УДК 517.5

П. М. Тамразов (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Сарана (Житомир. пед. ин-т)

КОНТУРНО-ТЕЛЕСНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКО ГИПОГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

We prove the contour-solid theorems for finely hypoharmonic functions defined in finely open sets of the complex plane.

Доводяться контурно-тілесні теореми для тонко гіпогармонічних функцій, заданих на тонко відкритих множинах комплексної площини.

В препринте [1] контурно-телесные теоремы (а также лемма) работы [2] были перенесены на тонко гипогармонические функции, заданные в тонко открытых множествах на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В настоящей работе результаты из [1] усиливаются, а именно: устанавливаются более точные оценки в контурно-телесных теоремах и исследуется вопрос о достижении знака равенства в этих оценках.

А. Картан определил тонкую топологию как самую слабую из всех топологий, для которых все субгармонические функции являются непрерывными. Тонкая топология сильнее, чем стандартная евклидова топология. Тонкие окрестности имеют также характеризацию в терминах понятия разреженности, введенного ранее М. Брело [3, с. 6, 9–17]. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость. Множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *разреженным в точке* x_0, если выполняется одно из следующих условий: либо точка x_0 не является граничной точкой множества $E \setminus \{x_0\}$ (в стандартной топологии замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$), либо точка x_0 гранична для множества $E \setminus \{x_0\}$ и в окрестности точки x_0 существует субгармоническая функция $u(x)$ такая, что

$$u(x_0) > \varlimsup_{x \to x_0,\ x \in E \setminus \{x_0\}} u(x).$$

По определению тонкие окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ задаются как множества вида $\overline{\mathbb{C}} \setminus E =: CE$, где E — множество, разреженное в точке x_0 и не содержащее ее [3, с. 11].

Тонкая топология хаусдорфова и вполне регулярна. Более того, те тонкие окрестности, которые замкнуты в стандартной топологии, составляют базис тонких окрестностей. Но тонкая топология не удовлетворяет ни второй, ни первой аксиоме счетности [4, с. 21].

Множество всех точек $x \in \overline{\mathbb{C}}$, в которых данное множество E не разрежено, называется *базой множества* E *в* $\overline{\mathbb{C}}$ и обозначается через $b(E)$. Множество $\tilde{E} := E \cup b(E)$ называется *тонким замыканием множества* E в $\overline{\mathbb{C}}$. Очевидно, $\tilde{E} \subset \overline{E}$. Обозначим через $\overline{\partial}_f G$ тонкую границу множества G в $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $\partial_f G := \mathbb{C} \cap \overline{\partial}_f G$, а $i(E) := \tilde{E} \setminus b(E)$ — множество всех иррегулярных точек множества $\tilde{E}$.

Специфически двумерными являются следующие свойства. Если G — тонко открытое, тонко связное множество (другими словами, *тонкая область*), то

* Выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № UB 4000).

точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является *тонко внешней для* G (т. е. $a \in C\tilde{G}$) тогда и только тогда, когда эта точка является внешней для G в стандартной топологии (т. е. $a \in C\overline{G}$). Это означает, что тонкое замыкание тонкой области замкнуто и в стандартной топологии.

Если множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ разрежено в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, то существуют как угодно малые окружности с центром в точке x_0, не пересекающиеся с E [3, с. 97].

Для $z \in \mathbb{C}$ через ε_z будем обозначать меру Дирака, сосредоточенную в $\{z\}$. Меру, полученную в результате выметания меры ε_z на множество $W \subset \mathbb{C}$, будем обозначать через ε_z^W (имеется в виду выметание на *произвольные* множества, см. [5, с. 25]).

Числовая функция $f\colon D \to [-\infty, +\infty)$, определенная в тонко открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$, называется *тонко гипогармонической,* если выполняются следующие условия:

i) f тонко полунепрерывна сверху в D;

ii) индуцированная топология в D имеет базис, состоящий из ограниченных тонко открытых множеств V с тонким замыканием $\tilde{V} \subset D$ таких, что

$$f(z) \le \int_* f\, d\varepsilon_z^{CV} \qquad \forall\, z \in V,$$

где $\int_*$ понимается как нижний интеграл (относительно нижних и верхних интегралов для знакопеременных функций см. [6, с. 163, 164]).

Тонко гипогармоническая функция, заданная на тонко открытом множестве D и конечная на тонко плотном в D множестве, называется *тонко субгармонической.*

Пусть L — введенный в [7] класс всех функций $\lambda\colon (0, +\infty) \to [-\infty, +\infty)$, для каждой из которых множество $I_\lambda = \{x : \lambda(x) > -\infty\}$ связно и сужение функции $\lambda(x)$ на I_λ вогнуто относительно $\log x$.

Пусть L^* — класс всех $\lambda \in L$, для которых множество I_λ не пусто. Для $\lambda \in L^*$ через x_λ^- и x_λ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка I_λ. Очевидно, $0 \le x_\lambda^- \le x_\lambda^+ \le +\infty$. Когда $\lambda(\cdot)$ пробегает класс L или L^*, функция $\exp\lambda(\cdot)$ пробегает соответственно класс $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}^*$ из работы [8]. При $x_\lambda^- < x_\lambda^+$ упомянутое выше условие вогнутости равносильно тому, что функция $\lambda(x)$ на интервале $(x_\lambda^-, x_\lambda^+)$ вогнута относительно $\log x$ (а поэтому непрерывна), а на I_λ полунепрерывна снизу. Для $\lambda \in L$ существуют пределы

$$\lambda^0 = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda(x)}{\log x}, \qquad \lambda^\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda(x)}{\log x}$$

и выполнены соотношения

$$\lambda^0 \ge \lambda^\infty, \quad \lambda^0 > -\infty, \quad \lambda^\infty < +\infty. \tag{1}$$

