УДК 517.95

В. З. Чернецький (Львів. ун-т)

НЕПОКРАЩУВАЛЬНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ КУТОВОЇ ТОЧКИ *

Under the minimal conditions for the smoothness of coefficients of an equation, best possible estimates are obtained for solutions of a mixed boundary-value problem for linear nondivergent elliptic second order equations in a neighborhood of angular point, which belongs to the boundary of domain.

Одержано непокращувальні оцінки розв'язків мішаної задачі для лінійних недивергентних еліптичних рівнянь другого порядку в околі кутової точки межі області при мінімальних вимогах на гладкість коефіцієнтів рівняння.

В [1 – 6] вивчено поведінку в околі кутової точки межі області розв'язків мішаної задачі для еліптичних рівнянь другого порядку з гельдерівськими коефіцієнтами. У даній роботі одержані непокращувальні оцінки розв'язків мішаної задачі для лінійних недивергентних еліптичних рівнянь другого порядку в околі кутової точки межі області. Зауважимо, що наші умови на коефіцієнти є мінімально можливими, про що свідчать наведені приклади. Подібні результати для задачі Діріхле отримано в [7, 8].

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Введемо такі позначення: O — початок прямокутної системи координат; (r, ω) — полярні координати точки $x \in \mathbb{R}^2$ з полюсом в O; $G \subset \mathbb{R}^2$ — обмежена область із замкненою межею $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ такою, що $\partial G \setminus \{0\}$ — гладка крива, Γ_1 — зв'язна крива, що не містить кінців, і при цьому криві $\overline{\Gamma}_1$ та Γ_2 перетинаються в точці O під кутом ω_0; Ω — дуга, що вирізається на одиничному колі S сектором з вершиною в O;

$$G_a^b = G \cap \{(r, \omega) \mid 0 \le a < r < b;\ 0 \le \omega \le \omega_0\}$$

— прошарок в $\mathbb{R}^2$;

$$\Gamma_{1,a}^b = \partial G \cap \{(r, 0) \mid 0 \le a < r < b\};$$

$$\Gamma_{2,a}^b = \partial G \cap \{(r, \omega_0) \mid 0 \le a < r < b\};$$

$$\Gamma_{1,\varepsilon} = \Gamma_1 \setminus \Gamma_{1,0}^{\varepsilon}, \quad \Gamma_{2,\varepsilon} = \Gamma_2 \setminus \Gamma_{2,0}^{\varepsilon}, \quad \Gamma_a^b = \Gamma_{1,a}^b \cup \Gamma_{2,a}^b;$$

$$G_d = G \setminus G_0^d, \quad \Gamma_d = \partial G \setminus \Gamma_0^d, \quad d > 0;$$

$$\Omega_p = G_0^d \cap \{|x| = p\}, \quad 0 < p < d;$$

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — одиничний вектор нормалі до ∂G в точці x (в якій він існує), зовнішньої по відношенню до G; $r_\varepsilon(x)$ — квазівідстань: функція, що визначена таким чином: нехай $l = (l_1, l_2)$ — одиничний вектор, $\varepsilon l \notin G$, r — радіус-вектор точки $x \in \overline{G}$; покладемо $r_\varepsilon(x) = |r - \varepsilon l| \ne 0\ \forall \varepsilon > 0$; функція $r_\varepsilon(x)$ має властивості:

1) існує $h > 0$ таке, що виконуються нерівності:

а) $hr \le r_\varepsilon(x) \le r + \varepsilon\ \ \forall x \in \overline{G},\ \forall \varepsilon > 0$;

* Частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) (грант № GSU 051204).

б) $r_\varepsilon(x) \le r + \varepsilon \le \dfrac{2}{h} r_\varepsilon(x) \quad \forall\, x \in \overline{G}, \ \forall\, \varepsilon > 0;$

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} r_\varepsilon(x) = r.$

Визначимо такі функціональні простори: $C^l(\overline{G})$ — банахів простір функцій, що мають неперервні похідні в $\overline{G}$ до порядку $l \ge 0$ включно, якщо l ціле, і до порядку $[l]$, якщо l неціле, а похідні порядку $[l]$ задовольняють умову Гельдера з показником $l - [l]$; $|u|_{l,G}$ — норма елемента $u \in C^l(\overline{G})$; $L_p(G)$ — банахів простір функцій $u(x)$, вимірних на G і сумовних зі степенем $p \ge 1$, що мають скінченну норму $|u|_{p,G}$; $W^{k,p}(G)$ — соболєвський простір функцій, що складається із усіх елементів $L_p(G)$, які мають всі узагальнені похідні до порядку k включно, сумовні на G зі степенем p; $W^{k,2}(G) \equiv W^k(G)$; $W_0^k(G \cup \cup \Gamma_2)$ — банахів простір функцій, отриманий замиканням простору

$$C_0^k(G \cup \Gamma_2) = \{ f\colon f \in C^k(G),\ f|_{\Gamma_2} = 0 \}$$

в метриці $W^k(G)$; $V_{p,\alpha}^k(G)$ — ваговий соболєвський простір функцій $u(x)$, для яких скінченна норма

$$|u|_{V_{p,\alpha}^k(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p(|\beta|-k+\alpha/2)} |D^\beta u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \ge 1.$$

Нам будуть потрібні деякі відомі нерівності.

Нерівність Віртінгера. *Розглянемо задачу на власні значення*

$$\psi'' + \lambda^2 \psi = 0, \quad \omega \in (0, \omega_0),$$
$$\psi(\omega_0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \tag{1}$$

З варіаційного принципу випливає нерівність

$$\int\limits_0^{\omega_0} \psi^2 d\omega \le \frac{4\omega_0^2}{\pi^2} \int\limits_0^{\omega_0} |\psi'|^2 d\omega \qquad \forall\, \psi \in W^2(0, \omega_0),$$
$$\psi'(0) = 0, \quad \psi(\omega_0) = 0,$$

оскільки $\pi/(2\omega_0)$ *— найменше власне значення задачі* (1).

