УДК 517.42:519.46

Г. В. Попович, Р. О. Попович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОЛЯ НАВ'Є – СТОКСА З ЛІНІЙНИМ ЗАВИХРЕННЯМ

We describe all the Navier-Stokes fields having the vorticity linear in space variables.

Описано всі поля Нав'є – Стокса, що мають завихрення, лінійне за просторовими змінними.

1. Вступ. Знаходження точних розв'язків рівнянь Нав'є – Стокса

$$\bar{u}_t + (\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} - \Delta\bar{u} + \nabla p = \bar{0}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\bar{u} = 0, \tag{2}$$

що описують рух в'язкої нестисливої рідини, є актуальною і, в той же час, складною задачею сучасної гідродинаміки. Один із шляхів її розв'язання полягає в тому, щоб дописати до рівнянь Нав'є–Стокса деяку додаткову умову і шукати розв'язки (часткові або загальний) для отриманої перевизначеної системи [1, 2]. У цій статті побудовано загальний розв'язок рівнянь (1), (2) при додатковій умові $(\operatorname{rot}\bar{u})_{ab} = \bar{0}$, тобто

$$\operatorname{rot}\bar{u} = H(t)\bar{x} + \bar{k}(t). \tag{3}$$

У формулах (1)–(3) і всюди далі вектор $\bar{u} = \{u^a(t,\bar{x})\}$ позначає поле швидкості рідини, $p = (t,\bar{x})$ — тиск, $\bar{x} = \{x_a\}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $\nabla = \{\partial_a\}$, $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ — лапласіан, $H = \{H^{ab}(t)\}$ — деяка матриця-функція розмірності 3×3, $\bar{k} = \{k^a(t)\}$. Густину рідини і кінематичний коефіцієнт в'язкості вважаємо рівними 1. Індекси a і b змінюються від 1 до 3. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними.

У гідродинамічних термінах поставлену задачу можна переформулювати наступним чином: описати всі течії в'язкої настисливої рідини, для яких завихрення поля швидкостей рідини лінійне за просторовими змінними. Даний клас течій включає як підкласи течії зі швидкістю, лінійною або квадратичною за просторовими змінними. При $H = 0$ і $\bar{k} = \bar{0}$ рівняння (3) вироджується в умову потенційності поля $\bar{u}$. Інтегруючи рівняння (3), маємо таке зображення для його розв'язків:

$$\bar{u} = \nabla\varphi + \frac{1}{3}(H\bar{x})\times\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{k}\times\bar{x}, \tag{4}$$

де $\varphi = \varphi(t,\bar{x})$ — довільна диференційовна функція. Зображення (4) дозволяє дати ще одне формулювання поставленої задачі: побудувати всі розв'язки рівнянь Нав'є–Стокса, для яких поле швидкості є лінійною суперпозицією потенціального поля і поля, квадратичного за просторовими змінними.

***Зауваження* 1.** Перетворення інваріантності рівнянь Нав'є–Стокса [3–6] є перетвореннями еквівалентності [7] для множини рівнянь вигляду (3), якщо функції H^{ab} і k^a вважати параметрами.

2. Формулювання результатів. Неведемо основний результат роботи.

Теорема 1. *Будь-який розв'язок системи* (1)–(3) *з точністю до перетворень еквівалентності локально (за змінною* t*) належить одній з наступних сімей:*

1) $H \neq 0$:

a) $$u^1 = (\zeta^1 + \beta^1)x_1 + \left(\beta^2 - \frac{1}{2}\kappa\right)x_2,$$

$$u^2 = \left(\beta^2+\frac{1}{2}\kappa\right)x_1+(\zeta^1-\beta^1)x_2,$$

$$u^3 = -\frac{1}{2}\lambda(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)\mu\sin\theta+x_1x_2\mu\cos\theta-2\zeta^1x_3, \tag{5}$$

$$p = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\mu^{-2}(\lambda_t)^2+(\zeta^1)^2+(\zeta^2)^2-\frac{1}{4}\kappa^2+\zeta^1_t\right)(x_1^2+x_2^2)-$$

$$-\frac{1}{2}(\beta^1_t+2\zeta^1\beta^1)(x_1^2-x_2^2)-(\beta^2_t+2\zeta^1\beta^2)x_1x_2-\left(\zeta^1_t-2(\zeta^1)^2\right)x_3^2-2\lambda x_3,$$

