УДК 517.946.9

М. А. Березовський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОДНОВИМІРНІ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ В ПРОБЛЕМАХ ЕКОЛОГІЇ

The statements of the problems with free boundaries are given for nonlinear parabolic equations arising in ecology and medicine. Some constructive methods for their solving are considered.

Наведено постановки задач з вільними межами для нелінійних параболічних рівнянь, що постають в проблемах екології та медицини, і розглянуто деякі конструктивні методи їх розв'язання.

Математичні моделі процесів забруднення та поновлення навколишнього середовища, а також теплових процесів охолодження та заморожування біотканини приводять до необхідності дослідження задач з вільними межами для параболічних рівнянь. Нижче розглядаються найпростіші (одновимірні) задачі вказаного типу.

1. Математична модель забруднення та очищення оточуючого середовища точковим джерелом. В [1] визначення концентрації забруднення $c(r, t)$, обумовленої точковим джерелом забруднення інтенсивності $Q(t)$, зведено до розв'язання наступної одновимірної нелінійної нелокальної задачі з вільною межею $r = r_\Phi(t)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 K(c)\frac{\partial c}{\partial r}\right) - \frac{\partial c}{\partial t} = f(c), \quad 0 < r < r_\Phi(t), \quad t > 0,\\ c(r, 0) = 0, \quad 0 < r < r_\Phi(0),\\ c(r, t) = c_r(r, t) = 0, \quad r = r_\Phi(t), \quad t > 0,\\ \int\limits_0^t \int\limits_0^{r_\Phi(t)} [c_t + f(c)] r^2\, dr\, dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t Q(t)\, dt, \quad t > 0,\end{gathered} \tag{1}$$

де $K(c)$ — коефіцієнт дифузії; $f(c)$ — інтенсивність поглинання забруднюючої речовини. Зауважимо, що замість нелокальної умови можна розглядати крайову умову

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{r^2 K(c)dc}{dr}\right) = \frac{Q(t)}{4\pi}.$$

Поряд з $c = c(r, t)$ належить визначити також функцію $r = r_\Phi(t)$.

У випадку $f(c) = f_0 c^\beta$, $K(c) = K = \text{const}$ при заміні залежної та незалежних змінних $c = c_0 u / ax$, $r = r_\Phi a x$, $t = r_\Phi^2 a^2 \tau / K$, де $a = \kappa^{-2/(3-\beta)}$, $\kappa^2 = f_0 c_0^{\beta-1} r_\Phi^2 / K$, задача (1) набуває канонічного вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = x^{1-\beta} u^\beta, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0,\\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s(0) \quad (s(0) = 0),\\ u(s(t), t) = u_x(s(t), t) = 0, \quad t > 0,\\ \int\limits_0^{s(t)} [u_t + x^{1-\beta} u^\beta]\, x\, dx = q(t), \quad t > 0,\end{gathered} \tag{2}$$

де $s(t)=r_{\Phi}(t)/r_{\Phi}$, $q(t)=Q\left(r_{\Phi}^2 a^2 t/K\right) / 4\pi c_0 r_{\Phi} K$ та τ замінено знову на t. Замість нелокальної умови в цьому випадку можна розглядати умову Діріхле $u(0, t)=q(t)$.

У такій постановці задача містить тільки одну функцію $q(t)$, яка об'єднує в собі всі вихідні параметри та довільні нормуючі множники c_0 і r_{Φ}, що мають розмірність відповідно $г/м^3$ та м. У подальшому будемо вважати, що ці сталі є одиницями розмірності. Відповідна (2) стаціонарна задача є нелокальною задачею для рівняння Емдена

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x^{1-\beta}u^{\beta}, \quad 0 < x < s,$$
$$u(s) = u_x(s) = \int_0^s x^{2-\beta}u^{\beta}\,dx = q. \tag{3}$$

Неважко бачити, що задача (2) еквівалентна однорідному інтегральному рівнянню Вольтерра та додатковій умові

$$u(x) = \int_x^s (\xi-x)u^{\beta}(\xi)\xi^{1-\beta}\,d\xi, \quad u(0) = \int_0^s \xi^{2-\beta}u^{\beta}\,d\xi = q. \tag{4}$$

У частинному випадку $\beta = 0$ отримуємо точний розв'язок стаціонарної задачі (3): $u(x)=(1/6)(2s+x)(s-x)^2$, де $s=(3q)^{1/3}$.