Зауваження. Константа в цій нерівності найкраща.

Наслідок. *Для довільної функції*

$$v(x) \in \left\{ W^2(G_\varepsilon),\ v|_{\Gamma_{2,\varepsilon}} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_{1,\varepsilon}} = 0 \right\}$$

для будь-яких $\varepsilon > 0$, β *виконується нерівність*

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} r^{\beta-2} v^2 dx \le \frac{4\omega_0^2}{\pi^2} \iint\limits_{G_\varepsilon} r^\beta |\nabla v|^2 dx$$

за умови, що інтеграл справа скінченний.

Це і наступні твердження доводяться так само, як і в [7, с. 202–206].

Узагальнена нерівність Харді – Віртінгера. *Для довільної функції*

$$v(x) \in \left\{ W^2(G_0^d),\ v|_{\Gamma_{2,0}^d} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_{1,0}^d} = 0 \right\}$$

виконується нерівність

$$\iint_{G_0^d} r^{\alpha-4} v^2 dx \le H(\omega_0, \alpha) \iint_{G_0^d} r^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx$$

$$\forall \alpha \le 2, \quad H(\omega_0, \alpha) = ((2-\alpha)^2/4 + \pi^2/4\omega_0^2)^{-1},$$

за умови, що інтеграл справа скінченний.

Наслідок. *Для довільної функції*

$$v(x) \in \left\{ W^2(G_0^d),\ v|_{\Gamma_{2,0}^d} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_{1,0}^d} = 0 \right\}$$

виконується нерівність

$$\iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-4} v^2 dx \le H(\omega_0, \alpha) \iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx, \quad \alpha \le 2.$$

Допоміжна нерівність. *Нехай*

$$v(x) \in \left\{ W^2(G_0^d),\ v|_{\Gamma_{2,0}^d} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_{1,0}^d} = 0 \right\}.$$

Тоді виконується нерівність

$$\iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} r^{-2} v^2 dx \le \frac{4\omega_0^2}{\pi^2} \iint_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla v|^2 dx.$$

2. Оцінки в соболєвських вагових просторах. Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} Lu = a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + a^i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \quad x \in G, \\ u|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Означення. *Під розв'язком задачі* (2) *будемо розуміти функцію*

$$u(x) \in W^2(G) \cap W_0^1(G \cup \Gamma_2),$$

яка задовольняє рівняння (2) *та другу крайову умову майже всюди.*

Припустимо, що виконуються такі умови:

а) умова рівномірної еліптичності:

$$\nu \xi^2 \le a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \mu \xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in R^2; \quad \nu, \mu = \text{const} > 0;$$

аа) $a^{ij}(0) = \delta_j^i$ — символ Кронеккера $(i, j = 1, 2)$;

ааа) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$ $(i, j = 1, 2)$; $a^i(x)$ $(i = 1, 2)$, $a(x)$ — вимірні в G функції, причому $a^i(x) \in L_p(G)$, $p > 1$; $a(x) \in L_2(G)$; для них виконується нерівність

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} |a^{ij}(x) - a^{ij}(0)|^2 \right)^{1/2} + |x| \left(\sum_{i=1}^{2} |a^i(x)|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ |x|^2 |a(x)| \le A(|x|), \quad x \in G_0^{r_0},$$

з $A(r)$ — визначеною при $r \geq 0$ невід'ємною монотонно зростаючою неперервною в нулі функцією, $A(0) = 0$;

б) $f(x) \in L_p(G) \cap L_2(G) \cap V^0_{2,2}(G)$, $p > 1$;

в) існують невід'ємні числа k_1, k_2 і $s > \pi / 2\omega_0$ такі, що

$$\|f\|_{V^0_{2,2}(G^\rho_0)} \leq k_1 \rho^s, \quad \rho \in (0, r_0), \tag{3}$$

$$\|f\|_{p, G^\rho_{\rho/2}} \leq k_2 \rho^{\pi/(2\omega_0) - 2 + 2/p}, \quad \rho \in (0, r_0). \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай $u(x)$ — розв'язок задачі (2) і виконуються умови а) – ааа). Припустимо також, що $f(x) \in V^0_{2,\alpha}(G)$, причому*

$$2 - \frac{\pi}{\omega_0} < \alpha \leq 2, \tag{5}$$

і виконується нерівність

$$\|f\|_{V^0_{2,\alpha}(G^\rho_{\rho/2})} \leq K \rho^{(\alpha-2)/2}, \quad \rho \in (0, r_0). \tag{6}$$

Тоді $u(x) \in V^2_{2,\alpha}(G)$ і справедлива оцінка

$$\|u\|_{V^2_{2,\alpha}(G)} \leq C(\|u\|_{2,G} + \|f\|_{V^0_{2,\alpha}(G)}),$$

де стала $C > 0$ залежить лише від величин ν, μ, α, ω_0, $\max\limits_{x \in \overline{G}} A(|x|)$ і від області G.

Доведення. Розглянемо два випадки: $\alpha = 2$ та $2 - \pi / \omega_0 < \alpha < 2$.