де $\kappa, \lambda, \mu, \beta^1, \beta^2, \zeta^1, \zeta^2, \theta$ *— гладкі функції змінної* t, *для яких виконуються співвідношення*

$$\mu>0, \quad \mu\mu_t = \lambda\lambda_t, \quad \lambda\neq\pm\mu,$$

$$\kappa_t+2\zeta^1\kappa = 0, \quad \theta_t = 2\lambda\mu^{-1}\zeta^2-\kappa,$$

$$\beta^1 = \frac{1}{2}\lambda_t\mu^{-1}\sin\theta+\zeta^2\cos\theta, \quad \beta^2 = \frac{1}{2}\lambda_t\mu^{-1}\cos\theta-\zeta^2\sin\theta;$$

б)

$$\begin{aligned}\vec{u} &= -\mu y_1^2\vec{e}^{\,3}+F^{ab}y_b\vec{e}^{\,a}+\beta\vec{e}^{\,1},\\ p &= \frac{2}{3}\mu(\vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,1})y_1^3-\frac{1}{2}G^{ab}y_ay_b-\left(\beta_t+\left(\zeta-\frac{1}{2}\mu_t\mu^{-1}\right)\beta\right)y_1-2\mu y_3,\end{aligned} \tag{6}$$

де $y_a = \vec{e}^{\,a}\cdot\vec{x}$; $\vec{e}^{\,1}$, $\vec{e}^{\,2}$, $\vec{e}^{\,3}$ *утворюють ортонормований базис, що гладко залежить від* t; $\mu, \kappa^1, \kappa^2, \zeta, \beta$ *— гладкі функції змінної* t, *що задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned}&\mu>0, \quad \beta = \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\kappa^1\kappa^2-\kappa^1(\vec{e}^{\,1}_t\cdot\vec{e}^{\,2})-\kappa^2(\vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,2})\right),\\ &\mu_t\mu^{-1}\kappa^1-2\zeta\kappa^1+2\kappa^1_t, \quad 2(\vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,1})\kappa^1-2\zeta\kappa^2-\kappa^2_t = 0;\end{aligned} \tag{7}$$

F *і* G *— гладкі матриці-функції змінної* t *розмірності* 3×3, *що визначаються формулами*

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu_t\mu^{-1}+\zeta & \vec{e}^{\,2}_t\cdot\vec{e}^{\,1} & \vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,1} \\ \vec{e}^{\,2}_t\cdot\vec{e}^{\,1}+\kappa^2 & \frac{1}{2}\mu_t\mu^{-1}+\zeta & -\vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,2} \\ \vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,1} & -\vec{e}^{\,3}_t\cdot\vec{e}^{\,2}+\kappa^1 & -2\zeta \end{pmatrix},$$

$$G = F_t+F\cdot F+F\cdot\mathscr{E}-\mathscr{E}\cdot F-2\mu\beta(\delta_{a3}\delta_{b1}), \quad \mathscr{E} = (\vec{e}^{\,a}_t\cdot\vec{e}^{\,b}),$$

δ_{ab} *— символ Кронекера* ($\delta_{ab}=1$, *якщо* $a=b$, *і* $\delta_{ab}=0$, *якщо* $a\neq b$).

