УДК 519.21

С. І. Подолинний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗБУРЕННЯ ОДНОРІДНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЛОКАЛЬНО НЕОБМЕЖЕНИМИ ВЕКТОРНИМИ ПОЛЯМИ

We construct solutions of homogeneous pseudodifferential equations of parabolic type perturbed by locally unbounded vector fields. We investigate some properties of these solutions.

Побудовано розв'язок однорідних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу, збурених локально необмеженими векторними полями, і досліджуються деякі його властивості.

Нехай задано псевдодиференціальні оператори $B, B_1, \ldots, B_m$ з символами $b(x, \sigma), b_1(x, \sigma), \ldots, b_m(x, \sigma)$. Ці символи є однорідними функціями аргументу $\sigma \in \mathbb{R}^d$ порядку $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ відповідно, причому вважаємо, що $1 < \alpha < 2$, $0 < \alpha_1 < \alpha, \ldots, 0 < \alpha_m < \alpha$. Щодо залежності функцій $b, b_1, \ldots, b_m$ від аргументу $x \in \mathbb{R}^d$, будемо вважати, що виконуються умови [1], які гарантують існування фундаментального розв'язку задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Bu(t, x) - \sum_{k=1}^{m} B_k u(t, x) = f(t, x), \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d \tag{2}$$

(на f і φ накладаються такі ж умови, як і в [1]). Цей фундаментальний розв'язок позначимо через $g(s, x, t, y)$, де $0 \le s < t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Оскільки символи $b, b_1, \ldots, b_m$ не залежать від t, то функція $g(\tau, x, t + \tau, y)$ (де $\tau \ge 0$) не залежить від τ, тому позначимо $g(t, x, y) = g(\tau, x, t + \tau, y)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Розглянемо наступне інтегро-диференціальне рівняння :

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z)(\nabla_z G(\tau, z, y), a(z))\, dz. \tag{3}$$

Тут функція $G(t, x, y)$ є невідомою, а $a(z)$ — деяка задана $\mathbb{R}^d$-значна вимірна функція на $\mathbb{R}^d$.

Формально продиференціювавши рівняння (3) по x і поклавши $V(t, x, y) = \nabla_z G(t, x, y)$ (це $\mathbb{R}^d$-значна функція), одержимо інтегральне рівняння

$$V(t, x, y) = \nabla_z g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z)(V(\tau, z, y), a(z))\, dz. \tag{4}$$

Теорема 1. *Якщо* $\mathbb{R}^d$*-значна вимірна функція* $a(x)$ *на* $\mathbb{R}^d$ *така, що*

$$\| a \|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} | a(x) |^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

для деякого $p > \dfrac{d}{\alpha - 1}$, *то існує єдиний неперервний розв'язок* $V(t, x, y)$ *рівняння* (4), *що задовольняє нерівність*

$$|V(t,x,y)| \le L_T\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t^{1-1/\alpha}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right) \qquad (5)$$

в кожній області вигляду $(0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ *для* $T<+\infty$, *де* L_T *є константою (вона залежить від* $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1},d,p,m,T$ *і* $\|a\|_p$). *Тут і далі* $\alpha_{m+1}=\alpha-\lambda$, *де* $\lambda\in(0,1)$ — *константа, визначена в* [1].

Згідно з [1], символи $b,b_1,\ldots,b_m$ повинні задовольняти умову Гельдера по змінній x з показником λ.

Доведення. Рівняння (4) розв'язується методом послідовних наближень. Нехай $V_0(t,x,y)=\nabla_x g(t,x,y)$ і для $n=1,2,\ldots$

$$V_n(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x g(t-\tau,x,z)(V_{n-1}(\tau,z,y),a(z))\,dz.$$

Користуючись такими ж методами, як у [2], та враховуючи, що[1]

$$\nabla_x g(t,x,y)\le C\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t^{1-1/\alpha}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right), \qquad (6)$$

одержуємо оцінку

$$V_n(t,x,y)\le M_T^n\|a\|_p^n\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{\alpha}+(n+1)\delta\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{t^{1+n\delta}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t^{1-1/\alpha+n\delta}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right) \qquad (7)$$

для $t\in(0,T]$, $x\in\mathbb{R}^d$, $y\in\mathbb{R}^d$, $n=1,2,\ldots$, де

$$\delta=1-\frac{1}{\alpha}-\frac{d}{\alpha p},$$

а M_T — деяка константа, що залежить від $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1},d,p,m,T$.

