УДК 515.162.6

Е. А. Полулях (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ РАССЛОЕНИИ НАД ОКРУЖНОСТЬЮ СО СЛОЕМ КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО*

The Pontryagin fiber bundle $\xi = (N, p, S^1)$ is constructed, total space N of which cannot be imbedded into any two-dimensional orientable manifold but can be imbedded into an arbitrary nonorientable two-dimensional manifold.

Побудовано розшарування Понтрягіна $\xi = (N, p, S^1)$ таке, що для його тотального простору N не існує вкладення ні в який двовимірний орієнтовний многовид, але існує вкладення в довільний неорієнтовний двовимірний многовид.

В настоящей работе изучается вопрос о возможности вложения пространств расслоений Понтрягина в двумерные многообразия. Построен пример расслоения из этого класса, тотальное пространство которого нельзя вложить ни в одно двумерное ориентируемое многообразие.

Определение 1. *Пусть* Γ — *канторово множество* [1], $f: \Gamma \to \Gamma$ — *гомеоморфизм. Расслоение* ξ *над окружностью* S^1 *со слоем* Γ, *построенное по* f, *называется расслоением Понтрягина* [2].

Более подробно: на прямом произведении $I \times \Gamma$, где $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, вводится отношение эквивалентности. Эквивалентными объявляются точки $\{0\} \times \{x\}$ и $\{1\} \times \{f(x)\}$. Пусть $N = (I \times \Gamma)/f$ — фактор-пространство пространства $I \times \Gamma$ по этому отношению. Проекция $p: N \to S^1$ задается соотношением $p((t, x)) = t$ для всех точек $(t, x) \subset N$. Тогда $\xi = (N, p, S^1)$.

1. Основное построение. Рассмотрим отображение

$$\tilde{f}: \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^k}, \frac{1}{3^{k-1}} \right] \right) \to \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^k}, \frac{1}{3^{k-1}} \right] \right),$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0; \\ \dfrac{2}{3^k} + \dfrac{1}{3^{k-1}} - x, & \text{если} \quad x \in \left[\dfrac{2}{3^k}, \dfrac{1}{3^{k-1}} \right]. \end{cases}$$

Отображение $\tilde{f}$ взаимно однозначно и, кроме того, $\tilde{f}([2/3^k, 1/3^{k-1}]) = [2/3^k, 1/3^{k-1}]$. Покажем, что отображения $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ непрерывны в топологии, индуцированной с отрезка $[0, 1]$. Действительно, их непрерывность в точках $x \neq 0$ не вызывает сомнения. Непрерывность в точке $x = 0$ следует из двойного неравенства $x/2 \leq f(x) \leq 2x$.

Итак, $\tilde{f}$ — гомеоморфизм. Заметим, что $\Gamma \subset \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [2/3^k, 1/3^{k-1}] \right)$. То, что $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma$, следует из симметричности (при любом $k \in \mathbb{N}$) множества $\Gamma \cap [2/3^k, 1/3^{k-1}]$ относительно точки $x_k = 5/(2 \cdot 3^k)$ — середины отрезка $[2/3^k, 1/3^{k-1}]$.

Следовательно, корректно определен гомеоморфизм $f = \tilde{f}|_{\Gamma}: \Gamma \to \Gamma$. Построим по нему расслоение Понтрягина $\xi = (N, p, S^1)$.

Пространство N состоит из непересекающихся непрерывных замкнутых кривых $\alpha_x: S^1 \to N$,

* Выполнена при поддержке ISF (грант № U6F000).

$$\alpha_x(e^{2\pi it}) = \begin{cases} (t,\ 0), & \text{если} \quad x = 0, \quad t \in (0,\ 1], \\ (2t,\ x), & \text{если} \quad x \neq 0, \quad t \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right], \\ (2t-1,\ f(x)), & \text{если} \quad x \neq 0, \quad t \in \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]. \end{cases}$$

При этом каждая кривая α_x, $x \neq 0$, образует двулистное накрытие над S^1 — базой расслоения ξ. Кривая α_0 является единственным непрерывным сечением расслоения N.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Пространство N, построенное выше, не может быть вложено ни в какое двумерное ориентируемое многообразие, но может быть вложено в произвольное двумерное неориентируемое многообразие.*

Доказательство. Начнем со второго утверждения теоремы.

