УДК 517.946

А. Н. Зарубин (Орлов. пед. ун-т, Россия)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

By using the method of integral equations, we prove the existence and the uniqueness of a regular solution of the Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation with a retarded argument.

Методом інтегральних рівнянь доведено існування та єдиність регулярного розв'язку задачі Коші для вироджуваного гіперболічного рівняння з загаювальним аргументом.

Уравнение

$$L(u) \equiv y^m u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) - y^m u(x-\tau, y) = 0, \tag{1}$$

где $0 < m$, $\tau \equiv \mathrm{const}$, рассмотрим в области $D = \bigcup_{k=0}^{n} D_k$. Здесь D_k — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A_k A_{k+1}$ оси $y = 0$, $k\tau \le$ $\le x \le (k+1)\tau$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и характеристиками

$$A_k C_k\colon\ x - y^\alpha/\alpha = k\tau; \qquad A_{k+1} C_k\colon\ x + y^\alpha/\alpha = (k+1)\tau,$$

выходящими соответственно из точек A_k, A_{k+1} и пересекающимися в точке C_k, а $\alpha = (m+2)/2$.

Регулярным решением уравнения (1) в области D будем называть функцию $u(x, y)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, имеющую непрерывные производные до второго порядка (включительно) в области D и удовлетворяющую уравнению (1).

Задача Коши. Найти в области D регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, y)\big|_{y=0} = \omega(x), \quad 0 \le x \le (n+1)\tau, \tag{2}$$

$$u_y(x, y)\big|_{y=0} = \nu(x), \quad 0 < x < (n+1)\tau, \quad x \ne k\tau, \tag{3}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_{(-1)}. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть* $\omega(x) \in C[k\tau, (k+1)\tau] \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)$, $\nu(x) \in C^2(k\tau, (k+1)\tau)$, $f(x, y) \in C(\overline{D}_{(-1)}) \cap C^1(D_{(-1)})$, *причем* $\nu(x)$ *обращается при* $x = k\tau$ *в бесконечность порядка меньше* $2/(m+2)$, *а* $\omega(x)$ *при* $x = 0$ *имеет нуль порядка* $m/(m+2)$ *и* $f(0, 0) = \omega(0)$.

Тогда существует единственное регулярное решение задачи Коши $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Если предположить, что решение задачи Коши для уравнения (1) в области D неединственно, т. е. u_1 и u_2 — два решения, то разность $v = u_2 - u_1$, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению (1) и нулевым начальным условиям (2) – (4).

Поскольку в $\overline{D}_{(-1)}$ $v(x, y) \equiv 0$, то для уравнения (1), представимого в D_0 в виде

$$L(v) \equiv y^m v_{xx}(x, y) - v_{yy}(x, y) = 0, \tag{1$'$}$$

выполняется тождество

$$2v_x L(v) \equiv \left(y^m v_x^2 + v_y^2\right)_x - 2\left(v_x v_y\right)_y = 0.$$

Интегрируя это равенство по характеристическому треугольнику с вершиной в произвольной точке области D_0 и основанием на оси абсцисс, а также предполагая, что функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1′), с помощью формулы Грина аналогично [1, с. 27, 28] можно показать, что $v(x, y)$ постоянна на каждой из характеристик рассматриваемого треугольника и далее $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0$.

Подобными рассуждениями с учетом того, что $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0$, получаем $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_1$.

Двигаясь последовательно далее, на k-м шаге убеждаемся, что $V(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, а потому $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Отсюда следует вывод, что решение задачи Коши, если оно существует, единственно.

Для построения решения задачи Коши уравнение (1) с помощью начального условия (4) запишем в виде неоднородного уравнения

$$L(u) \equiv y^m u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) - y^m H(x-\tau) u(x-\tau, y) =$$
$$= F(x, y) \equiv y^m H(\tau - x) f(x-\tau, y), \qquad x > 0, \tag{5}$$

где $H(\xi)$ — функция Хевисайда [2], при начальных условиях (2), (3).

Решение задачи Коши (5), (2), (3) будем искать в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} R_j(y) T_j(x). \tag{6}$$

Пусть

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j(y) T_j(x), \qquad x > 0. \tag{7}$$

Тогда из (5) получаем уравнения

$$T_j''(x) + \lambda_j^2 T_j(x) - H(x-\tau) T_j(x-\tau) = 0, \qquad x > 0, \tag{8}$$

$$R_j''(y) + \lambda_j^2 y^m R_j(y) = -f_j(y), \qquad y > 0. \tag{9}$$

В силу условий задачи Коши функция $T_j(x)$ является функцией-оригиналом [3]. Применяя к уравнению (8) интегральное преобразование Лапласа [3], после необходимых рассуждений получаем решение, обращающееся в нуль при $x = 0$, в виде

$$T_j(x) = \lambda_j P(x, \lambda_j), \qquad k\tau \le x \le (k+1)\tau, \tag{10}$$

где

$$P(x, \lambda_j) = \frac{H(x)}{\lambda_j} \sin \lambda_j x +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_j} \sum_{\theta=1}^{k} \gamma_\theta H(x - \theta\tau) \int_0^{x-\theta\tau} \eta \left((x-\theta\tau)^2 - \eta^2\right)^{\theta-1} \sin \lambda_j \eta \, d\eta, \tag{11}$$

а

$$\lambda_j = j\pi/\tau, \qquad \gamma_\theta = \left(\theta!\Gamma(\theta) 2^{2\theta-1}\right)^{-1},$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция [4].