в)

$$u^1 = x_1\left(r^{-1}\psi_{\omega r}-\frac{1}{2}\kappa_t\kappa^{-1}\right)+x_2\left(\kappa r^{-2}\psi_{\omega\omega}-\eta r^{-2}-\frac{1}{2}\kappa\right),$$

$$u^2 = x_2\left(r^{-1}\psi_{\omega r}-\frac{1}{2}\kappa_t\kappa^{-1}\right)-x_1\left(\kappa r^{-2}\psi_{\omega\omega}-\eta r^{-2}-\frac{1}{2}\kappa\right),$$

$$u^3 = \psi_{\omega\omega}-\frac{1}{2}r^2+\kappa_t\kappa^{-1}x_3, \tag{8}$$

$$p = -\psi_{\omega t} - (\kappa_t\kappa^{-1})_t\left(\frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}r^2\right) - \eta_t \operatorname{arctg} x_2/x_1 - \frac{1}{2}\bar{u}\cdot\bar{u} +$$

$$+ r\psi_r - 2x_3 + \frac{1}{8}r^4 - \frac{1}{2}\kappa_t\kappa^{-1}r^2x_3 + \eta\kappa\ln r + \frac{1}{4}(\kappa r)^2,$$

де $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\omega = x_3 - \kappa \operatorname{arctg} x_2/x_1$; η *і* κ *— гладкі функції змінної* t; $\kappa_t\kappa^{-1} := 0$, *якщо* $\kappa = 0$; *а функція* $\psi = \psi(t, r, \omega)$ *є розв'язком рівняння*

$$\psi_{rr} + r^{-1}\psi_r + \left((\kappa(t))^2 r^{-2} + 1\right)\psi_{\omega\omega} = 0; \tag{9}$$

2) $H = 0$, $\bar{k} \neq \bar{0}$:

$$\bar{u} = \Psi_{y_1}\bar{e}^1 + \Psi_{y_2}\bar{e}^2 + \left|\bar{k}\right|^{-2}(\bar{k}\cdot\bar{x})\bar{k}_t + \left|\bar{k}\right|^{-2}(\bar{k}_t\cdot\bar{x})\bar{k} -$$

$$- \frac{1}{2}\left|\bar{k}\right|^{-4}(\bar{k}_t\cdot\bar{k})(\bar{k}\cdot\bar{x})\bar{k} - \frac{1}{2}\left|\bar{k}\right|^{-2}(\bar{k}_t\cdot\bar{k})\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{k}\times\bar{x}, \tag{10}$$

$$p = -\varphi_t - \frac{1}{2}\bar{u}\cdot\bar{u} - \left|\bar{k}\right|\Theta + \frac{1}{4}(\bar{k}\times\bar{x})^2 + \frac{1}{2}\left|\bar{k}\right|^{-2}(\bar{k}\cdot\bar{x})(\bar{k}_t\times\bar{k}, \bar{x}),$$

де $y_i = \bar{e}^i\cdot\bar{x}$, $\bar{e}^i = \bar{e}^i(t)$, $i = \overline{1, 2}$, *— гладкі вектор-функції, для яких виконуються умови* $\left|\bar{e}^i\right| = 1$, $\bar{e}^1\cdot\bar{e}^2 = 0$, $\bar{e}^i\cdot\bar{k} = 0$, *причому вектори* $\bar{e}^1, \bar{e}^2$ *і* $\bar{k}$ *утворюють праву трійку;*

$$\varphi = \Psi + \left|\bar{k}\right|^{-2}(\bar{k}_t\cdot\bar{x})(\bar{k}\cdot\bar{x}) - \frac{1}{4}\left|\bar{k}\right|^{-4}(\bar{k}_t\cdot\bar{k})\left(|\bar{k}|^2|\bar{x}|^2 + (\bar{k}\cdot\bar{x})^2\right); \tag{11}$$

функції $\Psi = \Psi(t, y_1, y_2)$ *і* $\Theta = \Theta(t, y_1, y_2)$ *задовольняють систему Коші–Рімана*

$$\Psi_{y_1} = \Theta_{y_2}, \quad \Psi_{y_2} = -\Theta_{y_1}.$$

3) $H = 0$, $\bar{k} = \bar{0}$ *(потенціальні течії):*

$$\bar{u} = \nabla\varphi, \quad p = -\varphi_t - \frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi,$$

де функція $\varphi = \varphi(t, \bar{x})$ *є розв'язком рівняння Лапласа* $\Delta\varphi = 0$.