Рассмотрим лист Мебиуса $M^2 = (I \times [-1,\ 1])/g$, где $g:\ [-1,\ 1] \to [-1,\ 1]$, $g(x) = -x$ — гомеоморфизм. Обозначим

$$h_k\colon\ [2/3^k,\ 7/3^{k+1}] \cup [8/3^{k+1},\ 1/3^{k-1}] \ \to\ [-1/3^{k-1},\ -2/3^k] \cup [2/3^k,\ 1/3^{k-1}],$$

$$h_k(x) = \begin{cases} 3x - \dfrac{2}{3^{k-1}} & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{8}{3^{k+1}},\ \dfrac{1}{3^{k-1}}\right], \\ 3x - \dfrac{1}{3^{k-2}} & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{2}{3^k},\ \dfrac{7}{3^{k+1}}\right]. \end{cases}$$

Очевидно, h_k — гомеоморфизм. Непосредственно проверяется, что $(\Gamma \cap \cap [2/3^k,\ 1/3^{k-1}]) \subset ([2/3^k,\ 7/3^{k+1}] \cup [8/3^{k+1},\ 1/3^{k-1}])$ и $h_k(x) = g \circ h_k(2/3^k + + 2/3^{k-1} - x)$ для всех $x \in \Gamma \cap [2/3^k,\ 1/3^{k-1}]$.

Следовательно, корректно определено отображение $\Phi\colon N \to M^2$,

$$\Phi(t,\ x) = \begin{cases} (t,\ 0) & \text{при} \quad x = 0, \\ (t,\ h_k(x)) & \text{при} \quad x \in \left[\dfrac{2}{3^k},\ \dfrac{1}{3^{k-1}}\right]. \end{cases}$$

Непрерывность и инъективность отображения проверяется непосредственно. То есть, Φ — вложение.

Докажем, что пространство N нельзя вложить ни в какое двумерное ориентируемое многообразие X. Предположим, что это не так и существует вложение $F\colon N \to X$.

Рассмотрим кривую $\gamma_0 \subset X$ — образ кривой $\alpha_0(S^1) = (I \times \{0\})/f \subset N$ при отображении F (γ_0 — простая замкнутая кривая). Как известно, произвольная регулярная окрестность такой кривой гомеоморфна цилиндру.

Несложно проверить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой регулярной окрестности $U(\gamma_0)$ кривой γ_0 найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$F\Big(\Big(I \times \Big(\Gamma \cap \Big[0,\ 3^{-m}\Big]\Big)\Big)\,/f\Big) \subset U(\gamma_0)\,.$$

Расслоение $\tilde{\xi} = (\ \tilde{N}_m = (I \times (\Gamma \cap [0,\ 3^{-m}]))/f, p, S^1)$, $m \in \mathbb{N}$, изоморфно расслоению ξ. Изоморфизм задается, например, следующей парой отображений $\varphi_m\colon \tilde{N}_m \to N$, $\varphi_m((x,t)) = (3^m x,\ t)$, $id\colon S^1 \to S^1$.

Пусть $U(\gamma_0)$ — регулярная окрестность кривой $\gamma_0 = F(\alpha_0)$, $\psi: C^2 \to U(\gamma_0)$ — гомеоморфизм цилиндра C^2 на эту окрестность. Согласно лемме 1 найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $F(\tilde{N}_m) \subset U(\gamma_0)$. Тогда отображение $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi_m^{-1}: N \to C^2$ будет отображением вложения пространства N в цилиндр.

Итак, нам достаточно доказать, что не существует вложения $\Phi: N \to C^2$.