Пусть в тонко открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$ задана тонко гипогармоническая функция u. Если u имеет в G тонко супергармоническую мажоранту, то для $\zeta \in G$ обозначим

$$\gamma_G(u, \zeta) := \inf_\theta \{\theta(\zeta) : \theta \text{ тонко супергармонична в } G,\ \theta \ge u \text{ в } G\}.$$

Очевидно, $u(\cdot) \le \gamma_G(u, \cdot)$. Если $\gamma_G(u, \cdot) < +\infty$, то на основании [5, с. 96, 103] можно показать, что $\gamma_G(u,\zeta)$ тонко гипогармонична в G, а для каждой тонко связной компоненты G_j множества G справедлива альтернатива: либо $\gamma_G(u,\zeta)=u(\zeta)=-\infty$ в G_j, либо функции $\gamma_G(u,\zeta)$ и $u(\zeta)$ тонко субгармоничны в G_j, причем $\gamma_G(u,\zeta)$ тонко гармонична на множестве $\{\zeta\in G_j:\ \gamma_G(u,\zeta)\neq-\infty\}$.

Для $a\in\mathbb{C}\setminus G$ и $r>0$ введем величины

$$u_G^a = \begin{cases} \varlimsup\limits_{z\to a,\, z\in G} \dfrac{u(z)}{|\log|z-a||} & \text{при } a\in\partial_f G; \\ 0 & \text{при } a\notin\partial_f G, \end{cases}$$

$$u_G^\infty = \begin{cases} \varlimsup\limits_{z\to\infty,\, z\in G} \dfrac{u(z)}{\log|z|} & \text{при } \infty\in\overline{\partial}_f G; \\ 0 & \text{при } \infty\notin\overline{\partial}_f G, \end{cases}$$

$$M_{G,a}(u,r) = \inf_{p,q}\{p\log r+q:\ p\in(-\infty,+\infty),\ q\in(-\infty,+\infty],$$
$$u(z)\le p\log|z-a|+q\ \ \forall\, z\in G\}.$$

Очевидно, верна альтернатива: либо $M_{G,a}(u,r)=+\infty\ \forall\, r>0$, либо $M_{G,a}(u,r)<+\infty\ \forall\, r>0$. Если имеет место вторая из указанных возможностей, то при фиксированном a, рассматривая $M_{G,a}(u,r)$ как функцию от r, имеем $M_{G,a}(u,\cdot)\in L$. Предположим, что $M_{G,a}(u,\cdot)\not\equiv-\infty$, и пусть r^+, r^- — концы максимального интервала, где эта функция не обращается в $-\infty$. Тогда функция $M_{G,a}(u,|z-a|)$ супергармонична по z при $r^-<|z-a|<r^+$ и $M_{G,a}(u,|z-a|)=-\infty$ при $|z-a|<r^-$ и при $|z-a|>r^+$. Кроме того, в этом случае функция u имеет в G тонко гармоническую мажоранту и верны соотношения

$$u(z)\le\gamma_G(u,z)\le M_{G,a}(u,|z-a|)\quad \forall\, z\in G.$$

Указанные соотношения верны и в том случае, когда $M_{G,a}(u,\cdot)\equiv-\infty$.

Теорема 1. *Пусть $a\in\mathbb{C}$ — фиксированная точка, $G\subset\mathbb{C}\setminus\{a\}$ — тонко открытое множество, тонко связные компоненты которого обозначаются через G_j; $\lambda\in L$; u — тонко гипогармоническая в G функция, ограниченная сверху на каждой ограниченной части множества G, отделимой от точки a. Пусть*

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta\to z,\,\zeta\in G}\ u(\zeta)\le\lambda(|z-a|)\quad\forall\, z\in(\partial_f G)\setminus\{a\}. \tag{2}$$

Обозначим $z_1:=a$, $z_2:=\infty$. Предположим, что при каждом $s=1,2$ (независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты G_j, для которой $z_s\in b(G_j)$, выполняется одно из двух условий:

1) $z_s\in b(CG_j)$ *и* $u_{G_j}^{z_s}<+\infty$;

2) *для* $\zeta\in G_j$ *функция* $u(\zeta)-\lambda(|\zeta-a|)$ *ограничена сверху в некоторой окрестности точки* z_s.

Тогда верно следующее.

Если $\lambda\equiv-\infty$, то $u\equiv-\infty$, $\gamma_G(u,\cdot)\equiv-\infty$, $M_{G,a}(u,\cdot)\equiv-\infty$. Если $\lambda\in L^*$ и $x_\lambda^-=x_\lambda^+$, то $u\equiv-\infty$, $\gamma_G(u,\cdot)\equiv-\infty$, $M_{G,a}(u,r)\equiv-\infty\ \forall\, r\neq x_\lambda^-$. Если же $\lambda\in$

$\in L^*$ и $x_\lambda^- < x_\lambda^+$, то и имеет в G тонко гармоническую мажоранту и выполняется одна и только одна из двух возможностей: либо $u_G^a \le -\lambda^0$, $u_G^\infty \le \lambda^\infty$ и

$$u(\zeta) \le \gamma_G(u, \zeta) \le M_{G,a}(u, |\zeta - a|) \le \lambda(|\zeta - a|)$$

$$\forall \zeta \in G: x_\lambda^- \ne |\zeta - a| \ne x_\lambda^+, \tag{3}$$

$$u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = -\infty \quad \forall \zeta \in G: |\zeta - a| \notin (x_\lambda^-, x_\lambda^+), \tag{4}$$

$$M_{G,a}(u, r) = -\infty \quad \forall r \notin [x_\lambda^-, x_\lambda^+], \tag{5}$$

либо имеет место следующий исключительный случай:

$$G = \mathbb{C} \setminus \{a\}, \quad \lambda(x) = \log(\beta x^\nu) \quad \forall x > 0,$$

$$u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = M_{G,a}(u, |\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \quad \forall \zeta \in G,$$

$c > \beta \ge 0$, ν, β, c — постоянные.