Точний розв'язок неліniної стаціонарної задачі з вільною межею для рівняння (3) записується й при $\beta = 1 - u(x) = qe^{-x}$. Проте просторова локалізація в цьому випадку відсутня: $s=\infty$.

У загальному випадку при $0<\beta<1$ необхідно знаходити наближений розв'язок системи рівнянь (4), яка не має точного розв'язку.

Розв'язання нестаціонарної нелокальної задачі (2) проведемо методом Роте, який базується на дискретизації за часом. Для цього введемо сітку з достатньо малим кроком τ і замінимо оператор u_t скінченно-різницевим аналогом. Тоді для знаходження наближеного значення $u(x)$ функції $u(x, t)$ на даному часовому шарі отримаємо нелокальну крайову задачу з вільною межею для звичайного диференціального рівняння

$$u'' - \tau^{-1}u = x^{1-\beta}u^{\beta} - \tau^{-1}\check{u}, \quad 0 < x < s,$$
$$u(s) = u_x(s) = 0, \tag{5}$$
$$\int_0^s [\tau^{-1}u + x^{1-\beta}u^{\beta}]x\,dx = q + \tau^{-1}\int_0^{\check{s}} \check{u}x\,dx,$$

де знаком $\check{}$ помічені значення відповідних величин на попередньому часовому шарі.

Неважко перевірити, що розв'язок диференціального рівняння задачі (5), який задовольняє умови на вільній межі $x=s$, можна представити як розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра

$$u(x) = \sqrt{\tau}\int_x^s \operatorname{sh}\frac{\xi-x}{\sqrt{\tau}}\xi^{1-\beta}u^{\beta}(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_0^{\check{s}} \operatorname{sh}\frac{\xi-x}{\sqrt{\tau}}\check{u}(\xi)\,d\xi, \quad 0 < x \le s, \tag{6}$$

і додаткового рівняння для визначення s:

$$\int_0^s [\tau^{-1}u + x^{1-\beta}u^\beta]x\,dx = q + \tau^{-1}\int_0^{\check{s}} \check{u}x\,dx. \tag{7}$$

Апроксимуючи $u(x)$ на відрізку $0 \le x < s$ поліномом n-го степеня та застосовуючи метод колокації, зводимо побудову наближеного розв'язку системи (6), (7) до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень $u_i = u(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $x_0 = 0$, $x_n = s$, та числа s. Відповідну програму чисельних розрахунків реалізовано на ПЕОМ.

Зауважимо що збіжність методу Роте доведено в різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого кола нелінійностей початково-крайових задач для нелінійних еволюційних рівнянь. Це стосується й похибок, пов'язаних з апроксимацією $u(x)$. На цих питаннях ми тут не зупиняємось.

Якщо замість нелокальної умови розглядати умову Діріхле $u(0, t) = q(t)$, то у випадку $\beta = 0$ на даному часовому шарі s визначається як корінь рівняння

$$F(s) = s\,\mathrm{ch}\frac{s}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\,\mathrm{sh}\frac{s}{\sqrt{\tau}} = \frac{q}{\tau},$$

а $u(x)$ — за формулою

$$u(x) = \tau\left(s\,\mathrm{ch}\frac{s-x}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\,\mathrm{sh}\frac{s-x}{\sqrt{\tau}} - x\right) - \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_x^{\check{s}} \mathrm{sh}\frac{\xi - x}{\sqrt{\tau}}\check{u}(\xi)\,d\xi, \qquad 0 < x \le s.$$

Оскільки $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$, а $F'''(0) > 0$, то $F(s)$ — монотонно зростаюча функція і, отже, рівняння $F(s) = q/\tau$ має єдиний обмежений додатній корінь при умові, що функція $q(t)$ монотонно зростаюча та обмежена, що відповідає фізиці розглядуваного процесу. При цьому очевидно, що $\check{s} < s < \infty$, тобто спостерігається просторова локалізація розв'язку як на кожному часовому шарі, так і при $t \to \infty$.