Если $f_j(y) \equiv 0$ в уравнении (9), то [4] (формула 8.494.10)

$$R_j(y) = \sqrt{y}\left[B(\lambda_j) J_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha} y^\alpha\right) + C(\lambda_j) N_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha} y^\alpha\right)\right] \tag{12}$$

— его общее решение, в котором $J_r(t)$, $N_r(t)$ — функции Бесселя [4] первого и второго рода соответственно, а $B(\lambda_j)$, $C(\lambda_j)$ — произвольные действительные постоянные.

Метод Лагранжа [5] вариации произвольных постоянных позволяет записать

$$\begin{aligned} B(\lambda_j) &= \frac{\pi}{2\alpha}\int_0^y \sqrt{t}\, f_j(t) N_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}t^{\alpha}\right)dt + \alpha_j, \\ C(\lambda_j) &= -\frac{\pi}{2\alpha}\int_0^y \sqrt{t}\, f_j(t) J_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}t^{\alpha}\right)dt + \beta_j, \end{aligned} \tag{13}$$

где α_j, β_j — произвольные действительные постоянные.

Подставляя (10), (12), (13) в (6), получаем общее решение уравнения (5)

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \tag{14}$$

где в силу формулы 8.403.1 из [4]

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = \sqrt{y}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j P(x,\lambda_j)\left[\left(\alpha_j + \beta_j \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\alpha}\right)J_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}y^{\alpha}\right) - \right.\\ \left. - \beta_j \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2\alpha}\, J_{-1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}y^{\alpha}\right)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = \frac{\pi}{2\alpha}\sqrt{y}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j P(x,\lambda_j)\int_0^y \sqrt{t}\, f_j(t)\left[J_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}y^{\alpha}\right)N_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}t^{\alpha}\right) - \right.\\ \left. - N_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}y^{\alpha}\right)J_{1/(2\alpha)}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha}t^{\alpha}\right)\right]dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Из выражения (15), принимая во внимание условия (2), (3) и свойства функций Бесселя [4], находим

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^{1-1/(2\alpha)}\beta_j P(x,\lambda_j) = \delta_1\,\omega(x), \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^{1+1/(2\alpha)}\left(\alpha_j + \beta_j \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\alpha}\right)P(x,\lambda_j) = \delta_2\,\nu(x) \tag{18}$$

при $k\tau < x < (k+1)\tau$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, а

$$\delta_1 = -(2\alpha)^{-1/(2\alpha)}\sin\frac{\pi}{2\alpha}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right), \qquad \delta_2 = (2\alpha)^{1/(2\alpha)-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

Если

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^{-1/(2\alpha)}\beta_j \sin\lambda_j x = \delta_1 Y_{\omega}(x), \qquad k\tau < x < (k+1)\tau, \tag{19}$$

то из (17) в силу (11) получим интегральное уравнение Вольтерра с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} Y_{\omega}(x) + \sum_{\theta=1}^{k}\gamma_{\theta}H(x-\theta\tau)\int_0^{x-\theta\tau}\eta\left((x-\theta\tau)^2-\eta^2\right)^{\theta-1}Y_{\omega}(\eta)\,d\eta = \omega(x), \\ k\tau < x < (k+1)\tau, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{20}$$

причем при $k = 0$ здесь и далее все слагаемые со знаком суммирования опускаются.

Методом последовательного интегрирования (методом шагов) [6] найдем единственное, на основании способа построения, решение уравнения (20):

$$y_\omega(x) = \omega(x)H(x) + \\ + \sum_{\theta=1}^{k} (-1)^\theta \gamma_\theta H(x-\theta\tau) \int_0^{x-\theta\tau} \eta\left(x^2-(\eta+\theta\tau)^2\right)^{\theta-1} \omega(\eta)\,d\eta. \tag{21}$$

По условию теоремы $\omega(x) \in C[k\tau, (k+1)\tau] \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)$, а потому легко показать принадлежность функции $y_\omega(x)$ классу $C[k\tau, (k+1)\tau] \cap \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Из теории тригонометрических рядов [7] известно, что любая функция $y_\omega(x) \in C^1(k\tau, (k+1)\tau)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд (19) Фурье по синусам, в котором

$$\beta_j = \delta_1 \lambda_j^{1/(2\alpha)} \frac{2}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} y_\omega(t) \sin\lambda_j t\,dt. \tag{22}$$

Аналогичные рассуждения относительно (18) приводят к равенству

$$\alpha_j + \beta_j \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\alpha} = \delta_2 \lambda_j^{-1/(2\alpha)} \frac{2}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} y_\nu(t) \sin\lambda_j t\,dt, \tag{23}$$

где $y_\nu(x)$ соответствует (21), когда $\omega(x)$ заменено на $\nu(x)$.