Для рассматриваемых G, a, u, λ при $s = 1, 2$ введем величины $\sigma^s = \sigma^s(G, a, u, \lambda)$, определяемые следующими условиями. Если $\lambda \in L^*$, то положим

$$\sigma^1 = \begin{cases} (u(\cdot) - \lambda(|\cdot - a|))_G^a & \text{при } x_\lambda^- = 0; \\ 0 & \text{при } x_\lambda^- > 0, \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \begin{cases} (u(\cdot) - \lambda(|\cdot - a|))_G^\infty & \text{при } x_\lambda^+ = +\infty; \\ 0 & \text{при } x_\lambda^+ < +\infty. \end{cases}$$

Если $\lambda \equiv -\infty$, то полагаем $\sigma^1 = \sigma^2 = 0$.

Для $\lambda \in L^*$ очевидны следующие соотношения: если $\lambda^0 \ne +\infty$, то $\sigma^1 = u_G^a + \lambda^0$, а если $\lambda^\infty \ne -\infty$, то $\sigma^2 = u_G^\infty - \lambda^\infty$.

Для тонко открытого множества $G \subset \mathbb{C}$ с неполярным дополнением CG при $w, \zeta \in \mathbb{C}$, $w \ne \zeta$ существует тонкая функция Грина:

$$g_G(w, \zeta) := \int \log(|w - z| / |w - \zeta|)\, d\varepsilon_\zeta^{CG}(z).$$

Возможным неопределенным выражениям условимся приписывать следующие значения: $\infty \cdot 0 = 0$, $-\infty + \infty = -\infty$.

Теорема 1 является частным случаем следующего более сильного утверждения.

Теорема 2. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — тонко открытое множество, тонко связные компоненты которого обозначаются через G_j; Q — множество, которое содержится в CG, содержит точки $z_1 = a$, $z_2 = \infty$, но не содержит ни одного неполярного компакта; $\lambda \in L$; u — тонко гипогармоническая в G функция, ограниченная сверху на каждой ограниченной части множества G, отделимой от точки a. Пусть для каждой тонко связной компоненты G_j*

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z, \zeta \in G_j} u(\zeta) \le \lambda(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f G_j) \setminus Q. \tag{6}$$

Предположим, что при каждом $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) для каждой тонко связной компоненты G_j, для которой $z_s \in b(G_j)$, выполняется одно из следующих двух условий теоремы 1: либо 1), либо 2). Тогда верно следующее.

Если $\lambda \equiv -\infty$, *то* $u \equiv -\infty$, $\gamma_G(u,\cdot) \equiv -\infty$, $M_{G,a}(u,\cdot) \equiv -\infty$. *Если* $\lambda \in L^*$ *и* $x_\lambda^- = x_\lambda^+$, *то* $u \equiv -\infty$, $\gamma_G(u,\cdot) \equiv -\infty$, $M_{G,a}(u,r) \equiv -\infty$ $\forall\, r \neq x_\lambda^-$. *Если же* $\lambda \in L^*$ *и* $x_\lambda^- < x_\lambda^+$, *то* u *имеет в* G *тонко гармоническую мажоранту и выполняется одна и только одна из двух возможностей: либо* $u_G^a \le -\lambda^0$, $u_G^\infty \le \lambda^\infty$, $-\infty \le \sigma^1 \le 0$, $-\infty \le \sigma^2 \le 0$ *и верны соотношения* (3), (4) *и* (5), *либо имеет место следующий исключительный случай:*

$$G = \mathbb{C} \setminus Q, \quad \lambda(x) = \log(\beta x^\nu) \quad \forall\, x > 0,$$

$$u(\zeta) = \gamma_G(u,\zeta) = M_{G,a}(u, |\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \qquad \forall\, \zeta \in G,$$

$c > \beta \ge 0$, ν, β, c — *постоянные.*

Если множество $\partial_f G$ *не полярно, то для каждой тонко связной компоненты* G_j *множества* G *верно следующее: либо* $u(\zeta) = \gamma_G(u,\zeta) = -\infty$ *в* G_j, *либо при каждом* $s = 1, 2$, *для которого* $\sigma^s = -\infty$, *верно* $z_s \in b(CG_j)$, $g_G(z_s, \zeta) = 0$ $\forall\, \zeta \in G_j$ *и*

$$\gamma_G(u,\zeta) \le \lambda(|\zeta - a|) + \sum_{s:\ z_s \notin b(CG_j)} \sigma^s g_G(z_s, \zeta) \qquad \forall\, \zeta \in G, \tag{7}$$

$$M_{G,a}\left(u(\cdot) - \sum_{s:\ \sigma^s \neq -\infty} \sigma^s g_G(z_s, \zeta), |\zeta - a|\right) \le \lambda(|\zeta - a|) \qquad \forall\, \zeta \in G. \tag{8}$$

Теоремы 1 и 2 являются тонкими аналогами теорем 1 и 2 из работы [2] и опираются на следующую лемму, которая является тонким аналогом леммы из [2].

Пусть $B \subset \mathbb{C}$ — тонко открытое ограниченное множество, $\varepsilon \in (0, 1)$, $w, z \in \mathbb{C}$. Введем функцию $l_\varepsilon(w,z) = \log \max\{\varepsilon, |w - z|\}$ и обозначим

$$H_B(l_\varepsilon(w,\cdot), \zeta) := \int l_\varepsilon(w,\cdot)\, d\varepsilon_\zeta^{CB}. \tag{9}$$

Лемма. *Для произвольных* $\zeta \in B$ *и* $w \in \mathbb{C}$ *существует предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_B(l_\varepsilon(w,\cdot), \zeta) =: h_B(w,\zeta), \tag{10}$$

