\lambda_k| \le |\lambda_n|} \frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} \ge \sum_{|\lambda_k| \le \mathrm{Re}\lambda_n} \frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} = S(\mathrm{Re}\lambda_n). \tag{15}$$

З (13), враховуючи (10), (14), (15), маємо

$$\frac{1}{\left|(1+\lambda_n)^2 H'(\lambda_n)\right|} \le K_1(\varepsilon) \exp\left(o(\mathrm{Re}\lambda_n \ln \mathrm{Re}\lambda_n) - 2\mathrm{Re}\lambda_n S(\mathrm{Re}\lambda_n)\right). \tag{16}$$

З умови $\tau_0 > 0$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$2S(\mathrm{Re}\lambda_n) \ge (\rho+\varepsilon)^{-1} \ln \mathrm{Re}\lambda_n, \quad n \ge n_0(\varepsilon).$$

Отже,

$$|F(z)| \le \sum_{n=1}^{\infty} K_2(\varepsilon) \exp\left(\mathrm{Re}\lambda_n \left(r/\cos\alpha_0 - (\rho+\varepsilon)^{-1} \ln \mathrm{Re}\lambda_n + \varepsilon \ln \mathrm{Re}\lambda_n\right)\right).$$

З умов (2) і (3) випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\mathrm{Re}\lambda_n) < \infty$. Тому ряд (12) абсолютно і рівномірно збіжний на кожному компакті з $\mathbb{C}$. Використовуючи рівність [1, с. 218]

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\lambda_n \ln \mathrm{Re}\lambda_n}{\ln|1/d_n|}, \tag{17}$$

з (16) і умови $\tau_0 > 0$ маємо, що $2\rho\tau_0 \le 1$. Далі, із леми 2 випливає (див., наприклад, [5]), що

$$F(x) = -(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(itx)\,dt}{(1+it)^2 H(it)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $|H(it)| = 1$, то звідси отримуємо, що $|F(x)| = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $N(x) = \max\{n : \operatorname{Re}\lambda_n \le \exp(\rho^*(x+1))\}$, $\rho^* = \rho + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ і $\sigma(x) = \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} |d_n| \exp(x \operatorname{Re}\lambda_n)$.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (2), (3) *і* $0 \le \rho < \infty$. *Тоді* $\sigma(x) \le K(\varepsilon) < +\infty$, $x \in [0; +\infty)$.

Дійсно, використовуючи (17), маємо

$$|d_n| \le K_3(\varepsilon) \exp\left(-(\rho^*)^{-1} \operatorname{Re}\lambda_n \ln \operatorname{Re}\lambda_n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$\sigma(x) \le K_3(\varepsilon) \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_n \left((\rho^*)^{-1} \ln \operatorname{Re}\lambda_n - x\right)\right) \le$$

$$\le K_3(\varepsilon) \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_n \left((\rho^*)^{-1} \ln \operatorname{Re}\lambda_{N(x)+1} - x\right)\right) \le$$

$$\le K_3(\varepsilon) \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \exp(-\operatorname{Re}\lambda_n) \le K_3(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\operatorname{Re}\lambda_n) = K(\varepsilon) < +\infty.$$

***Доведення теореми* 1.** Нехай (t_k), $0 < t_k \uparrow +\infty$, така послідовність, для якої $\lim_{k\to+\infty} S(t_k)/\ln t_k = \tau_0$. Нехай, крім цього, $x_k = (\rho^*)^{-1} \ln t_k - 1$ і $N = N(x_k)$. Тоді

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{S(\operatorname{Re}\lambda_N)}{x_k} \le \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{S\left(\exp\left(\rho^*(x_k+1)\right)\right)}{x_k} =$$

$$= \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{S(t_k)}{(\rho^*)^{-1}\ln t_k - 1} = \rho^* \tau_0. \tag{18}$$

Для коефіцієнтів квазіполінома

$$P_N(u) = \sum_{m=1}^{N} d_m \exp(\lambda_m u)$$

справедливими є оцінки [7, 5]

$$|d_m| \exp(x \operatorname{Re}\lambda_m) \le (2\operatorname{Re}\lambda_m)^{-1/2} (|b_N'(\lambda_m)|)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{x} |P_N(t)|^2\, dt \right)^{1/2}, \tag{19}$$