Пусть $C^2 \subset \mathbb{R}^3$ — цилиндр, заданный в цилиндрических координатах; $C^2 = \{(r, \varphi, z) \subset \mathbb{R}^3 \mid r = 1,\ z \in [-1, 1]\}$. Пусть $\Phi: N \to C^2$ — вложение такое, что $\gamma_0 = \Phi(\alpha_0) = \{(r, \varphi, z) \subset C^2 \mid z = 0\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующий известный факт: существует изоморфизм $\pi_1(C^2) \to \mathbb{Z}$ фундаментальной группы цилиндра на группу целых чисел такой, что гомотопическому классу $\{\gamma_0\}$ кривой γ_0 соответствует образующая группы $\mathbb{Z}$. Пусть для определенности $\pi_1(\gamma_0) = 1$.

Доказательство теоремы будет построено на следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть $\gamma \subset C^2$ — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений. Тогда $\pi_1(\gamma) \in \{-1, 0, 1\}$.*

Лемма 3. *Пусть γ_1, $\gamma_2: S^1 \to S^1$ — два непрерывных отображения, $G, H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – их непрерывные поднятия такие, что при некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1/2)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется включение*

$$H\left(\frac{x}{k}\right) - G(x) \ \in \ \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (i - \varepsilon,\ i + \varepsilon)\,.$$

Тогда $\pi_1(\gamma_2) = k\pi_1(\gamma_1)$.

Доказательство леммы 3 сводится к непосредственной проверке.

Докажем первую часть утверждения теоремы, использовав леммы 2 и 3 (лемма 2 будет доказана ниже).

Рассмотрим семейство кривых $\{\alpha_{x_n} \mid x \in [2/3^n, 1/3^{n-1}] \cap \Gamma,\ n \in \mathbb{N}\}$, лежащих в пространстве N. Покажем, что найдется n_0 такое, что при любом $n > n_0$ пара кривых $\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_0$ и $\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_{x_n}$ удовлетворяет условиям леммы 3 при $k = 2$ и некотором $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Рассмотрим пространство $I \times \Gamma$ и естественную проекцию $\mathrm{Pr}: I \times \Gamma \to N$, $\mathrm{Pr}(\{t\}, \{x\}) = (t, x)$. Композиция $\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}: I \times \Gamma \to S^1$, где $\overline{\varphi}: C^2 \to S^1$, $\overline{\varphi}((r, \varphi, z)) = ((r, \varphi, 0))$ — проекция на экватор цилиндра, непрерывна.

Отметим, что топологии на пространствах $I \times \Gamma$ и S^1 метрические и порождаются, например, следующими метриками:

$$d_1(\{t_1\} \times \{x_1\}, \{t_2\} \times \{x_2\}) = \max(|t_1 - t_2|, |x_1 - x_2|)\,,$$

$$d_2((r, \varphi_1, 0), (r, \varphi_2, 0)) = \frac{1}{2\pi} \min_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi n|\,.$$

Так как $I \times \Gamma$ — компакт, то отображение $\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}$ равномерно непрерывно. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и найдем $\delta > 0$ такое, чтобы при всех $z_1, z_2 \in I \times \Gamma$ неравенство $d_1(z_1, z_2) < \delta$ влекло $d_2(\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}(z_1), \overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}(z_2)) < \varepsilon$. Найдем n_0, для которого $3^{-n_0} < \delta$.

Пусть $n > n_0$. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ точки $y_0(t) = \alpha_0(e^{2\pi i t}) = (\{t\}, 0)$ и $y_n(t) = \alpha_{x_n}(e^{\pi i t}) = (\{t\}, f^{[t]}(x))$ лежат в одном слое расслоения ξ и имеют прообразы $z_0(t) = \{\{t\}\} \times \{0\} \in \mathrm{Pr}^{-1}(y_0(t))$, $z_n(t) = \{\{t\}\} \times \{f^{[t]}(x)\} \in$