который (тонко) субгармоничен по $w \in \mathbb{C}$ *и удовлетворяет соотношению*

$$h_B(w,\zeta) - \log|w - \zeta| = g_B(w,\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in B, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Доказательство. Для $\zeta, w \in \mathbb{C}$ при $\varepsilon \to 0$ функция $l_\varepsilon(w,\zeta)$ монотонно убывает и стремится к $\log|w - \zeta|$. В силу (9) существует предел (10), который удовлетворяет равенству

$$h_B(w,\zeta) = \int \log|w - z|\, d\varepsilon_\zeta^{CB}(z) \qquad \forall\, \zeta \in B, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из определения (тонкой) функции Грина следует (11). Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Обозначим

$$G \cap \{\zeta : |\zeta - a| < 1\} =: D_a, \qquad G \cap \{\zeta : |\zeta - a| > 1\} =: D^a.$$

Зафиксируем произвольные $\sigma, \nu \in (-\infty; +\infty)$ такие, что

$$\lambda(x) \le \nu \log x + \sigma \quad \forall\, x > 0. \tag{12}$$

Это возможно в силу условия $\lambda \in L$. Пусть $q > \sigma$ таково, что

$$u(\zeta) < q \quad \forall\, \zeta \in G \bigcap \{\zeta\colon |\zeta - a| = 1\}. \tag{13}$$

Докажем, что $u(\zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + q \quad \forall\, \zeta \in G$ Вначале докажем, что

$$u(\zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + q \quad \forall\, \zeta \in D_a. \tag{14}$$

Предположим, что (14) не выполняется. Тогда существует тонко связная компонента D множества D_a и точка $\zeta' \in D$, в которой $u(\zeta') > \nu \log|\zeta' - a| + q$. Обозначим через D_* множество всех $\zeta \in D$, в которых

$$u(\zeta) \ge \nu \log|\zeta - a| + q. \tag{15}$$

Тогда D_* — непустое тонко замкнутое в D множество, содержащее точку ζ', а $D \setminus D_*$ — непустое тонко открытое множество. Поэтому $\partial_f D_* \subset D \bigcup \partial_f D$, а поскольку $D \bigcap \partial_f D = \varnothing$, то $(\partial_f D_*) \bigcap \partial_f D = (\partial_f D_*) \setminus D$. Из условий (6), (12) и (13) следует

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D} u(\zeta) < \nu \log|z - a| + q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus Q,$$

а поэтому $\partial_f D_* \subset D \bigcup Q$. Отсюда и из соотношения $D \bigcap Q = \varnothing$ (которое является следствием соотношений $Q \bigcap G = \varnothing$ и $D \subset G$) следует $Q \bigcap \partial_f D_* = (\partial_f D_*) \setminus D$. Таким образом, $Q \bigcap \partial_f D_* = (\partial_f D) \bigcap \partial_f D_*$. Следовательно, множество $Q \bigcap \partial_f D_*$ тонко замкнуто в $\mathbb{C}$ и потому является объединением борелевского и полярного множеств [3, с. 76]. Оно полярно, так как содержится в Q и поэтому не содержит в себе неполярных компактов. На непустом множестве $(\partial_f D) \setminus (Q \bigcap \partial_f D_*) = (\partial_f D) \setminus ((\partial_f D) \bigcap \partial_f D_*) = (\partial_f D) \setminus \partial_f D_*$ верно неравенство

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D} u(\zeta) < \nu \log|z - a| + q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus (Q \bigcap (\{a\} \bigcup \partial_f D_*)). \tag{16}$$

Если точка $z_1 = a$ тонко отделима от D, то функция u ограничена сверху в D согласно условию теоремы. Тогда из (16) и принципа максимума для тонко гипогармонических функций с учетом полярности множества $Q \bigcap \partial_f D_*$ и тонкой связности D следует, что $u(\zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + q \;\; \forall\, \zeta \in D$. Но это противоречит соотношению $\zeta' \in D_* \subset D$ и предположенной оценке в точке $\zeta' \in D$. Значит, в данном случае оценка (14) верна.

Пусть теперь точка a есть тонко граничная точка для D (и отсюда $a \in b(D)$). Тогда то же самое верно для той компоненты G_j множества G, которая содержит D, т. е. $a \in b(G_j)$.

Если для $z_1 = a$ верно условие 2) теоремы 1, то из (12) видно, что функция $u(\zeta) - \nu \log|\zeta - a|$ ограничена сверху в D_a и в D. Поскольку $Q \bigcap \partial_f D_*$ — полярное множество, то, как и выше, из (16) на основании принципа максимума для тонко гипогармонических функций приходим к противоречию с предположенной оценкой в точке $\zeta' \in D$. Таким образом, и в этом случае верна оценка (14).

Рассмотрим теперь случай, когда для точки $z_1 = a$ имеет место условие 1) теорем 1 и 2, т. е. $a \in b(CG_j)$ и $u^a_{G_j} < +\infty$. Так как в некоторой окрестности V_1 точки a

$$\sup_{\zeta \in G_j \bigcap V_1} \frac{u(\zeta)}{|\log|\zeta - a||} < +\infty,$$

то существует постоянная $A > |\nu|$ такая, что функция $\theta(\zeta) := u(\zeta) + A \log|\zeta - a|$ ограничена сверху в D_a и на основании данного выше определения точки ζ' и соотношения (16) получаем

$$\theta(\zeta') \geq (\nu + A)\log|\zeta' - a| + q, \tag{17}$$

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A)\log|z - a| + q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus (Q \cap (\{a\} \cup \partial_f D_*)). \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Из определения l_ε и (18) следует оценка

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{\zeta \to z,\, \zeta \in D} \theta(\zeta) < (\nu + A)\, l_\varepsilon(a, z) + q \quad \forall\, z \in (\partial_f D) \setminus (Q \cap (\{a\} \cup \partial_f D_*)). \tag{19}$$

В D функция θ ограничена сверху и тонко гипогармонична, функция $H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), w)$ ограничена снизу и тонко гармонична по w при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Поэтому из (19) и того, что множество $Q \cap \partial_f D_*$ полярно, на основании принципа максимума следует, что при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$ верно $\theta(\zeta) \leq (\nu + A) H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), \zeta) + q$ $\forall\, \zeta \in D$.