1. Випадок $\alpha = 2$. Домножимо обидві частини рівняння (2) на $u(x)$ і проінтегруємо по області G_ε, $\varepsilon > 0$. Використовуючи формулу Гріна та враховуючи крайові умови, отримуємо

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \leq -\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Omega_\varepsilon +$$

$$+ \iint\limits_{G_\varepsilon} u(-f(x) + (a^{ij}(x) - a^{ij}(0)) u_{x_i x_j} + a^i(x) u_{x_i} + a(x) u) dx. \tag{7}$$

Розглянемо функцію

$$M(\varepsilon) = \max_{x \in \overline{\Omega}_\varepsilon} |u(x)|.$$

За теоремою вкладення Соболєва $u(x) \in C^0(\overline{G})$. Оскільки $u(0) = 0$, то існує

$$\lim_{\varepsilon \to +0} M(\varepsilon) = 0.$$

Тоді за нерівністю Гельдера маємо

$$\left| \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Omega_\varepsilon \right| \leq \varepsilon M(\varepsilon) \int\limits_0^{\omega_0} \left| \frac{\partial u(\varepsilon, \omega)}{\partial r} \right| d\omega \leq$$

$$\leq \varepsilon M(\varepsilon) \omega_0^{1/2} \left| \int\limits_0^{\omega_0} \left(\frac{\partial u(\varepsilon, \omega)}{\partial r} \right)^2 d\omega \right|^{1/2}.$$

Тепер, застосовуючи нерівність Коші та умову ааа), з (7) одержуємо

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \le \varepsilon M(\varepsilon)\, \omega_0^{1/2} \left| \int\limits_0^{\omega_0} \left(\frac{\partial u(\varepsilon, \omega)}{\partial r} \right)^2 d\omega \right|^{1/2} +$$

$$+ \frac{\delta}{2} \iint\limits_{G_\varepsilon} r^{-2} u^2 dx + C_1 \iint\limits_{G_\varepsilon} A(|x|)(r^{-2} u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + r^{-2} u^2) dx +$$

$$+ \frac{1}{2\delta} \iint\limits_{G_\varepsilon} r^2 f^2 dx \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, \delta > 0. \tag{8}$$

Розглянемо дві множини $G_{\rho/4}^{2\rho}$ і $G_{\rho/2}^{3\rho/2} \subset G_{\rho/4}^{2\rho}$, $\rho > 0$. Зробимо перетворення координат $x = \rho x'$. Функція $w(x') = u(\rho x')$ задовольняє в $G_{1/4}^{2}$ рівняння

$$a_{ij}(\rho x') w_{x_i' x_j'} + \rho a_i(\rho x') w_{x_i'} + \rho^2 a(\rho x') w = \rho^2 f(\rho x'). \tag{9}$$

Використовуючи L_p-оцінки Шаудера [9] (теорема 15.3) всередині області і поблизу гладкого куска межі для рівняння (9), отримуємо

$$\iint\limits_{G_{1/2}^{3/2}} (w_{x_i' x_j'}^2 + |\nabla w_{x'}|^2) dx' \le C_2 \iint\limits_{G_{1/4}^{2}} (\rho^4 f^2(\rho x') + w^2) dx', \tag{10}$$

де константа $C_2 > 0$ залежить лише від ν, μ, $\sup\limits_{x \in G_{1/2}^{3/2}} A(|x|)$ і області G. Зауважимо, що оцінки Шаудера ми можемо застосовувати, оскільки в області $G_{1/4}^{2}$ кусок межі, де задано умову Діріхле, і кусок межі, де задано умову Неймана, лежать на деякій відстані один від одного. Повертаючись до старих змінних x, u маємо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{3\rho/2}} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2) dx \le C_3 \iint\limits_{G_{\rho/4}^{2\rho/2}} (r^2 f^2(x) + r^{-2} u^2) dx. \tag{11}$$

Оцінимо інтеграл по $[0, \omega_0]$ в (8). Застосовуючи теорему про середнє так само, як і в роботі [8] (див. теорему 1), одержуємо

$$\int\limits_0^{\omega_0} |\nabla u(\varepsilon, \omega)|^2 d\omega \le C_4 \varepsilon^{-2} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, r_0/2). \tag{12}$$

Отже,

$$\varepsilon M(\varepsilon)\, \omega_0^{1/2} \left(\int\limits_0^{\omega_0} \left(\frac{\partial u(\varepsilon, \omega)}{\partial r} \right)^2 d\omega \right)^{1/2} \le C_5 M(\varepsilon) = o(1)_{\varepsilon \to 0}. \tag{13}$$

Перейдемо до оцінки інтеграла в (8), що містить другі похідні. Для цього позначимо $G^{(k)} = G_{2^{-(k+1)}d}^{2^{-k}d}$. Зробимо заміну змінних у рівнянні (9):

$$x = (2^{-k} d) x', \qquad u((2^{-k} d) x') = w(x').$$

Тоді, покладаючи в (10) $\rho = 2^{-k} d$, маємо

$$\iint\limits_{G_{1/2}^{3/2}} (w_{x_i' x_j'}^2 + |\nabla w_{x'}|^2) dx' \le C_2 \iint\limits_{G_{1/4}^{2}} ((2^{-k} d)^4 f^2((2^{-k} d) x') + w^2) dx'. \tag{14}$$

Повернемося до старих змінних:

$$\iint\limits_{G^{(k)}} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2)\,dx \le C_6 \iint\limits_{G^{(k-1)} \cup G^{(k)} \cup G^{(k+1)}} (r^2 f^2(x) + r^{-2} u^2)\,dx. \quad (15)$$

Просумуємо отримані нерівності по $k = 0, 1, 2, \ldots, [\log_2(d/4\varepsilon)] + 1$. В результаті одержимо

$$\iint\limits_{G_{4\varepsilon}^{d}} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2)\,dx \le C_6 \iint\limits_{G_{\varepsilon}^{2d}} (r^2 f^2 + r^{-2} u^2)\,dx. \quad (16)$$

На підставі нерівності (11), виконуючи перетворення, аналогічні таким при отриманні оцінки (12), дістаємо

$$\iint\limits_{G_{\varepsilon}^{4\varepsilon}} r^2 u_{xx}^2\,dx \le C_7. \quad (17)$$