де

$$1 \le m \le N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b_N(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - z/\lambda_k}{1 + z/\bar\lambda_k}.$$

Далі, $(|b_N'(\lambda_m)|)^{-1} = 2\operatorname{Re}\lambda_m |Q_{N,m}|$, де

$$Q_{N,m} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne m}}^{\infty} \frac{1 + \lambda_m/\lambda_k}{1 - \lambda_m/\bar\lambda_k}.$$

Очевидно, що

$$\left|Q_{N,m}\right| = \frac{T_{N,m}}{U_m}\exp\left(2\operatorname{Re}\lambda_m\sum_{k=1}^{N}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} - 2\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_m}{|\lambda_m|}\right)^2\right), \tag{20}$$

де

$$1 \le m \le N, \qquad T_{N,m} = \prod_{k=N+1}^{\infty}|W_k(\lambda_m)|, \qquad U_m = \prod_{\substack{k=1\\ k\ne m}}^{\infty}|W_k(\lambda_m)|.$$

Враховуючи, що

$$L'(\lambda_m) = -2L_m(\lambda_m)/\lambda_m, \qquad L_m(w) = \prod_{\substack{k=1\\ k\ne m}}^{\infty}\left(1-(w/\lambda_k)^2\right),$$

маємо

$$U_m = \prod_{\substack{k=1\\ k\ne m}}^{\infty}\left|1-(\lambda_m/\lambda_k)^2\right|\prod_{\substack{k=1\\ k\ne m}}^{\infty}\left|\frac{\exp\left(\lambda_m/\lambda_k+\lambda_m/\overline{\lambda}_k\right)}{(1+\lambda_m/\lambda_k)\left(1+\lambda_m/\overline{\lambda}_k\right)}\right| =$$

$$= \frac{|\lambda_m L'(\lambda_m)|}{2|l_1(\lambda_m)l_2(\lambda_m)|}\left|\exp\left(-\lambda_m/\lambda_m-\lambda_m/\overline{\lambda}_m\right)\right|\left|1+\lambda_m/\lambda_m\right|\left|1+\lambda_m/\overline{\lambda}_m\right| \ge$$

$$\ge K_{10}\frac{|L'(\lambda_m)|}{|l_1(\lambda_m)l_2(\lambda_m)|}.$$

Звідси і з умови $\delta = 0$ і нерівностей (10) маємо

$$U_m \ge K_4(\varepsilon)\exp\left(2\operatorname{Re}\lambda_m S(\operatorname{Re}\lambda_m) - \varepsilon\operatorname{Re}\lambda_m\ln\operatorname{Re}\lambda_m\right), \quad 1 \le m \le N. \tag{21}$$

Оцінимо $T_{N,m}$ при $1 \le m \le N$. Маємо

$$\ln T_{N,m} = \sum_{k=N+1}^{\infty}\ln|W_k(\lambda_m)| \le \sum_{\substack{|\lambda_k|\le 8|\lambda_m|\\ \operatorname{Re}\lambda_k\ge\operatorname{Re}\lambda_N}}\ln|W_k(\lambda_m)| + \sum_{|\lambda_k|>8|\lambda_m|}\left|\ln|W_k(\lambda_m)|\right|.$$

Як і при доведенні леми 1 (див. нерівність (9)), одержуємо

$$\sum_{|\lambda_k|>8|\lambda_m|}\ln|W_k(\lambda_m)| \le K_{11}\operatorname{Re}\lambda_m.$$

Оскільки $\left|(\lambda_k-\lambda_m)/(\lambda_k+\overline{\lambda}_m)\right| \le 1$, то

$$\sum_{\substack{|\lambda_k|\le 8|\lambda_m|\\ \operatorname{Re}\lambda_k\ge\operatorname{Re}\lambda_N}}\ln|W_k(\lambda_m)| \le 2\operatorname{Re}\lambda_m\sum_{\substack{|\lambda_k|\le 8|\lambda_m|\\ \operatorname{Re}\lambda_k\ge\operatorname{Re}\lambda_N}}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} \le$$

$$\le 2\operatorname{Re}\lambda_m\sum_{\cos\alpha_0\operatorname{Re}\lambda_N\le|\lambda_k|\le 8|\lambda_m|}1/|\lambda_k| \le 2\operatorname{Re}\lambda_m\int_{\cos\alpha_0|\lambda_N|}^{8|\lambda_N|}\frac{dn(t)}{t} \le K_{12}\operatorname{Re}\lambda_m.$$