2. Одновимірні задачі з вільною межею в проблемах гіпотермії. У різноманітних областях медицини при охолодженні біотканин застосовуються сферичні та напівсферичні аплікатори. У таких випадках динаміка температурного поля біотканини визначається розв'язком наступної задачі з вільною межею [2]:

$$\begin{gathered} u_{xx} - a^2u_t = a^2x^{1-\beta}u^\beta, \quad 1 < x < s(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad 1 < x < s(0) \quad (s(0) = 1), \\ u_x - hu = -h\varphi(t), \quad x = 1, \quad t > 0, \\ u(s, t) = 0, \quad u_x(s, t) = 0, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\varphi(t)$ — задана монотонна зростаюча функція; a^2 і h — додатні сталі.

Відповідна (8) стаціонарна задача є задачею з вільною межею для рівняння типу Емдена–Фаулера

$$\begin{gathered} u_{xx} = a^2x^{1-\beta}u^\beta, \quad 1 < x < s, \\ u_x - hu = -h\varphi, \quad x = 1, \quad u(s) = 0, \quad u_x(s) = 0, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

За допомогою функції Гріна $g(x,\xi)=(1-h)/h+x+(\xi-x)\eta(x-\xi)$, де η — функція Хевісайда, задача (9) зводиться до нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра та додаткової умови

$$u(x) = a^2\int_x^s (\xi-x)u^\beta(\xi)\xi^{1-\beta}d\xi,$$

$$a^2\int_1^s [1+h(\xi-1)]u^\beta(\xi)\xi^{1-\beta}d\xi = h\varphi. \tag{10}$$

У випадку, коли $\beta=0$, отримуємо $u(x)=(a^2/6)(2s+x)(s-x)^2$, де s — додатний корінь рівняння $s^3+bs^2+d=0$ $(2a^2hd=a^2(h-3)-6h\varphi,\ 2a^2hb=3a^2(1-h))$. За формулами Кардана $s=[-g+(d^2+p^3)^{1/2}]^{1/3}+[-g-(d^2+p^3)^{1/2}]^{1/3}-b/3$, де $54g=2b^3+27d$, $9p=-b^2$. З нерівності $u(1)\le 1$ випливає умова $(a^2/6)(2s+1)(s-1)^2\le 1$, яка встановлює обмеження на параметри φ і h.

Після застосування методу Роте задача (8) зводится до еквівалентної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$u(x) = (a^2/2)\int_x^s \operatorname{sh} c(\xi-x)u^\beta(\xi)\xi^{1-\beta}d\xi - c\int_x^{\check{s}} \operatorname{sh} c(\xi-x)\check{u}(\xi)d\xi, \quad 1<x\le s,$$

$$\Phi(s) = a^2\int_1^s [\operatorname{ch}(c(\xi-1)) + (h/c)\operatorname{sh}(c(\xi-1))]u^\beta(\xi)\xi^{1-\beta}d\xi =$$

$$= h\varphi + ci\int_1^{\check{s}} [\operatorname{ch}(c(\xi-1)) + (h/c)\operatorname{sh}(c(\xi-1))]\check{u}(\xi)d\xi,$$

де $c^2=a^2/\tau$. Дослідження системи (11) аналогічне дослідженню системи (6), (7). У випадку $h=\infty$, $\beta=0$ система (11) перетворюється в нелінійне рівняння для визначення s та формулу для $u(x)$:

$$F(s) = s\operatorname{ch}\left(\frac{a(s-1)}{\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\sqrt{\tau}}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{a(s-1)}{\sqrt{\tau}}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\varphi}{\tau} + \frac{a}{\tau\sqrt{\tau}}\int_1^s \operatorname{sh}\left(\frac{a(s-1)}{\sqrt{\tau}}\right)\check{u}(\xi)d\xi,$$

$$u(x) = \tau\left(s\operatorname{ch}\left(\frac{a(s-x)}{\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\sqrt{\tau}}{a}\operatorname{sh}\left(\frac{a(s-x)}{\sqrt{\tau}}\right) - x\right) -$$

$$- \frac{a}{\sqrt{\tau}}\int_x^{\check{s}} \operatorname{sh}\left(\frac{a(s-x)}{\sqrt{\tau}}\right)\check{u}(\xi)d\xi. \tag{11}$$