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, на основании леммы получаем

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A)\, h_D(a, \zeta) + q = (\nu + A)(\log|\zeta - a| + g_D(a, \zeta)) + q \quad \forall\, \zeta \in D.$$

Из условия $a \in b(CG_j)$ следует, что $a \in b(CD)$, а поэтому $g_D(a, \zeta) = 0$. Значит,

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A)\log|\zeta - a| + q \quad \forall\, \zeta \in D.$$

Но это противоречит (17).

Следовательно, при условии 1) теорем 1 и 2 снова верно (14).

Таким образом, доказано, что при условиях теоремы 2 всегда верна оценка (14). Используем этот факт для доказательства аналогичной оценки для множества D^a. Рассмотрим образы множеств D^a, Q, G при отображении $\zeta_1 = 1/(\zeta - a)$ и применим изложенные выше рассуждения к точке $a_1 = 0$, функциям $u_1(\zeta_1) = u(\zeta)$, $\lambda_1(x) = \lambda(1/x)$ и числам $\nu_1 = -\nu$, $\sigma_1 = \sigma$, $q_1 = q$ (это законно вследствие инвариантности условий теоремы относительно указанной замены). Тогда получим аналог оценки (14), из которого при обратной замене объектов получаем

$$u(\zeta) \leq \nu\log|\zeta - a| + q \quad \forall\, \zeta \in D^a. \tag{20}$$

Следовательно,

$$u(\zeta) \leq \nu\log|\zeta - a| + q \quad \forall\, \zeta \in G. \tag{21}$$

Предположим, что в G оценка

$$u(\zeta) \leq \nu\log|\zeta - a| + \sigma \tag{22}$$

не выполняется. Тогда при некотором $\sigma' > \sigma$ в G не верна также оценка

$$u(\zeta) \leq \nu\log|\zeta - a| + \sigma'. \tag{23}$$

Поэтому в этом случае существует тонко связная компонента G' множества G и точка $\zeta' \in G'$, в которой (23) не выполняется. Обозначим через G_* множество всех тех $\zeta \in G'$, в которых $u(\zeta) \geq \nu\log|\zeta - a| + \sigma'$.

По аналогии с доказательством соответствующих свойств множества $\partial_f D_*$ (см. выше) можно убедиться, что множество $Q \cap \overline{\partial}_f G_*$ тонко замкнуто и потому полярно. При этом имеем

$$\overline{\operatorname*{fine\,lim}_{\zeta\to z,\,\zeta\in G'}}\,(u(\zeta)-\nu\log|z-a|-\sigma)\le 0\qquad \forall\, z\in(\partial_f G')\setminus(Q\cap\partial_f G_*). \tag{24}$$

Функция $\varphi(\zeta):=u(\zeta)-\nu\log|z-a|-\sigma$ тонко гипогармонична и ограничена сверху в G'. Предположим, что $(\partial_f G')\setminus(Q\cap\partial_f G_*)\ne\varnothing$. Тогда к функции $\varphi(\zeta)$ применим принцип максимума, и на основании (24) получаем $u(\zeta)\le$ $\le\nu\log|\zeta-a|+\sigma\ \ \forall\,\zeta\in G$, что противоречит определению G', основанному на предположении о нарушении в G' оценки (22). Следовательно, $(\partial_f G')\setminus$ $\setminus(Q\cap\partial_f G_*)=\varnothing$, и потому множество $\partial_f G'$ содержится в Q, а так как оно тонко замкнуто, то оно является полярным множеством. Тогда $G'=\mathbb{C}\setminus\partial_f G'\subset$ $\subset G$, и отсюда $G'\subset G\subset\mathbb{C}\setminus Q\subset\mathbb{C}\setminus\partial_f G'\subset G'$, т. е. $G'=G=\mathbb{C}\setminus Q=\mathbb{C}\setminus\partial_f G'$, $Q=\overset{\frown}{\partial}_f G'=\overset{\frown}{\partial}_f G$. На основании теоремы 9.14 из [5, с. 96] полярное множество $\overset{\frown}{\partial}_f G=Q$ устранимо для функции φ, т. е. функция φ тонко гипогармонически продолжима на множество $\overset{\frown}{\mathbb{C}}$ до (тонко гипогармонической и) ограниченной сверху в $\overset{\frown}{\mathbb{C}}$ функции с сохранением неравенства $\varphi(\zeta)\le q-\sigma$. Поэтому эта продолженная функция постоянна. Она конечна, ибо в противном случае она тождественно обращалась бы в $-\infty$ и было бы $u\equiv-\infty$, что противоречит предположению о нарушении оценки (22). Следовательно, верно

$$u(\zeta)=\nu\log|\zeta-a|+p\ \ \forall\,\zeta\in G \tag{25}$$

с некоторой постоянной $p\in(\sigma,q]$. Так как множество $\partial_f G=CG=Q$ полярно, то точки a и ∞ принадлежат множеству $b(G)$ и не принадлежат множеству $b(CG)$. Поэтому выполняется условие 2) теорем 1 и 2 для точек $z_1=a$ и $z_2=\infty$. При этом вследствие (25) и условия $G\cup\partial_f G=\mathbb{C}$ верно следующее: $\lambda\in L^*$, $I_\lambda=(0,+\infty)$, функция $\lambda(|z-a|)$ конечна и супергармонична в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, а функция $\psi(\zeta):=u(\zeta)-\lambda(|\zeta-a|)$ конечна, ограничена сверху и тонко гипогармонична в $G=G'$. Применяя к функции $\psi(\zeta)$ рассуждения, приведенные выше относительно функции $\varphi(\zeta)$, получаем

$$\psi(\zeta)\equiv\delta\quad\ \forall\,\zeta\in G \tag{26}$$

с некоторой постоянной $\delta\in\mathbb{R}$. Из (25) и (26) вытекает $\lambda(x)\equiv\nu\log x+p-\delta$ $\forall\,x\in(0,+\infty)$, а из (12) следует, что $\sigma\ge p-\delta$. Поэтому $\delta>0$. Таким образом, доказано, что если в G оценка (22) не верна, то имеет место исключительный случай утверждения теоремы 2, причем $c>\beta\ge 0$, а постоянная ν однозначно определяется функцией $u(\zeta)$.