Покладаючи $G_\varepsilon = G_\varepsilon^{4\varepsilon} \cup G_{4\varepsilon}^{d} \cup G_d$, маємо

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} A(r) r^2 u_{xx}^2\,dx \le C_7 A(4\varepsilon) + A(2d) \iint\limits_{G_\varepsilon^{2d}} (r^2 f^2(x) + r^{-2} u^2)\,dx +$$

$$+ C_8(\alpha, d, \operatorname{diam} G) \max_{r \in [d, \operatorname{diam} G]} A(r) \iint\limits_{G_d} u_{xx}^2\,dx, \quad 0 < \varepsilon < \frac{d}{4}.$$

Оскільки $A(4\varepsilon) = o(1)_{\varepsilon \to 0}$, то з (8) одержуємо

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |\nabla u|^2\,dx \le o(1)_{\varepsilon\to 0} + C_9(\delta + A(2d)) \iint\limits_{G_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + r^{-2} u^2)\,dx +$$

$$+ C_{10} \iint\limits_{G_d} (u_{xx}^2 + |\nabla u|^2)\,dx + C_{11} \iint\limits_{G} r^2 f^2\,dx + C_{12} \|u\|_{2,G}^2 \qquad \forall\, \delta > 0. \quad (18)$$

На підставі наслідку з нерівності Віртінгера та L_2-оцінки Шаудера, беручи δ та d достатньо малими, дістаємо

$$\iint\limits_{G_d} (u_{xx}^2 + |\nabla u|^2)\,dx \le C_{13} \iint\limits_{G_{d/2}} (u^2 + f^2)\,dx. \quad (19)$$

Враховуючи також оцінку

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} r^2 u_{xx}^2\,dx \le C_{14} \iint\limits_{G_{\varepsilon/4}} (r^2 f^2(x) + r^{-2} u^2)\,dx,$$

що отримується аналогічно оцінці (16), маємо

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + r^{-2} u^2)\,dx \le C_{15}\Big(\|u\|_{2,G}^2 + \|f\|_{V_{2,\alpha}^0}^2 \Big),$$

причому C_{15} не залежить від ε. Переходячи тепер до границі при $\varepsilon \to +0$, на основі теореми Фату отримуємо твердження теореми.

2. Випадок $2 - \pi/\omega_0 < \alpha < 2$. Зауважимо, що $V_{2,\alpha}^0(G) \subset V_{2,\beta}^0(G) \ \ \forall\, \beta \ge \alpha$. З умови теореми випливає, що $f(x) \in V_{2,2}^0(G)$. Тоді згідно з доведеним у випадку $\alpha = 2$ отримуємо, що $u(x) \in V_{2,2}^2(G)$ і, отже,

$$\iint\limits_G (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + r^{-2} u^2)\, dx \le \text{const}.$$

Звернемося знову до нерівності (14). Використовуючи властивості функції $r_\varepsilon(x)$ та повертаючись до старих змінних, одержуємо нерівність

$$\iint\limits_{G^{(k)}} r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} u_{xx}^2\, dx \le$$

$$\le C_{16} \iint\limits_{G^{(k-1)} \cup G^{(k)} \cup G^{(k+1)}} (r_\varepsilon^\alpha f^2(x) + r^{-2} r_\varepsilon^{\alpha-2} u^2)\, dx. \tag{20}$$

Просумовуючи нерівності (20) по $k = 0, 1, 2, \ldots$, остаточно отримуємо оцінку

$$\iint\limits_{G_0^d} r^2 r_\varepsilon^{\alpha-2} u_{xx}^2\, dx \le$$

$$\le C_{16} \iint\limits_{G_0^{2d}} (r_\varepsilon^\alpha f^2(x) + r^{-2} r_\varepsilon^{\alpha-2} u^2)\, dx. \tag{21}$$

Домножуючи обидві частини рівняння (2) на $r_\varepsilon^{\alpha-2} u(x)$ і інтегруючи по області G із застосуванням формули інтегрування за частинами, маємо

$$\iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\, dx = \frac{(2-\alpha)^2}{2} \iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\, dx +$$

$$+ \iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-2} u(-f(x) + (a^{ij}(x) - a^{ij}(0)) u_{x_i x_j} + a^i(x) u_{x_i} + a(x) u)\, dx +$$

$$+ \frac{2-\alpha}{2} \int\limits_{\partial G} r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2 (x_k - \varepsilon l_k) \cos(\mathbf{n}, x_k)\, d\sigma. \tag{22}$$

Згідно з припущеннями ааа) і нерівністю Коші, зображуючи G як $G_0^d \cup G_d$, з (22) будемо мати

$$\iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{\delta}{2} \iint\limits_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\, dx + \frac{(2-\alpha)^2}{2} \iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\, dx +$$

$$+ 2A(d) \iint\limits_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + r^{-2} u^2)\, dx +$$

$$+ C(\delta) \iint\limits_G r_\varepsilon^\alpha f^2\, dx + C_{17} \iint\limits_{G_d} (u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + u^2)\, dx +$$

$$+ \frac{2-\alpha}{2} \int\limits_{\partial G} r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2 (x_k - \varepsilon l_k) \cos(\mathbf{n}, x_k)\, d\sigma. \tag{23}$$

Застосуємо узагальнену нерівність Харді – Віртінгера для того, щоб перенести другий доданок у ліву частину. Для цього вимагатимемо, щоб

$$\frac{(2-\alpha)^2}{2} H(\alpha, \omega_0) < 1.$$

Ця нерівність виконується завдяки вимозі (5) щодо α в умові теореми. Оскільки ми вже маємо оцінку (21) та допоміжну нерівність, то

$$\iint\limits_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2}(r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2 + r^{-2}u^2)\,dx \le$$

$$\le C_{18}\left(\iint\limits_{G_0^{2d}} r_\varepsilon^{\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx + \iint\limits_G r_\varepsilon^\alpha f^2\,dx\right). \tag{24}$$