Отже,

$$T_{N,m} \le \exp\left(K_{13}\operatorname{Re}\lambda_m\right), \quad 1 \le m \le N. \tag{22}$$

Далі (нагадаємо, що послідовність (λ_n) перенумерована в порядку неспадання $\operatorname{Re}\lambda_n$),

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_k\le\operatorname{Re}\lambda_N}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} \le \sum_{|\lambda_k|\le\operatorname{Re}\lambda_N/\cos\alpha_0}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} = S(\operatorname{Re}\lambda_N) + O(1). \tag{23}$$

Отже, із (20) – (23) при $1 \le m \le N$ одержуємо

$$\left|Q_{N,m}\right| \le K_5(\varepsilon)\exp(\varepsilon \operatorname{Re}\lambda_m \ln \operatorname{Re}\lambda_m + 2\operatorname{Re}\lambda_m S(\operatorname{Re}\lambda_N)).$$

Внаслідок цього при $1 \le m \le N$ маємо

$$|d_m|\exp(x_k \operatorname{Re}\lambda_m) \le$$

$$\le K_6(\varepsilon)\exp(\varepsilon \operatorname{Re}\lambda_m \ln \operatorname{Re}\lambda_m + 2\operatorname{Re}\lambda_m S(\operatorname{Re}\lambda_N))\left(\int_{-\infty}^{x_k} |P_N(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Враховуючи (18), звідси отримуємо

$$|d_m|\exp(x_k \operatorname{Re}\lambda_m) \le K_6(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon \operatorname{Re}\lambda_m \ln \operatorname{Re}\lambda_m + 2\left(\rho^*\tau_0 + \varepsilon\right)x_k \operatorname{Re}\lambda_m\right) \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{x_k} |P_N(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \quad 1 \le m \le N. \tag{24}$$

Далі, використовуючи лему 4 і умови теореми 1, одержуємо

$$\int_{-\infty}^{x_k} |P_N(t)|^2\,dt \le \int_{-\infty}^{x_*} \mathfrak{M}_F^2(t)\,dt + \int_{x_*}^{x_k} |F(t) - \sigma(t)|^2\,dt \le$$

$$\le K_{12} + \int_{x_*}^{x_k} \left(|F(t)|^2 + 2|F(t)|\sigma(t) + \sigma^2(t)\right)dt \le$$

$$\le K_{12} + K_{13}\gamma^2(x_k)x_k \le K_{14}\gamma^2(x_k)x_k. \tag{25}$$

Із означення $N = N(x_k)$ випливає, що $\operatorname{Re}\lambda_n \le \exp\left(\rho^*(x_k+1)\right)$, $\rho^* = \rho + \varepsilon$. Тому приходимо до висновку, що

$$\max_{\operatorname{Re}\lambda_1 \le t \le \operatorname{Re}\lambda_N} \left(-2\rho^* x_k t + t\ln t\right) \le K_{15},$$

бо відповідна стаціонарна точка $t = \exp\left(2\rho^* x_k - 1\right)$ проміжку $[\operatorname{Re}\lambda_1; \operatorname{Re}\lambda_N]$ не належить. Тому, використовуючи (24) і (25), для досить малого $\varepsilon > 0$ одержуємо

$$\mathfrak{M}_F\left(\left(1 - 2\rho^*\tau_0 - (4+2\rho^*)\varepsilon\right)x_k\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| \exp\left(\left(1 - 2\rho^*\tau_0 - (4+2\rho^*)\varepsilon\right)x_k \operatorname{Re}\lambda_n\right) \le$$

$$\le \exp(-\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_1)\left(\sum_{n=1}^{N} \exp(-3\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_n)\exp(-2\rho^*\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_n) \times\right.$$

$$\left.\times \exp(-2\rho^*\tau_0 x_k \operatorname{Re}\lambda_n)\,|d_n|\exp(x_k \operatorname{Re}\lambda_n) + \sigma(x)\right) \le$$

$$\le \exp(-\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_1)\left(K_7(\varepsilon)\gamma(x_k)\sqrt{x_k}\sum_{n=1}^{N} \exp(-\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_n) \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left((-2\rho^*\varepsilon x_k + \varepsilon \ln \operatorname{Re}\lambda_n)\operatorname{Re}\lambda_n\right) + K(\varepsilon)\right) \le \exp(-\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_1) \times$$

$$\times \left(K_8(\varepsilon)\gamma(x_k)\sqrt{x_k}\sum_{n=1}^{N} \exp(-\varepsilon x_k \operatorname{Re}\lambda_n) + K(\varepsilon)\right) \le \gamma(x_k), \quad k \ge k_0. \tag{26}$$

Звідси випливає потрібне твердження.