Оскільки $F(1)=1$, $F'(s)=cs\operatorname{ch}\left(a(s-1)/\sqrt{\tau}\right)>0$ для всіх $s>1$, то рівняння $F(s)=q$ має єдиний додатний корінь s. При цьому очевидно, що $1\le\check{s}<s<\infty$, тобто спостерігається просторова локалізація розв'язку.

Наближений розв'язок задачі (8) при $0 \le \beta < 1$ будемо шукати у вигляді

$$\tilde{u}(x,t) \cong \overline{u}(x,t) = \overline{u}(1)\left(1 - \frac{x-1}{s(t)-1}\right)^{2/(1-\beta)},$$
$$\overline{u}(t) = \overline{u}(s) = \frac{(1-\beta)\,h\varphi(s-1)}{2+(1-\beta)\,h(s-1)}. \tag{12}$$

Крайові умови при цьому виконуються автоматично для довільної функції $s = s(t) \ge 0$. Будемо вимагати, щоб конструкція (12) задовольняла диференціальне рівняння у розумінні рівності нулю інтегральної нев'язки

$$\int_1^s \left[\tilde{u}_{xx} - a^2\left(\tilde{u}_t - x^{1-\beta}\tilde{u}^{\beta}\right)\right]dx = 0.$$

У результаті приходимо до задачі Коші для визначення $s(t)$:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta}a^2(s-1)\frac{d\overline{u}(s)}{dt} +$$
$$+\left[\frac{2\kappa^2\overline{u}(s)}{(1-\beta)h(s-1)^{(3-\beta)/(1-\beta)}}\int_1^s (s-x)^{(1+\beta)/(1-\beta)}(x-1)\,dx\right]\frac{ds}{dt} +$$
$$+\ a^2\int_1^s x^{1-\beta}\tilde{u}^{\beta}(x,t)\,dx + \frac{2u(s)}{(1-\beta)(s-1)} = 0, \qquad s(0) = 1.$$

Замінюючи похідну $d\overline{u}(s)/dt$ скінченною різницею, отримуємо нелінійне рівняння для визначення s на заданому часовому шарі

$$F(s) = \frac{1-\beta}{1+\beta}a^2(s-1)\,\overline{u}(s) +$$
$$+\left[\frac{2\kappa^2\overline{u}(s)}{(1-\beta)h(s-1)^{(3-\beta)/(1-\beta)}}\int_1^s (s-x)^{(1+\beta)/(1-\beta)}(x-1)\,dx\right]s -$$
$$-\ a^2\tau\int_1^s x^{1-\beta}\,\overline{u}^{\beta}(x,t)\,dx + \frac{2\tau\overline{u}(s)}{(1-\beta)(s-1)} - \frac{\kappa^2(s-1)}{1+\beta}(1-\beta)\breve{\overline{u}}(s) -$$
$$-\left[\frac{2\kappa^2\overline{u}(s)}{(1-\beta)h(s-1)^{(3-\beta)/(1-\beta)}}\int_1^s (s-x)^{(1+\beta)/(1-\beta)}(x-1)\,dx\right]\breve{s} = 0.$$

1. *Березовський Н. А., Догучаева С. М.* Задачи Стефана в проблеме загрязнения и самоочищения окружающей среды точечным источником // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 18–21.
2. *Березовський М. А., Кудаева Ф. Х.* Одновимірні задачі з вільною межею в проблемах кріомедицини // Математичні методи в науково-технічних дослідженнях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – С. 23–30.

Одержано 20.03.97