Враховуючи ще раз оцінку (19), наслідок з узагальненої нерівності Харді – Віртінгера та зауважуючи, що згідно з означенням G_d

$$\iint\limits_{G_d} r_\varepsilon^{\alpha-4} u^2\,dx \le C_{19}\iint\limits_{G_d} u^2\,dx,$$

з (23), (24) дістаємо

$$\iint\limits_G r_\varepsilon^{\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx \le C_{20}(A(d)+\delta)\iint\limits_{G_0^d} r_\varepsilon^{\alpha-2}|\nabla u|^2\,dx +$$

$$+ C_{21}\|u\|_{2,G}^2 + C_{22}\|f\|_{2,G_{d/2}}^2 + C_{23}\iint\limits_G r_\varepsilon^\alpha f^2\,dx +$$

$$+ \frac{2-\alpha}{2}\int\limits_{\partial G} r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k)\,d\sigma. \tag{25}$$

Використовуючи зображення $\partial G = \Gamma_{1,0}^d \cup \Gamma_{2,0}^d \cup (\partial G_d \setminus \Omega_d)$, записуємо

$$\int\limits_{\partial G} r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{1,0}^d\cup\Gamma_{2,0}^d} r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k)\,d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\partial G_d\setminus\Omega_d} r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k)\,d\sigma.$$

Розглянемо перший доданок. Оскільки

$$u|_{\Gamma_{2,0}^d} = 0, \quad \cos(\mathbf{n},x_1)|_{\Gamma_{1,0}^d} = 0, \quad \cos(\mathbf{n},x_2)|_{\Gamma_{1,0}^d} = -1, \quad x_2|_{\Gamma_{2,0}^d} = 0,$$

то очевидно, що

$$r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k) = \varepsilon l_2 r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2 < 0$$

(ми врахували, що $l_2 < 0$). Другий інтеграл можна оцінити таким чином (застосовуючи нерівність Коші та нерівність Шаудера (19)):

$$\int\limits_{\partial G_d\setminus\Omega_d} r_\varepsilon^{\alpha-4}u^2(x_k-\varepsilon l_k)\cos(\mathbf{n},x_k)\,d\sigma \le C_{24}\int\limits_{\partial G_d} u^2\,d\sigma \le$$

$$\le C_{25}\int\limits_{G_d}(u^2+|\nabla u|^2)\,dx \le C_{26}\int\limits_{G_d}(u^2+f^2)\,dx. \tag{26}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді*

$$\iint\limits_G r_\varepsilon^\alpha f^2\,dx \le K_{15}\iint\limits_G r^\alpha f^2\,dx + o(1)_{\varepsilon\to 0}, \qquad K_{15} = \mathrm{const}, \quad \alpha \le 2.$$

Доведення. Нехай $\alpha \le 0$. Тоді, використовуючи властивість 1 функції r_ε (див. означення), можемо записати

$$\iint_G r_\varepsilon^\alpha f^2\,dx \;\le\; h^\alpha \iint_G r^\alpha f^2\,dx\,.$$

Якщо ж $\alpha > 0$, то

$$\iint_G r_\varepsilon^\alpha f^2\,dx \;\le\; \iint_G (r+\varepsilon)^\alpha f^2\,dx \;=$$

$$= \iint_G r^\alpha f^2\,dx \;+\; \iint_G \left((r+\varepsilon)^\alpha - r^\alpha\right) f^2\,dx\,.$$

Доведемо, що другий інтеграл є $o(1)_{\varepsilon\to 0}$. Розглянемо

$$\psi(r) = (r+\varepsilon)^\alpha - r^\alpha, \quad r \in (0, d_G),$$

де $d_G = \mathrm{const} = \mathrm{diam}\,(G)$. Очевидно, що при $\alpha < 1$ функція ψ монотонно спадна, а при $1 < \alpha < 2$ — монотонно зростаюча. Тоді

$$\psi(r) \le \max\{\varepsilon^\alpha, (d_G+\varepsilon)^\alpha - d_G^\alpha\}\,.$$

Отже, враховуючи, що $f \in L_2(G)$, одержуємо

$$\iint_G \left((r+\varepsilon)^\alpha - r^\alpha\right) f^2\,dx \;\le\; C_{28} \max\{\varepsilon^\alpha, (d_G+\varepsilon)^\alpha - d_G^\alpha\} \;=\; o(1)_{\varepsilon\to 0}.$$

Лему доведено.

Тепер застосуємо до останнього доданка (25) оцінку (26). За лемою 1 отримуємо оцінку

$$\iint_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx \;\le\; C_{29}\left(A(d) + \delta\right) \iint_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx \;+$$

$$+\; C_{30}\|u\|_{2,G}^2 \;+\; C_{31}\|f\|_{V_{2,\alpha}^0} \;+\; o(1)_{\varepsilon\to+0}, \qquad \delta > 0.$$

Тоді, вибираючи d і δ так, щоб $C_{29}(A(d) + \delta) < 1/3$, маємо

$$\iint_G r_\varepsilon^{\alpha-2} |\nabla u|^2\,dx \;\le\; o(1)_{\varepsilon\to+0} \;+\; C_{32}\|u\|_{2,G}^2 \;+\; C_{33}\|f\|_{V_{2,\alpha}^0(G)}.$$

Зауважимо, що C_{32} і C_{33} не залежать від ε, тому ми можемо перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ (використовуючи теорему Фату), що разом з нерівністю (21) та допоміжною нерівністю (див. п. 1) доводить твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай $u(x)$ — розв'язок задачі* (2) *і виконуються умови а) – в) з функцією $A(r)$, неперервною за Діні в нулі. Нехай відома величина*

$$M_0 = \max_{x\in\overline{G}} |u(x)|\,.$$

Тоді $u(x) \in V_{2,2}^2(G)$ і справедлива оцінка

$$\|u\|_{V_{2,2}^2(G_0^\rho)} < C\rho^{\pi/(2\omega_0)}, \qquad 0 < \rho < d, \tag{27}$$

де стала $C > 0$ залежить лише від величин ν, μ, d, $A(d)$, M_0, s, ω_0, $\mathrm{mes}\,G$, $\int_0^d t^{-1} A(t)\,dt$, $\|f\|_{V_{2,2}^0(G)}$.