Теперь предположим, что исключительный случай теоремы 2 не имеет места. Тогда при любых $\sigma,\nu\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию (12), в G верно (22) и функция u имеет в G тонко гармоническую мажоранту. Пусть $\zeta_0\in G$ и $G(\zeta_0)$ — тонко связная компонента множества G, содержащая ζ_0.

Сначала примем, что $\lambda\in L^*$. Если $x_\lambda^-<|\zeta_0-a|<x_\lambda^+$, то можно выбрать $\sigma,\nu\in\mathbb{R}$ такие, что выполнено (12) и $\lambda(|\zeta_0-a|)=\nu\log|\zeta_0-a|+\sigma$. Отсюда, из определения $M_{G,a}(u,r)$ и (22) следуют оценки

$$u(\zeta_0)\le\gamma_G(u,\zeta_0)\le M_{G,a}(u,|\zeta_0-a|)\le\lambda(|\zeta_0-a|). \tag{27}$$

Если $|\zeta_0-a|$ не лежит на сегменте $[x_\lambda^-,x_\lambda^+]$, то за счет выбора $\sigma,\nu\in\mathbb{R}$ можно добиться того, что число $\nu\log|\zeta_0-a|+\sigma$ станет меньше любого наперед заданного числа $M > -\infty$, а условие (12) сохранится. Поэтому из справедливости (22) в G следует, что

$$u(\zeta_0) = \gamma_G(u, \zeta_0) = M_{G,a}(u, |\zeta_0 - a|) = -\infty, \tag{28}$$

и потому для всех $\zeta \in G$, для которых $|\zeta - a| \notin [x_\lambda^-, x_\lambda^+]$, верно

$$u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = -\infty. \tag{29}$$

Из (27)–(29) получаем (3) и (5).

Если же $|\zeta_0 - a|$ равно x_λ^- или x_λ^+, то в $G(\zeta_0)$ благодаря (29) должно быть $u(\zeta) \equiv -\infty$, а потому и $\gamma_G(u, \zeta) \equiv -\infty \quad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0)$. Таким образом, равенства (29) верны для всех $\zeta \in G$ для которых либо $|\zeta - a| \le x_\lambda^-$, либо $|\zeta - a| \ge x_\lambda^+$. Следовательно, при $x_\lambda^- < x_\lambda^+$ верно и (4), а при $x_\lambda^- = x_\lambda^+$ верно $u \equiv -\infty$, $\gamma_G(u, \cdot) \equiv -\infty$, $M_{G,a}(u, r) = -\infty \ \forall\, r \ne x_\lambda^-$.

Из (3) с учетом определений следуют оценки

$$u_G^a \le -\lambda^0, \quad u_G^\infty \le \lambda^\infty, \quad -\infty \le \sigma^1 \le 0, \quad -\infty \le \sigma^2 \le 0.$$

Возьмем два числа τ_1, τ_2 такие, что при каждом $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) либо $\tau_s = \sigma^s = 0$, либо $\sigma^s < \tau_s \le 0$. Зафиксируем произвольные $\nu, \sigma \in \mathbb{R}$, для которых верно (12). Согласно доказанному выше имеет место (22).

Для $r > 0$ и любой функции $\theta:\ G \to [-\infty, +\infty)$ обозначим

$$\sup_{\zeta \in G, |\zeta - a| = r} \theta(\zeta) := m_{G,a}(\theta, r).$$

Теперь предположим, что множество $\partial_f G$ не полярно, и обозначим

$$V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta) := u(\zeta) - (\nu \log|\zeta - a| + \sigma) - \tau_1 g_G(a, \zeta) - \tau_2 g_G(\infty, \zeta).$$

Функция $V_{\tau_1, \tau_2}(\zeta)$ тонко гипогармонична в G и ограничена сверху на любой ограниченной части множества G, отделимой от точки a. Кроме того, во всех конечных точках $z \in b(\partial_f G) \setminus \{a\}$ имеем

$$\overline{\operatorname{fine\,lim}}_{w \to z,\, w \in G} V_{\tau_1, \tau_2}(w) \le 0.$$

Существуют конечные постоянные c_1, c_2 такие, что при $|\zeta - a| \ge 1$ верно $g_G(a, \zeta) \le c_1$, $g_G(\infty, \zeta) \le c_2 + \log|\zeta - a|$. Поэтому с учетом (22) имеем следующее. Если $\tau_2 = 0$, то

$$m_{G,a}\big(V_{\tau_1, \tau_2}, r\big) \le -\tau_1 c_1 \quad \forall\, r \ge 1.$$

Если же $\sigma^2 < \tau_2 < 0$, то при $r \ge 1$ справедливо

$$m_{G,a}\big(V_{\tau_1, \tau_2}, r\big) \le m_{G,a}(u, r) - (\nu \log r + \sigma) -$$

$$- \tau_1 c_1 - \tau_2(\log r + c_2) \le O(1), \qquad r \to +\infty,$$

так как либо $u_G^\infty = -\infty$ и $m_{G,a}(u, r) < (\nu + \tau_2)\log r$ при всех достаточно больших r, либо $u_G^\infty \ne -\infty$, $\lambda^\infty \ne -\infty$ и при всех достаточно больших r на основании (1) справедливо

$$m_{G,a}(u, r) - (\nu + \tau_2)\log r < (u_G^\infty - \nu - \sigma^2)\log r = (\lambda^\infty - \nu)\log r \le 0.$$

Следовательно, функция $m_{G,a}\big(V_{\tau_1, \tau_2}, r\big)$ ограничена сверху при всех $r \ge 1$.