$\in \mathrm{Pr}^{-1}(y_0(t))$, для которых $d_1(z_1(t), z_2(t)) < 3^{-n_0} < \delta$. (Здесь $\{\ \}$, $[\ ]$ — соответственно дробная и целая часть числа.) Следовательно, $d_2(\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}(z_0(t)), \overline{\varphi} \circ \Phi \circ \mathrm{Pr}(z_n(t))) = d_2(\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_0(e^{2\pi i t}), \overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_{x_n}(e^{\pi i t})) < \varepsilon < 1/2$. Применяя лемму 3, заключаем, что $\pi_1(\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_{x_n}) = 2\pi_1(\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_0) = 2$, так как $\overline{\varphi} \circ \Phi \circ \alpha_0 = \Phi \circ \alpha_0 = \gamma_0$ и $\pi_1(\gamma_0) = 1$. Из этого следует $\pi_1(\Phi \circ \alpha_{x_n}) = 2$. Действительно, семейство отображений $F_t\colon C^2 \to C^2$, $F_t((r, \varphi, z)) = (r, \varphi, z(1-t))$ непрерывно при $t \in [0, 1]$ и является гомотопией между тождественным отображением $id\colon C^2 \to C^2$ и проекцией $\overline{\varphi}$.

С другой стороны, так как $\Phi \circ \alpha_{x_n}\colon S^1 \to C^2$ — инъективная непрерывная замкнутая кривая, из леммы 2 следует, что $\pi_1(\Phi \circ \alpha_{x_n}) \in \{0, \pm 1\}$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Доказательство леммы 2. Рассмотрим меридиан цилиндра $M = \{x \in C^2 \mid \varphi(x) = \varphi_0 \pmod{2\pi}\}$ и его пересечение $M \cap \gamma$ с кривой γ.

Отображение $\gamma : S^1 \to C^2$ инъективно и непрерывно, S^1 — компакт. Известно, что инъективное непрерывное отображение компакта является его гомеоморфизмом на свой образ. Следовательно, $\gamma : S^1 \to \gamma(S^1)$ — гомеоморфизм и $\gamma : S^1 \to C^2$ — вложение. Согласно теореме 5.3 из [3] можно привести γ и M в общее положение, т. е. существует изотопия $\chi_t : C^2 \to C^2$ такая, что $\chi_0 = id : C^2 \to C^2$, $\chi_1(\gamma)$ — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений, пересекающая M трансверсально. Очевидно, $\pi_1(\gamma) = \pi_1(\chi_1(\gamma))$.

Так как S^1 — компакт, то кривая $\chi_1(\gamma)$ пересекает M в конечном числе точек. Пусть это будут точки $A_i = (1, \varphi_0, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Спроектируем $\chi_1(\gamma)$ на экватор γ_0 с помощью отображения $p : C^2 \to \gamma_0$, $p((1, \varphi, z)) = (1, \varphi, 0)$. Присвоим точке A_i знак „+", если после проектирования направление движения вдоль $\chi_1(\gamma)$ в достаточно малой окрестности точки A_i совпадет с направлением обхода экватора и знак „–" — в противном случае.

Пусть среди точек A_i, $i = 1, \ldots, n$, найдутся точки, помеченные как „+", так и „–". Докажем, что можно построить изотопию C^2 на себя такую, что образ кривой $\chi_1(\gamma)$ будет пересекаться с M трансверсально в тех же точках, что и $\chi_1(\gamma)$ кроме двух $A_j \neq A_k$, одна из которых имеет знак „+", а другая — знак „–".

Кривая $\chi_1(\gamma)$ разбивается точками A_i на n интервалов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Перенумеруем точки A_i так, чтобы концами интервала γ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, были точки A_i и A_{i+1}, концами интервала γ_n — точки A_n и A_1.

Сопоставим каждой точке интервала $\gamma_i \subset C^2$ одно из значений ее полярного угла так, чтобы функция $\varphi_i : \gamma_i \to \mathbb{R}$ была непрерывна и $\varphi_i(A_i) = \varphi_0$. Сопоставим отрезку γ_i число

$$a_i = \max_{x \in \gamma_i} \{ |\varphi_i(x) - \varphi_0| \}.$$

Поскольку при всех i $\gamma_i \cap M = \partial\gamma_i = A_i \cup A_{i+1}$, то кривые γ_i делятся на два класса:

i) точки A_i и A_{i+1} имеют один знак; при этом $\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0 \pm 2\pi$ и $a_i = 2\pi$;

ii) точки A_i и A_{i+1} имеют разные знаки; тогда $\varphi_i(A_{i+1}) = \varphi_0$ и $a_i < 2\pi$.