Доведення. Аналогічне [7] (див. ч. 1, теорема 1.2).

3. L_p-оцінки других похідних розв'язку. Точні оцінки модуля розв'язку та його аргументу.

Теорема 3. *Нехай $u(x)$ — розв'язок задачі* (2) *і виконуються умови а)–в), а також усі умови теореми* 2. *Тоді існують $d > 0$, C_0, C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ такі, що виконуються твердження:*

1) $|u(x)| \le C_0 |x|^{\pi/(2\omega_0)}$, $\quad x \in G_0^\rho$, $\quad \rho \in (0, d)$;

2) *якщо* $p > 2$, $0 < \omega_0 < \pi/2$, *то*

$$|\nabla u(x)| \le C_1 |x|^{\pi/(2\omega_0)-1}, \quad x \in G_0^\rho; \quad \rho \in (0, d);$$

3) *якщо або* $0 < \omega_0 \le \pi/4$ *і* $p > 1$, *або* $\pi/4 < \omega_0 < 2\pi$, $1 < p < 4\omega_0/(4\omega_0 - \pi)$, *то* $u(x) \in V_{p,0}^2(G)$ *і при цьому*

$$\|u\|_{V_{p,0}^2(G_0^\rho)} \le C_2 \rho^{\pi/(2\omega_0)-2+2/p}, \quad \rho \in (0, d);$$

4) *якщо* $p \ge 4\omega_0/(4\omega_0 - \pi)$, *то для всіх* $x, y \in G_0^\rho$

$$|u(x) - u(y)| \le C_3 |x-y|^{\pi/(2\omega_0)}, \quad \pi/2 < \omega_0 < 2\pi,$$

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \le C_4 |x-y|^{\pi/(2\omega_0)-1}, \quad \pi/4 < \omega_0 < \pi/2, \quad \rho \in (0, d);$$

5) *якщо* $\pi/4 < \omega_0 < 2\pi$, $\omega_0 \ne \pi/2$, $p \ge 4\omega_0/(4\omega_0 - \pi)$, *то* $u \in C^{\pi/(2\omega_0)}(\overline{G}_0^d)$; *якщо* $\omega_0 = \pi/2$, $p = 2$, *то* $u \in C^{1-\varepsilon}(\overline{G}_0^d)$ $\forall \varepsilon > 0$.

Доведення. За теоремою вкладення методом кілець Кондратьєва спочатку встановлюємо нерівність

$$|u(x)|^2 \le C_1 \iint_{G_0^\rho} (r^2 u_{xx}^2 + |\nabla u|^2)\, dx, \quad |x| = \rho \le d. \tag{28}$$

Користуючись цією нерівністю і теоремою 2 отримуємо перше твердження нашої теореми:

$$|u(x)| \le C_0 |x|^{\pi/(2\omega_0)}, \quad x \in G_0^\rho, \quad \rho \in (0, d).$$

Перейдемо до доведення інших тверджень. Розглянемо дві множини $G_{\rho/4}^{2\rho}$ і $G_{\rho/2}^{\rho} \subset G_{\rho/4}^{2\rho}$, $\rho > 0$. Зробимо перетворення координат $x = \rho x'$. Функція $w(x') = \rho^{-\pi/(2\omega_0)} u(\rho x')$ задовольняє в $G_{1/2}^1$ рівняння

$$a_{ij}(\rho x') w_{x_i' x_j'} + \rho a_i(\rho x') w_{x_i'} + \rho^2 a(\rho x') w = \rho^{2-\pi/(2\omega_0)} f(\rho x'). \tag{29}$$

За теоремою вкладення Соболєва маємо

$$\sup_{\substack{x', y' \in G_{1/2}^1, \\ x' \ne y'}} \frac{|w(x') - w(y')|}{|x' - y'|^\beta} \le C_2 \|w\|_{W^{2,2}(G_{1/2}^1)} \qquad \forall \beta \in (0, 1), \tag{30}$$

$$\sup_{\substack{x', y' \in G_{1/2}^1, \\ x' \ne y'}} |\nabla' w| + \sup_{\substack{x', y' \in G_{1/2}^1, \\ x' \ne y'}} \frac{|\nabla' w(x') - \nabla' w(y')|}{|x' - y'|^{1-2/p}} \le$$

$$\le C_3 \|w\|_{W^{2,p}(G_{1/2}^1)} \qquad \forall p > 2, \tag{31}$$

де ∇' — градієнт у координатах x'. Повертаючись до змінних x, u, на підставі теореми 2 отримуємо

$$\sup_{\substack{x, y \in G^1_{1/2}, \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\beta}} \le C_4 \rho^{\pi/(2\omega_0)} \quad \forall \beta \in (0, 1). \tag{32}$$

Тепер застосуємо L_p-оцінку Шаудера всередині області та поблизу гладкого куска межі для розв'язку рівняння (29):

$$\|w\|^p_{W^{2,p}(G^1_{1/2})} \le C_5(\nu, \mu, A(1)) \iint\limits_{G^2_{1/4}} (|\rho^{2-\pi/(2\omega_0)} f(\rho x')|^p + |w(x')|^p)\, dx'. \tag{33}$$