***Зауваження* 2.** В теоремі 1 умову $2\rho\tau_0 < 1$ не можна, взагалі кажучи, замінити умовою $2\rho\tau_0 \leq 1$, оскільки тоді для функції F із леми 3 повинно виконуватись (беремо $\gamma(x) \equiv \text{const}$) $\mathfrak{M}_F(x) = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$, що неможливо.

***Зауваження* 3.** Нерівність (26) показує, що $\eta \leq 1/(1-2\rho\tau_0)$ і, отже, якщо $\tau_0 = 0$, то $\eta = 1$. Тому з теореми 1 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (2), (3) *і* $\delta = 0$, $\tau_0 = 0$, $0 \leq \rho < \infty$. *Тоді якщо* $|F(x)| \leq \gamma(x)$, $x \geq x_0$, *то існує послідовність* (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, *на якій виконується* $\mathfrak{M}_F(x_k) \leq \gamma((1+o(1))x_k)$, $k \to +\infty$.

З теореми 2 випливає наступне твердження, яке у випадку $\operatorname{Im}\lambda_n = 0$ доведене в [3].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (2), (3) *і* $\delta = 0$, $\tau_0 = 0$, $0 \leq \rho < \infty$. *Тоді існує послідовність* (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, *на якій*

$$|F(x_k)| = \mathfrak{M}_F((1+o(1))x_k), \quad k \to +\infty.$$

Дійсно, $|F(x)| \leq \mathfrak{M}_F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Припустимо, що твердження теореми 3 не виконуються. Тоді існує число $\alpha < 1$, для якого $|F(x)| \leq \mathfrak{M}_F(\alpha x)$, $x \geq x_0$. Тому, застосувавши теорему 2, маємо, що на деякій послідовності (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, виконується

$$\mathfrak{M}_F(x_k) \leq \mathfrak{M}_F((1+o(1))\alpha x_k), \quad k \to +\infty,$$

що неможливо.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* (2), (3), $\delta = 0$, $\rho < +\infty$ *і*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{S(t)}{\ln t} = 0. \tag{27}$$

Тоді якщо $|F(x)| \leq \gamma(x)$, $x \geq x_0$, *то* $\mathfrak{M}_F(x) \leq \gamma((1+o(1))x)$, $x \to +\infty$.

Дійсно, з самого початку доведення теореми 1 ми використовували послідовність (x_k) вигляду $x_k = (\rho^*)^{-1}\ln t_k - 1$, де $\rho^* = \rho + \varepsilon$ і (t_k) — послідовність, для якої

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{S(t_k)}{\ln t_k} = \tau_0.$$

В нашому випадку за (t_k) можна вибрати довільну послідовність, зокрема і таку, щоб $x_{k+1}/x_k \to 1$, $k \to +\infty$. Тоді при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ отримуємо

$$\mathfrak{M}_F(x) \leq \mathfrak{M}_F(x_{k+1}) \leq \gamma\big((1+o(1))x_{k+1}\big) \leq$$
$$\leq \gamma((1+o(1))x_k) \leq \gamma((1+o(1))x), \quad x \to +\infty.$$

Звідси випливає потрібний результат.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 535 с.
2. *Шеремета М. Н.* О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки. – 1983. – № 2. – С. 235–245.
3. *Винницкий Б. В., Сорокивский В. М.* О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 265–269.
4. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О полноте систем экспонент с весом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1695–1700.
5. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 882–888.
6. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
7. *Anderson J. M., Binmore K. G.* Coefficient estimates for lacunary power series and Dirichlet series. I // Proc. London Math. Soc. – 1968. – **18**, N 3. – P. 36–48.

Одержано 26.03.96