Зауваження 2. Розв'язки (5), (6), (8) і (10) є ліївськими [8].

3. Допоміжні твердження. При доведенні теореми 1 використовуються наступні твердження.

Лема 1. *Довільний лінійний оператор у просторі* $\mathbf{R}^3$ *можна зобразити у вигляді*

$$H\bar{x} = (\bar{m}\cdot\bar{x})\bar{m} - (\bar{n}\cdot\bar{x})\bar{n} + \gamma\bar{x} + \bar{l}\times\bar{x}, \tag{12}$$

де H *— матриця оператора* $\gamma \in \mathbf{R}$, $\bar{m}, \bar{n}, \bar{l} \in \mathbf{R}^3$,

$$\bar{m}\cdot\bar{n} = 0. \tag{13}$$

У зображенні (12) *число* γ *і вектор* $\bar{l}$ *визначаються однозначно, вектори* $\bar{m}$ *і* $\bar{n}$ *— з точністю до множника* ± 1.

Доведення. Нехай H^T позначає транспоновану до H матрицю. Якщо виконується рівність (12), то

$$(\bar{m}\cdot\bar{x})\bar{m} - (\bar{n}\cdot\bar{x})\bar{n} + \gamma\bar{x} = S\bar{x}, \tag{14}$$

де $S := \frac{1}{2}(H + H^T)$, і $2\bar{l} \times \bar{x} = (H - H^T)\bar{x}$, тобто

$$\bar{l} = \frac{1}{2}(H^{32} - H^{23}, H^{13} - H^{31}, H^{21} - H^{12})^T. \tag{15}$$

Оскільки матриця S симетрична, то ортогональними перетвореннями її можна звести до діагонального вигляду, тобто існує ортогональна матриця O така, що

$$\tilde{S} := OSO^T = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \qquad \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3.$$

Введемо позначення: $\tilde{\bar{m}} := O\bar{m}$, $\tilde{\bar{n}} := O\bar{n}$, $\tilde{\bar{x}} := O\bar{x}$. Тоді

$$\bar{m} = O^T\tilde{\bar{m}}, \qquad \bar{n} = O^T\tilde{\bar{n}}. \tag{16}$$

У нових позначеннях співвідношення (13) і (14) набувають вигляду

$$\tilde{\bar{m}} \cdot \tilde{\bar{n}} = 0, \qquad \left(\tilde{\bar{m}} \cdot \tilde{\bar{x}}\right)\tilde{\bar{m}} - \left(\tilde{\bar{n}} \cdot \tilde{\bar{x}}\right)\tilde{\bar{n}} + \gamma\tilde{\bar{x}} = S\tilde{\bar{x}}.$$

Отже, $\tilde{m}^a$, $\tilde{n}^a$, γ повинні задовольняти наступні рівняння:

$$(\tilde{m}^a)^2 - (\tilde{n}^a)^2 = \gamma_a - \gamma, \tag{17}$$

$$\tilde{m}^a\tilde{m}^b = \tilde{n}^a\tilde{n}^b, \quad a \neq b, \qquad \tilde{m}^a\tilde{n}^a = 0,$$

звідки $\tilde{m}^a\tilde{m}^b = 0$, $\tilde{n}^a\tilde{n}^b = 0$, якщо $a \neq b$, та $\tilde{m}^b\tilde{n}^b = 0$ (підсумовування по b тут немає). Це означає, що у векторів $\tilde{\bar{m}}$ і $\tilde{\bar{n}}$ є не більше ніж по одній ненульовій координаті, причому, якщо $\tilde{m}^a \neq 0$ і $\tilde{n}^b \neq 0$, то $a \neq b$. Тому з (17) випливає

$$\tilde{m}^1 = \pm(\gamma_1 - \gamma_2)^{1/2}, \quad \gamma = \gamma_2, \quad \tilde{n}^3 = \pm(\gamma_2 - \gamma_3)^{1/2}, \tag{18}$$
$$\tilde{m}^2 = \tilde{m}^3 = \tilde{n}^1 = \tilde{n}^2 = 0.$$

Вектори $\bar{m}, \bar{n}, \bar{l}$ і число γ, що визначаються за формулами (15), (16) і (18), задовольняють вимоги леми.