Враховуючи цю оцінку та переходячи до старих змінних в (31), маємо

$$\sup_{x \in G^{\rho}_{\rho/2}} |\nabla u| + \rho^{1-2/p} \sup_{\substack{x, y \in G^{\rho}_{\rho/2}, \\ x \neq y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^{1-2/p}} \le$$

$$\le C_6 \left(\rho^{1-2/p} \|f\|_{p, G^{\rho}_{\rho/2}} + \left(\iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} r^{-p-2} |u|^p\, dx \right)^{1/p} \right). \tag{34}$$

Далі, завдяки доведеному твердженню 1

$$\iint\limits_{G^{2\rho}_0} r^{-p-2} |u|^p\, dx \le C_7 \iint\limits_{G^{2\rho}_0} r^{-p-2+\pi p/(2\omega_0)+1}\, dr\, d\omega \le$$

$$\le C_7 \left(\frac{\omega_0}{p(\pi/(2\omega_0) - 1)} \right) (2\rho)^{(\pi/(2\omega_0)-1)p}, \quad \omega_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

З (34), (35) на основі умови (4) одержуємо такі оцінки:

$$\sup_{x \in G^{\rho}_{\rho/2}} |\nabla u(x)| \le C_8 \rho^{\pi/(2\omega_0)-1}, \quad \omega_0 < \frac{\pi}{2}, \quad p > 2; \tag{36}$$

$$\sup_{\substack{x, y \in G^{\rho}_{\rho/2}, \\ x \neq y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^{1-2/p}} \le C_9 \rho^{\pi/(2\omega_0)-2+2/p}, \quad \omega_0 < \frac{\pi}{2}, \quad p > 2. \tag{37}$$

Покладаючи в (36) $|x| < 3\rho/4$, отримуємо друге твердження теореми.

Нехай тепер $\rho \ge 4\omega_0/(4\omega_0 - \pi)$. Якщо $\omega_0 < \pi/2$, то з нерівності (37) маємо

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \le C_{10} \rho^{\theta} |x-y|^{\pi/(2\omega_0)-1-\theta} \quad \forall x, y \in G^{\rho}_{\rho/2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{2\omega_0} - 2 + \frac{2}{p} \le 0.$$

За означенням $G^{\rho}_{\rho/2}$: $|x - y| \le 2\rho$ і, отже, $|x - y|^{\theta} \ge (2p)^{\theta}$, оскільки $\theta \le 0$. Тому

$$\sup_{\substack{x, y \in G^{\rho}_{\rho/2}, \\ x \neq y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^{\pi/(2\omega_0)-1}} \le 2^{-\theta} C_{10}. \tag{38}$$

Розглянемо тепер $x, y \in G_0^d$ і довільне $\rho \in (0, d)$. Якщо $x, y \in G_{\rho/2}^{\rho}$, то виконується (38). Якщо $|x-y| \geq \rho = |x|$, то згідно з другим твердженням теореми отримуємо

$$\frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^{\pi/(2\omega_0)-1}} \leq 2\rho^{1-\pi/(2\omega_0)} |\nabla u(x)| \leq 2C_{11} \tag{39}$$

(всюди вважалось $|x| > |y|$). Нерівності (38) і (39) дають нам шукану оцінку

$$\sup_{\substack{x, y \in G_0^d, \\ x \neq y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x-y|^{\pi/(2\omega_0)-1}} \leq \text{const}. \tag{40}$$

Ця нерівність разом з оцінками доведених тверджень 1 та 2 означає, що

$$u \in C^{\pi/(2\omega_0)}(\overline{G}_0^d).$$

Аналогічно викладеному вище з формули (32) у випадку $\omega_0 = \pi/2$, $p = 2$ дістаємо, що $u \in C^{1-\varepsilon}(\overline{G}_0^d)$ $\forall \varepsilon > 0$.

Тепер використаємо L_p-оцінку Шаудера (33) для рівняння (29), з якої з урахуванням умов теореми при поверненні до старих змінних випливає така нерівність:

$$\|u\|^p_{V^2_{p,0}(G^{\rho}_{\rho/2})} \leq C_5 \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} (r^{-2p}|u|^p\, dx + \rho^{(\pi/(2\omega_0)-2+2/p)p})\, dx \qquad \forall p > 1. \tag{41}$$

Крім того,

$$\iint\limits_{G_0^{2\rho}} r^{2p}|u|^p\, dx \leq C_{12} \iint\limits_{G_0^{2\rho}} r^{(\pi/(2\omega_0)-2)p}\, dx \leq C_{12}\,\omega_0 \int\limits_0^{2\rho} r^{(\pi/(2\omega_0)-2)p+1}\, dr \leq$$

$$\leq C_{12} \frac{\omega_0}{2 + p(\pi/(2\omega_0)-2)} (2\rho)^{(\pi/(2\omega_0)-2+2/p)p}. \tag{42}$$

Очевидно, що виникає умова $2 + p(\pi/(2\omega_0) - 2) > 0$. З нерівностей (41) та (42) отримуємо третє твердження теореми. Теорему доведено.

4. Приклади. Наведемо приклади, які свідчать про точність оцінок модуля розв'язку та про те, що умова Діні в нулі на $A(r)$ є суттєвою для справедливості тверджень теореми. Нехай область G лежить всередині кута

$$G_0 = \{(r, \omega) \mid r > 0;\ 0 < \omega < \omega_0\},$$

$\omega_0 \in (0, \pi/2)$; $O \in \partial G$, і в деякому околі точки O межа ∂G співпадає зі сторонами кута $\omega = 0$ та $\omega = \omega_0$ (надалі, де потрібно, застосовуємо функцію-зрізку).