Существуют конечные постоянные c_3, c_4 такие, что при $0 < |\zeta - a| \le 1$ верно $g_G(\infty, \zeta) \le c_3$, $g_G(a, \zeta) \le c_4 - \log|\zeta - a|$. Поэтому по аналогии с доказанным выше имеем следующее. Если $\tau_1 = 0$, то

$$m_{G,a}(V_{\tau_1,\tau_2}, r) \le -\tau_2 c_3 \quad \forall\, r \in (0, 1].$$

Если же $\sigma^1 < \tau_1 < 0$, то при $0 < r \le 1$ справедливо

$$m_{G,a}(V_{\tau_1,\tau_2}, r) \le m_{G,a}(u, r) - (\nu \log r + \sigma) -$$
$$- \tau_1(-\log r + c_4) - \tau_2 c_3 \le O(1), \quad r \to 0,$$

так как либо $u_G^a = -\infty$ и $m_{G,a}(u, r) < (\nu - \tau_1)\log r$ при всех достаточно малых r, либо $u_G^a \ne -\infty$, $\lambda^0 \ne -\infty$ и при всех достаточно малых r на основании (1) справедливо

$$m_{G,a}(u, r) - (\nu - \tau_1)\log r < (-u_G^a - \nu + \sigma^1)\log r = (\lambda^0 - \nu)\log r \le 0.$$

Таким образом, функция $m_{G,a}(V_{\tau_1,\tau_2}, r)$ ограничена сверху также при всех $r \in (0, 1]$.

Следовательно, функция V_{τ_1,τ_2} ограничена сверху в G и потому на основании принципа максимума для тонко гипогармонических функций [5, с. 76] получаем

$$V_{\tau_1,\tau_2}(\zeta) \le 0 \quad \forall\, \zeta \in G,$$

т. е.

$$u(\zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + \sigma + \tau_1 g_G(a, \zeta) + \tau_2 g_G(\infty, \zeta) \quad \forall\, \zeta \in G.$$

Устремляя τ_s к σ^s для $s = 1, 2$, в пределе получаем

$$u(\zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + \sigma + \sigma^1 g_G(a, \zeta) + \sigma^2 g_G(\infty, \zeta) \quad \forall\, \zeta \in G, \tag{30}$$

где при каждом $\zeta \in G$ приняты следующие соглашения. Если $g_G(a, \zeta) = 0$, то $\sigma^1 g_G(a, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^1 = -\infty$), а если $g_G(\infty, \zeta) = 0$, то $\sigma^2 g_G(\infty, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^2 = -\infty$). Если при некотором $\zeta_0 \in G$ выполняется условие

$$\sigma^1 g_G(a, \zeta_0) + \sigma^2 g_G(\infty, \zeta_0) = -\infty \tag{31}$$

(равносильное тому, что при некотором $s = 1, 2$ верно $\sigma^s = -\infty$ и $z_s \notin$ $\notin b(CG(\zeta_0))$), то имеем

$$u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = -\infty \quad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0).$$

Если же (31) не выполняется, то при каждом $s = 1, 2$, при котором $\sigma^s = -\infty$, должно быть $z_s \notin b(CG(\zeta_0))$ и $g_G(z_s, \zeta) = 0$ в $G(\zeta_0)$. В этом случае из неравенства (30) с учетом тонкой гармоничности в G всех слагаемых в его правой части следуют соотношения для $\zeta \in G(\zeta_0)$:

$$\gamma_G(u, \zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + \sigma + \sum_{s:\, z_s \notin b(CG(\zeta_0))} \sigma^s g_G(z_s, \zeta), \tag{32}$$

$$u(\zeta) - \sum_{s:\, \sigma^s \ne -\infty} \sigma^s g_G(z_s, \zeta) \le \nu \log|\zeta - a| + \sigma. \tag{33}$$

Оценка (32) для $\zeta \in G(\zeta_0)$ верна также в случае (31), что легко увидеть из указанных выше следствий этого условия. С учетом (22) оценка (33) верна для

$\zeta \in G(\zeta_0)$ и при условии (31); поэтому она верна для $\zeta \in G(\zeta_0)$ при любом $\zeta_0 \in G$ и, значит, верна для всех $\zeta \in G$. Отсюда следует оценка

$$M_{G,a}\left(u(\cdot) - \sum_{s:\ \sigma^s \neq -\infty} \sigma^s g_G(z_s, \cdot), |\zeta - a|\right) \leq \nu \log|\zeta - a| + \sigma \qquad \forall\, \zeta \in G. \quad (34)$$

Пусть $\zeta_0 \in G$. Если $x_\lambda^- < |\zeta_0 - a| < x_\lambda^+$, то можно выбрать $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$ такие, что выполняется (12) и

$$\lambda(|\zeta_0 - a|) = \nu \log|\zeta_0 - a| + \sigma.$$

Отсюда и из (32), (34) следуют неравенства

$$\gamma_G(u, \zeta_0) \leq \lambda(|\zeta_0 - a|) + \sum_{s:\ z_s \notin b(CG(\zeta_0))} \sigma^s g_G(z_s, \zeta_0),$$

$$M_{G,a}\left(u(\cdot) - \sum_{s:\ \sigma^s \neq -\infty} \sigma^s g_G(z_s, \cdot), |\zeta_0 - a|\right) \leq \lambda(|\zeta_0 - a|),$$

а отсюда следуют оценки (7) и (8). Таким образом, в случае $\lambda \in L^*$ все утверждения теоремы 2 доказаны.