Лема 2. *Якщо* $H^{ab} \in C^1((t_0, t_1), \mathbf{R})$, *то в лемі* 1 $\bar{l} \in C^1\left((t_0, t_1), \mathbf{R}^3\right)$, *а* m^a, n^a, γ — *неперервно диференційовні функції на множині тих значень* t, *для яких* $\bar{m}(t) \neq \bar{0}$ *і* $\bar{n}(t) \neq \bar{0}$.

Доведення. Твердження леми щодо вектор-функції $\bar{l}$ очевидне завдяки (15), а для функцій m^a, n^a і γ воно є наслідком теореми про неявну функцію. Дійсно, ці функції задовольняють рівняння

$$m^a n^a = 0, \qquad (m^b)^2 - (n^b)^2 + \gamma = H^{bb},$$
$$m^a m^b - n^a n^b = \frac{1}{2}(H^{ab} + H^{ba}), \qquad a < b. \tag{19}$$

(Підсумовування по b тут немає.) Визначник з похідних лівих частин рівнянь (19) по m^a, n^a і γ має вигляд $-4\left(|\bar{m}|^2 + |\bar{n}|^2\right)|\bar{m} \times \bar{n}|^2$, а тому не дорівнює 0, коли $\bar{m} \times \bar{n} \neq \bar{0}$. За умови (13) для цього достатньо, щоб $\bar{m} \neq \bar{0}$ і $\bar{n} \neq \bar{0}$.

4. Доведення теореми 1. Підставимо вирази (3) і (4) для $\operatorname{rot}\bar{u}$ і $\bar{u}$ в рівняння Гельмгольца, що отримуються з рівнянь (1) за допомогою операції rot:

$$H_t\bar{x}+\bar{k}_t+(H+H^T)\nabla\varphi-\nabla\big((H\bar{x}+\bar{k})\cdot\nabla\varphi\big)+$$

$$+\frac{1}{3}\big[H((H\bar{x})\times\bar{x})-(H^2\bar{x})\times\bar{x}\big]+\frac{1}{2}H(\bar{k}\times\bar{x})-\frac{1}{3}(H\bar{k})\times\bar{x}+\frac{1}{6}(H\bar{x})\times\bar{k} = \bar{0}. \quad (20)$$

Використаємо зображення матриці H у вигляді (12). Оскільки згідно з (3) $\operatorname{div}(H\bar{x}+\bar{k}) = H^{aa}=0$, то в цьому зображенні

$$\gamma = \frac{1}{3}(\bar{n}\cdot\bar{n}-\bar{m}\cdot\bar{m}).$$

Підставляючи вираз (4) для поля $\bar{u}$ в (2), маємо неоднорідне рівняння Лапласа для функції φ:

$$\Delta\varphi = -\frac{2}{3}\bar{l}\cdot\bar{x}. \quad (21)$$

Ротор від рівнянь (20) має вигляд

$$2[(\bar{m}\cdot\nabla)\nabla\varphi\times\bar{m}-(\bar{n}\cdot\nabla)\nabla\varphi\times\bar{n}]+F\bar{x}+\bar{g} = \bar{0}, \quad (22)$$