Подставляя (22), (23) в (15), после преобразований, учета (11) и формулы 7.12.8 из [8] находим представление

$$u_1(x,y) = \delta_3 \int_0^1 \bar{y}_\omega(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/(2\alpha)-1/2}\,dt + \\ + \delta_4 y \int_0^1 \bar{y}_\nu(x,y,t)[t(1-t)]^{-1/(2\alpha)-1/2}\,dt, \tag{24}$$

где

$$\bar{y}_\omega(x,y,t) = y_\omega\left(x + \frac{1}{\alpha} y^\alpha (2t-1)\right) H(x) + \\ + \sum_{\theta=1}^{k} \gamma_\theta H(x-\theta\tau) \int_0^{x-\theta\tau} \eta\left((x-\theta\tau)^2-\eta^2\right)^{\theta-1} y_\omega\left(\eta + \frac{1}{\alpha} y^\alpha(2t-1)\right) d\eta, \tag{25}$$

а $\bar{y}_\nu(x,y,t)$ соответствует $\bar{y}_\omega(x,y,t)$, когда y_ω заменено на y_ν, причем

$$\delta_3 = \Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\alpha}\right), \qquad \delta_4 = \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha}\right).$$

Следует заметить, что при $k=0$ из равенства (24) получается решение задачи Коши для уравнения Геллерстедта.

Преобразуем второе слагаемое в (14). Из (16) в силу формул 9.389 из [3] и 9.131.1 из [4] получаем

$$u_2(x,y) = \left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^{1/2-1/(2\alpha)} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j P(x,\lambda_j) \int_0^y f_j(t)\,dt \times \\ \times \int_0^{(y^\alpha - t^\alpha)/\alpha} \cos\lambda_j\xi \left[\frac{1}{\alpha^2}(y^\alpha + t^\alpha)^2 - \xi^2\right]^{1/(2\alpha)-1/2} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}; 1; \frac{\xi^2-(y^\alpha-t^\alpha)^2/\alpha^2}{\xi^2-(y^\alpha+t^\alpha)^2/\alpha^2}\right)d\xi, \tag{26}$$

где ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [4].

Равенства (10), (11), (7) на основании теории тригонометрических рядов [7] и того, что $F(x, y) \in C^1(D_0)$, позволяют записать

$$f_j(y) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau F(t, y)\sin\lambda_j t\, dt, \tag{27}$$

а значит с помощью (11) находим

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j P(x, \lambda_j)\, f_j(t)\cos\lambda_j\xi =$$

$$= \frac{1}{2}[\,F(x-\xi, t) + F(x+\xi, t)\,]H(x) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{k}\gamma_\theta H(x-\theta\tau)\int_0^{x-\theta\tau}\eta\left((x-\theta\tau)^2-\eta^2\right)^{\theta-1}[\,F(\eta-\xi, t) + F(\eta+\xi, t)\,]d\eta.$$

Подставляя (27) в (26), с помощью последующих преобразований получаем выражение

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha}\int_0^y E_k(x, y, t)\,dt, \tag{28}$$

где

$$E_k(x, y, t) = M(x, y, t) +$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k}\gamma_\theta H(x-\theta\tau)\int_0^{x-\theta\tau}\eta\left((x-\theta\tau)^2-\eta^2\right)^{\theta-1}M(\eta, y, t)\,d\eta,$$

$$M(x, y, t) = \int_{x-(y^\alpha-t^\alpha)/\alpha}^{x+(y^\alpha-t^\alpha)/\alpha}F(r, t)\left[\frac{1}{\alpha^2}(y^\alpha+t^\alpha)^2-(x-r)^2\right]^{1/(2\alpha)-1/2}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}; 1; \frac{(x-r)^2-(y^\alpha-t^\alpha)^2/\alpha^2}{(x-r)^2-(y^\alpha+t^\alpha)^2/\alpha^2}\right)dr.$$

Равенство (14) вместе с (24) и (28) дает единственное регулярное решение задачи Коши, удовлетворяющее всем требованиям теоремы.

Автор глубоко признателен проф. Е. И. Моисееву за полезное обсуждение результатов работы.

1. *Крикунов Ю. М.* Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. – 210 с.
2. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. – Минск: Наука и техника, 1978. – 310 с.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975. – 408 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1967. – 564 с.
6. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
7. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

Получено 06.10.95