Выберем среди чисел a_i, $i = 1, \dots, n$, минимальное. Пусть это будет число a_j для интервала γ_j. Тогда $a_j < 2\pi$.

Рассмотрим область B, ограниченную интервалом γ_j и отрезком $J \subset M$, соединяющим точки A_j и A_{j+1}. ∂B — простая замкнутая кривая и $\pi_1(\partial B) = 0$ в силу выбора a_j. Поэтому B гомеоморфна двумерному диску. Для любой кривой γ_i, $i \neq j$, найдется точка x, для которой $|\varphi_i(x) - \varphi_0| \geq$ $\geq \max_{x \in \gamma_j} \{ |\varphi_j(x) - \varphi_0| \}$. Следовательно, $x_i \in \gamma_i \cap (C^2 \setminus B)$.

Покажем, что $B \cap \gamma_i = \varnothing$ при всех $i \neq j$. Действительно, если бы для некоторого $i \neq j$ выполнялось соотношение $B \cap \gamma_i \neq \varnothing$, кривая γ_i должна была бы пересечься с ∂B, что невозможно, так как $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$, $\gamma_i \cap M = \varnothing$ и $J \subset M$.

Возьмем достаточно малую окрестность U диска B и построим изотопию U на себя (неподвижную на границе) такую, чтобы под ее действием $\gamma \cap U$ перешло в компоненту связности множества $U \setminus M$, не пересекающуюся с диском B. Продолжим эту изотопию на C^2 с помощью тождественной изотопии.

С помощью конечного числа таких изотопий можно добиться, чтобы все точки пересечения кривой γ с меридианом M имели один знак.

Пусть теперь все точки A_i, $i = 1, \dots, n$, имеют один знак. Заметим, что $n =$ $= |\pi_1(\gamma)|$. Предположим, что $n \geq 2$.

Рассмотрим инъективное отображение $h: I^2 = I \times I \to C^2$, $h(t_1, t_2) =$ $= (1, 2\pi t_1 - \varphi_0, 2t_2 - 1)$. Положим $\tilde{\gamma}_i(t) = h^{-1} \circ \gamma(t)$ при $t \in (0, 1)$, $\tilde{\gamma}_i(0) =$ $= (\{0\} \times I) \cap h^{-1} \circ \gamma(0)$, $\tilde{\gamma}_i(1) = (\{1\} \times I) \cap h^{-1} \circ \gamma(1)$. Получим непрерывные инъективные отображения $\tilde{\gamma}_i : I \to I^2$, удовлетворяющие соотношениям $\tilde{\gamma}_i(0) \in \{0\} \times I$, $\tilde{\gamma}_i(1) \in \{1\} \times I$, $\tilde{\gamma}_i((0,1)) \subset \operatorname{Int} I^2$.

Найдутся $i, j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $pr_2 \circ \tilde{\gamma}_i(0) < pr_2 \circ \tilde{\gamma}_j(0)$ и $pr_2 \circ$ $\circ \tilde{\gamma}_i(1) > pr_2 \circ \tilde{\gamma}_j(1)$ (здесь $pr_2 : I^2 \to I$ — проекция на второй сомножитель). Действительно, если это не так, должно выполняться одно из следующих соотношений:

$$pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(1) = pr_2 \circ \tilde{\gamma}_2(0) < \dots < pr_2 \circ \tilde{\gamma}_n(1) = pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(0) ,$$

$$pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(0) > pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(1) = pr_2 \circ \tilde{\gamma}_2(0) > \dots > pr_2 \circ \tilde{\gamma}_n(1) = pr_2 \circ \tilde{\gamma}_1(0) .$$

Известно, что кривые $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\gamma}_j$, взаимное расположение которых описано выше, пересекаются (этот факт есть следствие теоремы Коши). Значит, кривая $\chi_1(\gamma)$ не является инъективной при $n \geq 2$.

Лемма доказана.

1. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981.– 432с.
2. *Немыцкий В. В.* Топологические вопросы теории динамических систем // Успехи мат. наук. – 1949 – **4**, вып. 6. – С.90–153.
3. Рурк К., *Сандерсон Б.* Введение в кусочно линейную топологию. – М.: Мир, 1974. – 208с.

Получено 11.09.96