Отже, з оцінки (7) видно, що ряд

$$V(t,x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(t,x,y)$$

рівномірно збіжний по x і y, та локально рівномірно збіжний по t. Цей ряд є розв'язком рівняння (4). Він задовольняє нерівність (5). З (7) також випливає, що розв'язок рівняння (4), який задовольняє (5), є єдиним. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $a(x)$ *задовольняє умови теореми* 1. *Тоді розв'язок рівняння* (3) *має вигляд*

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}g(t-\tau,x,z)(V(\tau,z,y),a(z))\,dz, \qquad (8)$$

де $V(t,x,y)$ — *розв'язок рівняння* (4), *і вірними є такі оцінки:*

$$|\nabla_x G(t,x,y)|\le P_T\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t^{1-1/\alpha}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right), \qquad (9)$$

$$|G(t,x,y)| \le P_T\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right) \tag{10}$$

(*константа* P_T *залежить від* $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, d, p, m, T$ *і* $\|a\|_p$).

Доведення. Можна легко перевірити, що $G(t,x,y)$ є неперервною і неперервно диференційовною по x, причому $\nabla_x G(t,x,y) = V(t,x,y)$.

Таким чином, ми побудували розв'язок $G(t,x,y)$ рівняння (3). Цей розв'язок задовольняє нерівність (9), тому що (9) збігається з (5).

Оцінка (10) випливає з (3), (5) та наступної оцінки, доведеної в [1]:

$$|g(t,x,y)| \le C\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right). \tag{11}$$

Цим завершується доведення теореми 2.

Теорема 3. *Нехай* $a, \tilde{a}$ *— пара* $\mathbb{R}^d$*-значних функцій на* $\mathbb{R}^d$, *що задовольняють умови* $\|a\|_p < +\infty$ *та* $\|\tilde{a}\|_p < +\infty$ *для деякого* $p > \dfrac{d}{\alpha-1}$. *Нехай* $G(t,x,y)$ *та* $\tilde{G}(t,x,y)$ *є розв'язками рівняння* (3), *що відповідають функціям* a *та* $\tilde{a}$ *відповідно. Тоді виконується нерівність*

$$|G(t,x,y)-\tilde{G}(t,x,y)| \le H_T\|a-\tilde{a}\|_p\frac{t^{1+\delta}}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha}} \tag{12}$$

для $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, *де* H_T *— константа, що залежить від* α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, d, p, m, T$, *а також від* $\|a\|_p$ *та* $\|\tilde{a}\|_p$. *Слід зауважити, що* H_T *залежить лише від* C *при умові* $\|a\|_p \le C$ *та* $\|\tilde{a}\|_p \le C$ *для довільного додатного* C.

Доведення. Як і вище, покладемо $V(t,x,y) = \nabla_x G(t,x,y)$, $\tilde{V}(t,x,y) = \nabla_x \tilde{G}(t,x,y)$. Тоді виконується нерівність

$$|V(t,x,y)-\tilde{V}(t,x,y)| \le$$

$$\le \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x g(t-\tau,x,z)|\,|V(\tau,z,y)|\times|a(z)-\tilde{a}(z)|\,dz\,+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x g(t-\tau,x,z)|\,|\tilde{a}(z)|\,\left|V(\tau,z,y)-\tilde{V}(\tau,z,y)\right|dz. \tag{13}$$

Враховуючи оцінки (5), (6) і (13), приходимо до висновку, що

$$|V(t,x,y)-\tilde{V}(t,x,y)| \le$$

$$\le K_T\|a-\tilde{a}\|_p\left(\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha+1}}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{t}{\left(t^{1/\alpha}+|x-y|\right)^{d+\alpha_k}}\right), \tag{14}$$

для $t \in (0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, де K_T — константа, що залежить від α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, d, p, m, T$, а також від $\|a\|_p$ та $\|\tilde{a}\|_p$, причому K_T скінченна при $\|a\|_p \le C$ і $\|\tilde{a}\|_p \le C$ для довільного скінченного $C > 0$.