де

$$\bar{g} = 2\bar{l}_t-(\bar{m}\cdot\bar{k})\bar{m}+(\bar{n}\cdot\bar{k})\bar{n}-\gamma\bar{k},$$

$$F\bar{x} = \frac{2}{3}\{(\bar{m}\times\bar{n},\bar{x})\bar{m}\times\bar{n}-(\bar{m}\cdot\bar{m}+\bar{n}\cdot\bar{n})((\bar{m}\cdot\bar{x})\bar{m}+(\bar{n}\cdot\bar{x})\bar{n})+$$

$$+\frac{1}{3}\big((\bar{m}\cdot\bar{m})^2+(\bar{n}\cdot\bar{n})^2+(\bar{m}\cdot\bar{m})(\bar{n}\cdot\bar{n})\big)\bar{x}+$$

$$+(\bar{l}\times\bar{m},\bar{x})\bar{m}+(\bar{l}\cdot\bar{m})\bar{m}\times\bar{x}-(\bar{l}\times\bar{n},\bar{x})\bar{n}-(\bar{l}\cdot\bar{n})\bar{n}\times\bar{x}\big\}.$$

Домножимо рівняння (22) скалярно на вектори $\bar{m}, \bar{n}$ і $\bar{m}\times\bar{n}$:

$$2(\bar{m}\times\bar{n},\nabla)(\bar{n}\cdot\nabla)\varphi+(F\bar{x}+\bar{g},\bar{m}) = 0, \quad (23)$$

$$2(\bar{m}\times\bar{n},\nabla)(\bar{m}\cdot\nabla)\varphi+(F\bar{x}+\bar{g},\bar{n}) = 0, \quad (24)$$

$$2(\bar{m}\cdot\bar{m}+\bar{n}\cdot\bar{n})(\bar{m}\cdot\nabla)(\bar{n}\cdot\nabla)\varphi-(F\bar{x}+\bar{g},\bar{m}\times\bar{n}) = 0. \quad (25)$$

Необхідною умовою сумісності рівнянь (23) і (24) є співвідношення $F\bar{m}\cdot\bar{m} = F\bar{n}\cdot\bar{n}$, звідки $\bar{m}\cdot\bar{m}=\bar{n}\cdot\bar{n}$ і $\gamma=0$. Розглянемо можливі випадки.

А. $\bar{m}\neq\bar{0}$, $\bar{n}\neq\bar{0}$. Подіємо оператором Лапласа на рівняння (20):

$$\big((\bar{m}\cdot\nabla)^2-(\bar{n}\cdot\nabla)^2\big)\nabla\varphi-\frac{10}{3}(\bar{l}\cdot\bar{m})\bar{m}+\frac{10}{3}(\bar{l}\cdot\bar{n})\bar{n} = \bar{0}. \quad (26)$$

З рівнянь (21), (23)–(26)

$$\bar{l}\cdot\bar{m}=\bar{l}\cdot\bar{n}=0,$$

тобто $\bar{l}=\sigma\bar{m}\times\bar{n}$, де σ — гладка функція змінної t.

Введемо позначення

$$\mu := \bar{m}\cdot\bar{m} = \bar{n}\cdot\bar{n}, \quad z_1 := \bar{m}\cdot\bar{x}, \quad z_2 := \bar{n}\cdot\bar{x}, \quad z_3 := (\bar{m}\times\bar{n},\bar{x}).$$

Проінтегруємо перевизначену систему (23)–(25), враховуючи додатково рівняння (21):

$$\varphi = \frac{1}{3}\mu^{-1}z_1z_2z_3 - \frac{1}{6}\sigma\mu^{-1}(z_1^2+z_2^2)z_3 + \frac{1}{2}\mu^{-3}(\bar{l}_t, \bar{m}\times\bar{n})z_1z_2 -$$

$$-\left(\mu^{-3}\bar{l}_t\cdot\bar{m} - \frac{1}{2}\mu^{-2}\bar{m}\cdot\bar{k}\right)z_2z_3 - \left(\mu^{-3}\bar{l}_t\cdot\bar{n} - \frac{1}{2}\mu^{-2}\bar{n}\cdot\bar{k}\right)z_1z_3 +$$

$$+\frac{1}{2}\mu^{-1}(\zeta^1+\zeta^2)z_1^2 + \frac{1}{2}\mu^{-1}(\zeta^1-\zeta^2)z_2^2 - \mu^{-2}\zeta^1z_3^2 + \eta^a z_a + \eta^0,$$