Если же $\lambda \equiv -\infty$, то при любых $\sigma, \nu \in \mathbb{R}$ верно (12), откуда следуют соотношения (28) для каждого $\zeta_0 \in G$, а также соотношение $M_{G,a}(u, \cdot) \equiv -\infty$.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Решение вопроса о возможности знака равенства в оценках теорем 1 и 2 дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — тонко открытое множество; $\lambda \in L$; u — тонко гипогармоническая в G функция, для которой в G выполняется неравенство $u(\zeta) \leq \lambda(|\zeta - a|)$; ζ_0 — фиксированная в G точка, $G(\zeta_0)$ — тонко связная компонента множества G, содержащая точку ζ_0. Тогда:*

1) *если $u(\zeta_0) = \lambda(|\zeta_0 - a|)$, то существуют постоянные $\nu \in \mathbb{R}$ и $c \geq 0$ такие, что*

$$u(\zeta) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \qquad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0) \quad (35)$$

и, кроме того, либо $c = 0$, либо

$$\lambda(|\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \qquad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0); \quad (36)$$

2) *если $\gamma_G(u, \zeta_0) \geq \lambda(|\zeta_0 - a|)$, то существуют постоянные $\nu \in \mathbb{R}$ и $c \geq 0$ такие, что*

$$\gamma_G(u, \zeta) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \qquad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0) \quad (37)$$

и, кроме того, либо $c = 0$, либо

$$\lambda(|\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\nu) \qquad \forall\, \zeta \in G(\zeta_0). \quad (38)$$

Доказательство. Из условий теоремы следует существование тонко гармонической мажоранты для u и справедливость оценок (3) – (5) для функции $u(\zeta)$.

Предположим, что $u(\zeta_0) = \lambda(|\zeta_0 - a|)$, и докажем утверждение 1). Для этого обозначим

$$r_1 := \inf_{\zeta \in G(\zeta_0)} |\zeta - a|, \qquad r_2 := \sup_{\zeta \in G(\zeta_0)} |\zeta - a|,$$

$$G_0 := \{\zeta \in \mathbb{C} : r_1 < |\zeta - a| < r_2\}.$$

При $\lambda(|\zeta_0 - a|) \neq -\infty$ функция $u(\zeta) - \lambda(|\zeta - a|)$ тонко субгармонична в $G(\zeta_0)$, неположительна, в точке ζ_0 принимает значение нуль и (на основании известного принципа для тонко гипогармонических функций [5, с. 76]) тождественно равна нулю в $G(\zeta_0)$. Следовательно, в $G(\zeta_0)$ верно тождество

$$u(\zeta) \equiv \lambda(|\zeta - a|),$$

и потому функция $\lambda(|\zeta - a|)$ тонко гипогармонична в $G(\zeta_0)$. Более того, она гипогармонична в указанном кольце и конечна в одной из его точек. Следовательно, она субгармонична в нем. К тому же она постоянна на каждой окружности с центром в точке a, лежащей в кольце G_0. Ввиду изложенного ее среднее по окружности $|\zeta - a| = r$ есть конечная функция от r, выпуклая относительно $\log r$ при $r \in (r_1, r_2)$ [9, с. 81]. Так как это среднее равно функции $\lambda(r)$, вогнутой относительно $\log r$, то получаем, что $\lambda(r)$ — линейная функция от $\log r$ при $r \in (r_1, r_2)$. Отсюда следует соотношение (36) с отличной от нуля постоянной c, а потому и формула (35).

Пусть теперь $\lambda(|\zeta_0 - a|) = -\infty$. Тогда из соотношения $\lambda \in L$ следует, что $\lambda(r) = -\infty$ либо для всех $r \leq |\zeta_0 - a|$, либо для всех $r \geq |\zeta_0 - a|$. Значит, $u \equiv \equiv -\infty$ в $G(\zeta_0)$, т. е. верно (35) с постоянной $c = 0$.

Теперь предположим, что $\gamma_G(u, \zeta_0) \geq \lambda(|\zeta_0 - a|)$, и докажем утверждение 2). Если $\lambda(|\zeta_0 - a|) = -\infty$, то $u(\zeta_0) = -\infty$ и на основании утверждения 1) $u \equiv \equiv -\infty$ в $G(\zeta_0)$. Тогда $\gamma_G(u, \zeta) \equiv -\infty$ в $G(\zeta_0)$, т. е. верно (37) с постоянной $c = 0$.

Пусть теперь $\lambda(|\zeta_0 - a|) \neq -\infty$. Тогда тонко гипогармоническая функция $\gamma_G(u, \zeta)$ является тонко субгармонической в $G(\zeta_0)$. Отсюда следует, что функция $\lambda(|\zeta - a|)$ конечна квазивсюду в $G(\zeta_0)$. А так как $\lambda \in L$, то убеждаемся, что функция $\lambda(|\zeta - a|)$ конечна в $G(\zeta_0)$, и потому она тонко гипогармонична (и даже тонко субгармонична) в $G(\zeta_0)$. Вследствие этого получаем неравенство $\gamma_G(u, \zeta) \leq \lambda(|\zeta - a|)$ в $G(\zeta_0)$, а также равенство $\gamma_G(u, \zeta_0) = = \lambda(|\zeta_0 - a|)$. Таким образом, мы пришли к случаю 1) с множеством $G(\zeta_0)$ вместо G и тонко гипогармонической в $G(\zeta_0)$ функцией $\gamma_G(u, \zeta)$ вместо $u(\zeta)$. Отсюда следует справедливость утверждения 2).

Теорема 3 доказана.

1. *Тамразов П. М., Сарана О. А.* Контурно-тілесні властивості тонко субгармонічних функцій. – Київ, 1994. – 14 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.33).
2. *Тамразов П. М.* Усиленные контурно-телесные результаты для субгармонических функций // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 210–219.
3. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. – М.: Мир, 1974. – 224 с.
4. *Fuglede B.* Finely holomorphic functions. A survey // Rev. roum. math. pures et appl. – 1988. – **33**. – P. 283–295.
5. *Fuglede B.* Finely Harmonic Functions // Lect. Notes Math. Berlin etc: Springer, 1972. – № 289.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. – М.: Наука, 1977. – 600 с.
7. *Тамразов П. М.* Локальная контурно-телесная задача для субгармонических функций. – Киев, 1984. – 17 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.52).
8. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи голоморфных функций и отображений. – Киев, 1983. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
9. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

Получено 28.12.95