Тепер можемо записати нерівність

$$|G(t,x,y)-\tilde{G}(t,x,y)| \le \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} |g(t-\tau,x,z)|\,|a(z)-\tilde{a}(z)|\,|V(\tau,z,y)| +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} |g(t-\tau,x,z)|\,|\tilde{a}(z)|\,\left|V(\tau,z,y)-\tilde{V}(\tau,z,y)\right| dz. \qquad (15)$$

Враховуючи (11) та (14), приходимо до висновку, що оцінка (12) є вірною. Теорему доведено.

Нехай $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — деякі псевдодиференціальні оператори. Якщо для будь-якої функції $\varphi(x)$, яка належить до області визначення кожного з цих псевдодиференціальних операторів, справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi(x_0) \ge 0,$$

де x_0 визначається з рівності

$$\varphi(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d}\varphi(x),$$

то будемо говорити, що для $C_1, \ldots, C_n$ виконується принцип мінімуму.

Теорема 4. *Нехай $G(t,x,y)$ — розв'язок рівняння* (3), *що відповідає заданій $\mathbb{R}^d$-значній функції $a(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, всі координати якої (в деякому фіксованому базисі в $\mathbb{R}^d$) належать до $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (так позначено сукупність всіх дійсних функцій на $\mathbb{R}^d$ з компактними носіями, які мають похідні всіх порядків).*

Для даної функції $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функція

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\phi(y)dy$$

є розв'язком наступної задачі Коші:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - B(t,x) - \sum_{k=1}^{m} B_k u(t,x) - (a(x), \nabla_x u(t,x)) = 0, \qquad (16)$$

$$u(t,x) \xrightarrow[t\downarrow 0]{} \phi(x), \qquad (17)$$

де $B, B_1, \ldots, B_m$ — такі ж псевдодиференціальні оператори, що й у рівнянні (1), *для яких виконується принцип мінімуму.*

Доведення. Позначимо через $\hat{G}(t,x,y)$ фундаментальний розв'язок (16); $(a(x), \nabla_x\cdot)$ також є псевдодиференціальним оператором із символом $ia(x)\sigma$. Цей символ задовольняє такі ж умови, які накладалися на символи $b_1, \ldots, b_m$ в [1] для існування фундаментального розв'язку задачі Коші (1), (2). Для псевдодиференціальних операторів $B, B_1, \ldots, B_m$ $(a(x), \nabla_x\cdot)$ виконується принцип мінімуму. Справді, якщо для довільної $\varphi(x)$ з області визначення кожного з псевдодиференціальних операторів $B, B_1, \ldots, B_m$ $(a(x), \nabla_x\cdot)$ маємо $\varphi(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d}\varphi(x)$, то $(a(x_0), \nabla_x\varphi(x_0)) = 0$, а тому

$$B\varphi(x_0) + \sum_{k=1}^{m} B_k\varphi(x_0) \ge 0.$$

Отже, існує єдиний розв'язок задачі Коші (16), (17), який побудовано в [1]:

$$\hat{u}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}(t,x,y)\phi(y)dy.$$

З іншого боку, рівняння (16) можна записати у вигляді (1) з $f(t,x) = (a(x), \nabla_x u(t,x))$. Тоді на підставі теореми 1 з [1] розв'язок задачі (16), (17) можна записати так:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\phi(y)dy + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)(\nabla_z u(\tau,z), a(z))\,dz.$$

Це рівняння є наслідком рівняння (3), яке слід помножити на $\phi(y)$, проінтегрувати по y і покласти

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\phi(y)dy.$$

Отже,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{G}(t,x,y)\phi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\phi(y)dy,$$

а тому $\hat{G}(t,x,y) = G(t,x,y)$. Теорему доведено.