де $\zeta^1, \zeta^2, \eta^a, \eta^0$ — гладкі функції змінної t. Підставимо знайдений вираз для φ в (20) і розщепимо за змінними z_a. В результаті одержимо наступні рівняння:

$$\left(1-(\sigma)^2\right)(\bar{m}\times\bar{n}, \bar{m}_t) = 0, \quad \left(1-(\sigma)^2\right)(\bar{m}\times\bar{n}, \bar{n}_t) = 0,$$
$$\left(\left(1-(\sigma)^2\right)\mu^2\right)_t = 0, \tag{27}$$

$$2\sigma\mu\zeta^2 - (\bar{m}\times\bar{n}, \bar{k}) + 2(\bar{m}_t\cdot\bar{n}) = 0, \tag{28}$$

$$\mu^{-1}(\bar{m}\cdot\bar{k})(\bar{n}\cdot\bar{l}_t) + \mu^{-1}(\bar{n}\cdot\bar{k})(\bar{m}\cdot\bar{l}_t) + 2\zeta^1(\bar{m}\times\bar{n}, \bar{k}) + (\bar{m}\times\bar{n}, \bar{k}_t) = 0, \tag{29}$$

$$(\mu)^2(\eta^1-\sigma\eta^2) - (\zeta^1+\zeta^2)\bar{m}\cdot\bar{k} - \frac{1}{2}\mu^{-2}(\bar{n}\cdot\bar{k})(\bar{m}\times\bar{n}, \bar{l}_t) +$$
$$+ (\bar{m}\times\bar{n}, \bar{k})\left(\mu^{-2}\bar{n}\cdot\bar{l}_t - \frac{1}{2}\mu^{-1}\bar{n}\cdot\bar{k}\right) + \bar{m}\cdot\bar{k}_t = 0, \tag{30}$$

$$(\mu)^2(\sigma\eta^1-\eta^2) - (\zeta^1-\zeta^2)\bar{n}\cdot\bar{k} - \frac{1}{2}\mu^{-2}(\bar{m}\cdot\bar{k})(\bar{m}\times\bar{n}, \bar{l}_t) +$$
$$+ (\bar{m}\times\bar{n}, \bar{k})\left(\mu^{-2}\bar{m}\cdot\bar{l}_t - \frac{1}{2}\mu^{-1}\bar{m}\cdot\bar{k}\right) + \bar{n}\cdot\bar{k}_t = 0. \tag{31}$$

Якщо $(\sigma)^2 \neq 1$, то з рівнянь (27) випливає, що $\bar{m}\times\bar{n} = \mu\bar{e}$, $\bar{l} = \lambda\bar{e}$, де $\bar{e} = \mathrm{const}$, $|\bar{e}| = 1$, $\lambda := \sigma\mu$, а тому $\lambda \neq \mu$, $\mu\mu_t = \lambda\lambda_t$. Згідно з зауваженням 1 можна вважати, що додатково виконуються співвідношення $\bar{e} = (0, 0, 1)$, $\bar{m}\cdot\bar{k} = 0$, $\bar{n}\cdot\bar{k} = 0$, $\eta^3 = 0$. Тоді

$$\bar{m} = \mu^{1/2}(\cos\theta/2, -\sin\theta/2, 0), \quad \bar{n} = \mu^{1/2}(\sin\theta/2, \cos\theta/2, 0),$$

$$\bar{k} = \kappa\bar{e}, \quad \eta^1 = \eta^2 = 0, \quad \kappa_t + 2\zeta^1\kappa = 0,$$

де θ — гладка функція змінної t, для якої $\theta_t = 2\lambda\mu^{-1}\zeta^2 - \kappa$. Виконавши всі підстановки і проінтегрувавши рівняння (1) відносно функції p, отримаємо розв'язок (5).