***Приклад* 1.** Розглянемо в області G задачу

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u(r, \omega_0) = 0, \qquad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \omega} = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Перейшовши до полярних координат і застосувавши метод Фур'є, отримаємо нетривіальний частковий розв'язок $u = C\rho^{\pi/(2\omega_0)} \cos(\pi\omega/(2\omega_0))$. Явний вигляд розв'язку задачі (43) свідчить про те, що показник степеня $\pi/(2\omega_0)$ в теоремах 2 та 3 *не можна збільшити!* У цьому сенсі оцінки непокращувальні.

Приклад 2. Функція

$$u(r, \omega) = r^{\pi/(2\omega_0)} (\ln 1/r)^{(\pi-2\omega_0)/(\pi+2\omega_0)} \cos(\pi\omega/(2\omega_0))$$

в куті G_0 задовольняє рівняння

$$a^{ij}(x) u_{x_i x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{44}$$

де

$$a^{11} = 1 - \frac{4\omega_0}{\pi - 2\omega_0} \frac{y^2}{r^2 \ln(1/r)}, \quad a^{12} = a^{21} = \frac{4\omega_0}{\pi + 2\omega_0} \frac{xy}{r^2 \ln(1/r)},$$

$$a^{22} = 1 - \frac{4\omega_0}{\pi + 2\omega_0} \frac{x^2}{r^2 \ln(1/r)}, \quad r > 0, \quad a^{ij}(0) = \delta_i^j \quad (x = x_1, \ y = y_2),$$

та крайові умови

$$u(r, \omega_0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \omega} = 0.$$

В області G_0^d, $d < e^{-2}$, рівняння рівномірно еліптичне зі сталими еліптичності $\mu = 1$, $\nu = 1 - 2/\ln(d^{-1})$. Крім того,

$$A(r) = \frac{4\omega_0}{\pi + 2\omega_0} \frac{1}{\ln(r^{-1})}, \quad \int_0^d \frac{A(r)}{r} dr = +\infty,$$

тобто функція $A(r)$ в нулі не задовольняє умову Діні. Разом з тим $a^{ij}(x)$ неперервні в точці нуль. З явного вигляду $u(x)$ маємо

$$\begin{gathered} |u(x)| \le C|x|^{\pi/(2\omega_0)-\varepsilon}, \\ \|u\|_{V^2_{2,2}(G_0^\rho)} \le C\rho^{\pi/(2\omega_0)-\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Цей приклад показує, що замінити в оцінках (45) $\pi/(2\omega_0) - \varepsilon$ на $\pi/(2\omega_0)$ неможливо без додаткового припущення щодо модуля неперервності старших коефіцієнтів рівняння в точці O: він повинен задовольняти умову Діні.

Приклад 3. Функція $u(r, \omega) = r^{\pi/(2\omega_0)} \ln(1/r) \cos(\pi\omega/(2\omega_0))$ є розв'язком у куті G_0 задачі

$$\begin{gathered} \Delta u + \frac{\pi}{r^2 \omega_0 \ln(r^{-1})} u = 0, \\ u(r, \omega_0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \omega} = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Умови a) – aaa) виконуються з функцією

$$A(r) = \frac{\pi}{\omega_0 \ln(r^{-1})},$$

для якої умова $\lim\limits_{r \to 0+} A(r) = 0$ виконується, а умова Діні в нулі — ні. З явного вигляду $u(x)$ отримуємо, що вірні лише оцінки (45). Цей приклад показує, що *припущення теорем 2 та 3 на молодші коефіцієнти рівняння також є суттєвим.*

***Приклад* 4.** Розглянемо задачу

$$\Delta u = -\frac{\pi}{\omega_0} r^{\pi/(2\omega_0)-2} \cos\frac{\pi\omega}{2\omega_0},$$
$$u(r, \omega_0) = 0, \quad \frac{\partial u(r,0)}{\partial \omega} = 0. \tag{47}$$

Очевидно, що розв'язком такої задачі буде

$$u(r, \omega) = r^{\pi/(2\omega_0)} \ln(1/r) \cos(\pi\omega/(2\omega_0)),$$

Слід зазначити, що права частина такого рівняння задовольняє умову (3) з $s = \pi/(2\omega_0)$ (потрібно $s > \pi/(2\omega_0)$). Явний вигляд розв'язку показує, що для нього виконуються лише оцінки (45), тобто *умова* (3) *суттєва.*

Автор висловлює подяку доктору фізико-математичних наук М. В. Борсуку за постійну увагу до даної роботи.

1. *Azzam A.* Smootheness properties of solutions of mixed boundary value problems for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains // Ann. Polon. Math. – 1981. – **40**. – P. 81–93.
2. *Azzam A., Kreyszig E.* Über das gemischte Randwertproblem for ellische Gleichunden in n-dimensionalen Gebieten mit Kanten // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Al Math. – 1981. – **5**. – P. 431–436.
3. *Azzam A., Kreyszig E.* On solution of elliptic equations satisfying mixed boundary conditions // SIAM J. Math. Anal. – 1982. – **13**. – P. 254–262.
4. *Grisvard P.* Elliptic problem in nonsmooth domains. – Boston: Pitman, 1985. – 410 p.
5. *Lieberman G. M.* Mixed boundary value problems for elliptic and parabolic differential equations of second order // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – **113**. – P. 422–440.
6. *Lieberman G. M.* Optimal Hölder regularity for mixed boundary value problem // Ibid. – 1989. – P. 572–586.
7. *Борсук М. В.* Первая краевая задача для эллиптических уравнений второго порядка в областях с коническими или угловыми точками на границе: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Львов, 1993. – 248 с.
8. *Борсук М. В.* Неулучшаемые оценки задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 10. – С. 1446–1462.
9. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит, 1962. – 203 с.

Одержано 06.02.96