Нехай для псевдодиференціальних операторів $B, B_1, \ldots, B_m$ виконується принцип мінімуму. Тоді для фундаментального розв'язку рівняння (1) справедливі наступні твердження [1]:

1) фундаментальний розв'язок є невід'ємною функцією;

2) $\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)dy = 1$;

3) $g(t,x,y)$ задовольняє рівняння Колмогорова – Чепмена

$$g(t+s,x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,z)g(s,z,y)dz$$

для $t>0,\ s>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$.

Якщо $a(x)$ є досить гладкою, то, згідно з [1], існує фундаментальний розв'язок рівняння (16). Оскільки, як було показано вище, для псевдодиференціальних операторів $B, B_1, \ldots, B_m$, $(a(x), \nabla_x \cdot)$ виконується принцип мінімуму, то для фундаментального розв'язку (16) вірні твердження $1-3$.

***Наслідок* 1**. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то розв'язок* $G(t,x,y)$ *рівняння* (3) *є невід'ємним і*

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)dy = 1 \tag{18}$$

для $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$.

Справді, для $\mathbb{R}^d$-значної функції $a(x)$ на $\mathbb{R}^d$, яка задовольняє умову $\|a\|_p < +\infty$ для деякого $p > \dfrac{d}{\alpha-1}$, можна побудувати послідовність функцій $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, що їх координати належать до $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ і $\|a - a_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Позначимо через $G(t,x,y)$ розв'язок рівняння (3), що відповідає a_n. Як ми показали вище, $G_n(t,x,y) \geq 0$ для $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \ldots$. Також ми показали (теорема 3), що $\lim_{n\to\infty} G_n(t,x,y) = G(t,x,y)$. Отже, $G(t,x,y) \geq 0$ для $t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$. Рівність (18) випливає з рівняння (3).

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то розв'язок рівняння* (3) *задовольняє рівняння Колмогорова – Чепмена*

$$G(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, z) G(s, z, y)\, dz \tag{19}$$

для $t > 0,\ s > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^d$.

Справді, вибравши послідовність a_n так, як і в наслідку 1, можна записати рівняння Колмогорова – Чепмена для функції G_n. Нехай в цьому рівнянні $n \to \infty$. Використавши оцінку (10), одержимо співвідношення (19).

Нехай $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, — послідовність $\mathbb{R}^d$-значних вимірних функцій на $\mathbb{R}^d$ таких, що для них існує класичний розв'язок задачі Коші (16), (17), який для кожного n має вигляд

$$u_n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, y) \phi(y) dy.$$

Нехай, крім того, $\| a_n - a \|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Тоді

$$G_n(t, x, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} G(t, x, y),$$

а тому $\int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, y) \phi(y) dy$ називається *узагальненим розв'язком задачі Коші* (16), (17).

Таким чином, в даній статті побудовано узагальнений розв'язок задачі Коші (16), (17) для функцій $a(x)$ таких, що $\| a \|_p < +\infty$ при деякому $p > \dfrac{d}{\alpha - 1}$. Цьому розв'язку відповідає деяка функція $G(t, x, y)$, яка є розв'язком рівняння (3), Якщо виконується принцип мінімуму для операторів $B, B_1, \ldots, B_m$, то, враховуючи наслідки 1, 2, приходимо до висновку, що існує однорідний марковський процес $(x(t), M_t, P_x)$ із щільністю ймовірності переходу $G(t, x, y)$. Оцінка (10) показує, що траєкторії цього процесу можна вважати $\mathbb{R}^d$-значними функціями на $[0, +\infty)$ без розривів другого роду і неперервними справа.

1. *Кочубей А. Н* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909 – 934.
2. *Podolynny S. I., Portenko N. I.* On multidimensional stable processes with locally unbounded drift // Random Operators and Stochastic Equations. – 1995. – **3**, № 2. – P. 113 – 124.

Одержано 24.02.97