Оскільки згідно з лемою 1 вектори $\bar{m}$ і $\bar{n}$ визначені з точністю до множника ± 1, то у випадку $(\sigma)^2 = 1$ можна покласти $\sigma = -1$. Перетворення еквівалентності дозволяють задовольнити ще такі умови: $\bar{m}\cdot\bar{k} = \bar{n}\cdot\bar{k}$, $\eta^1 = \eta^2$, $\eta^3 = 0$. Якщо ввести позначення

$$\beta := (2\mu)^{1/2}, \quad \bar{e}^1 := (2\mu)^{-1/2}(\bar{m}+\bar{n}), \quad \bar{e}^2 := (2\mu)^{-1/2}(\bar{m}-\bar{n}), \quad \bar{e}^3 := -\mu\bar{m}\cdot\bar{n},$$

то аналогічно з попереднім випадком отримаємо розв'язок (6), де рівняння (7) є наслідком рівнянь (28)–(31).

Б. $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$, $\vec{l} \neq 0$. У цьому випадку рівняння (22) має вигляд $\vec{l}_t = \vec{0}$, тобто $\vec{l} = \mathrm{const}$. За допомогою поворотів і масштабних перетворень зведемо $\vec{l}$ до вектора (0, 0, 1). Згідно з зауваженням 1 можна також вважати, що $\vec{l} \times \vec{k} = \vec{0}$, тобто $\vec{k} = (0, 0, \kappa)$, де $\kappa = \kappa(t)$. Проінтегруємо рівняння (20):

$$x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1 + \kappa\varphi_3 = -\frac{1}{6}\kappa(x_1^2 + x_2^2) + \kappa_t x_3 + \eta, \tag{32}$$

де $\eta = \eta(t)$. Розв'яжемо рівняння (32) відносно функції φ:

$$\varphi = \tilde{\psi}(t, r, \omega) - \frac{1}{6}x_3 r^2 + \kappa_t \kappa^{-1}\left(\frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{4}r^2\right) + \eta \operatorname{arctg} x_2 / x_1. \tag{33}$$

Тут змінні r і ω визначаються так само, як у (8). З (21) випливає, що функція $\tilde{\psi}$ задовольняє рівняння (9). Підставивши вираз (33) в (4) і проінтегрувавши рівняння (1) відносно функції p, отримаємо розв'язок (8). При цьому функція ψ визначається як розв'язок рівняння (9), для якого $\psi_\omega = \tilde{\psi}$.

В. $H = 0$, $\vec{k} \neq 0$. Проінтегруємо рівняння (20):

$$(\vec{k} \cdot \nabla)\varphi = \vec{k}_t \cdot \vec{x} + \chi.$$

Тут $\chi = \chi(t)$ — функція змінної t, яка обертається в нуль після застосування перетворення еквівалентності, після чого з (34) отримаємо вираз (11) для функції φ. Отже, відповідний розв'язок рівнянь Нав'є–Стокса має вигляд (10).

Г. Випадок $H = 0$, $\vec{k} = \vec{0}$ очевидний.

Теорему 1 доведено.

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 335 с.
2. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.
3. *Данилов Ю. А.* Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса. – М., 1967. – 15 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т атомной энергии).
4. *Бытев В. О.* Групповые свойства уравнений Навье–Стокса // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Вычисл. центр СО АН СССР, 1972. – 3, № 4. – С. 13–14.
5. *Lloyd S. P.* The infinitesimal group of the Navier–Stokes equations // Acta Mech. – 1981. – **38**, № 1–2. – P. 85–98.
6. *Fushchych W. I., Shtelen W. M., Slavutskiy S. L.* Reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1991. – **24**, № 4. – P. 971–984.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. *Fushchych W. I., Popowych R. O.* Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 1. – P. 75–113; № 2. – P. 158–188.

Одержано 25.03.96