УДК 539.12

В. М. Симулик (Ин-т электронной физики НАН Украины, Ужгород)

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ОПИСЫВАЮЩИЕ СПЕКТР ВОДОРОДА

We obtain a new class of solutions of the Maxwell equations describing the hydrogen spectrum. We prove that, instead of the quantum mechanical Dirac equation, the ordinary classical Maxwell equations can be applied when solving the great number of problems in the atomic and nuclear physics.

Знайдено новий клас розв'язків рівнянь Максвелла, який описує спектр водню. Доведено застосовність до великої групи задач атомної та ядерної фізики замість квантовомеханічного рівняння Дірака звичайних класичних рівнянь Максвелла.

Введение. Для решения задачи о спектре водорода в современной математической физике используются специальные квантовомеханические уравнения — релятивистское уравнение Дирака и нерелятивистское уравнение Шредингера. Ниже показано, что обыкновенные классические уравнения Максвелла также вполне пригодны для решения этой задачи, пожалуй, одной из самых главных в современной атомной и ядерной физике.

Первую попытку описать спектр водорода при помощи уравнений Максвелла предпринял Саллхофер [1–5], см. также [6]. В отличие от этих работ, основанных на уравнениях Максвелла без зарядов и токов, ниже предлагается использовать уравнения Маквелла со специфическими токами и зарядами градиентного типа. Такой подход имеет по сравнению с работами [1–5] ряд преимуществ, которые будут продемонстрированы по ходу изложения.

На постановку задачи об описании спектра водорода уравнениями Максвелла, а не Дирака автора натолкнули исследования различных морфизмов между уравнениями Максвелла и Дирака, которые проводились [7–12] с различных точек зрения. Особо отметим связь между симметриями уравнений Дирака и Максвелла [7], из которой следует [8, 11] симметрия уравнений Максвелла с токами градиентного типа относительно представлений спина $1/2$, т. е. возможность применения (согласно теоретико-групповому подходу к физике элементарных частиц Вигнера и Баргмана–Вигнера) уравнений Максвелла к описанию движения частицы спина $1/2$, а не только хорошо изученная возможность их применения к частицам спина 1.

Краткие предварительные сообщения о построении на базе приводимых ниже водородных решений уравнений Максвелла новой электродинамической (классической!) модели атома см. в [13, 14].

1. Унитарная связь между стационарными уравнениями Максвелла и Дирака. Связь между уравнениями Максвелла и Дирака на основе унитарного оператора рассматривалась в [11, 12], однако только для случая, когда масса $m_0 = 0$ и взаимодействие $\Phi = 0$. При наличии массы и взаимодействия унитарной связи между уравнениями Дирака и Максвелла, в общем, не существует, однако, после перехода к стационарным уравнениям (а именно стационарный случай важен для атомных задач) унитарная связь может быть найдена между стационарным уравнением Дирака, взаимодействующим с внешним полем, и стационарными уравнениями Максвелла с токами и зарядами определенного вида в специфической среде, задаваемой параметром m_0 и функцией Φ.

Для установления указанной связи будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H} - \varepsilon\partial_0\vec{E} = \vec{j}_{\mathrm{e}}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \mu\partial_0\vec{H} = \vec{j}_{\mathrm{mag}}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = \rho_{\mathrm{e}}, \quad \operatorname{div}\vec{H} = \rho_{\mathrm{mag}},\end{gathered} \tag{1}$$

в которых $(\vec{H}, \vec{E})$ — напряженности электрического и магнитного полей, ε и μ — электрическая и магнитная проницаемость среды:

$$\varepsilon(\bar{x}) = 1 - \frac{\Phi(\bar{x}) + m_0}{\omega}, \quad \mu(\bar{x}) = 1 - \frac{\Phi(\bar{x}) - m_0}{\omega}, \tag{2}$$

а токи и заряды градиентного типа имеют вид

$$\bar{j}_{\mathrm{e}} = \operatorname{grad} E^0, \quad \bar{j}_{\mathrm{mag}} = -\operatorname{grad} H^0, \quad \rho_{\mathrm{e}} = -\mu\partial_0 E^0, \quad \rho_{\mathrm{mag}} = -\varepsilon\partial_0 H^0, \tag{3}$$

((E^0, H^0) — пара функций, порождающих источники), и уравнения Дирака

$$D\Psi \equiv (i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0 - \gamma^0\Phi)\Psi = 0; \quad \Psi \equiv (\Psi^\alpha), \quad \Phi \equiv \frac{Ze^2}{r}, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$
$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R_x^4, \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad g = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{4}$$

где

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{7}$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} (i\partial_0 - \Phi - m_0) & 0 & i\partial_3 & (i\partial_1 + \partial_2) \\ 0 & (i\partial_0 - \Phi - m_0) & (i\partial_1 - \partial_2) & -i\partial_3 \\ -i\partial_3 & (-i\partial_1 - \partial_2) & (-i\partial_0 + \Phi - m_0) & 0 \\ (-i\partial_1 + \partial_2) & i\partial_3 & 0 & (-i\partial_0 + \Phi - m_0) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

В вычислениях используется система единиц $\hbar = c = 1$.

Перейдем в (1) и (4) к стационарным уравнениям. Предполагая гармоническую зависимость

$$E^0(t, \bar{x}) = E_A^0(\bar{x})\cos\omega t + E_B^0(\bar{x})\sin\omega t,$$
$$H^0(t, \bar{x}) = H_A^0(\bar{x})\cos\omega t + H_B^0(\bar{x})\sin\omega t, \tag{9}$$

функций (E^0, H^0) от времени, ищем решения уравнений (1) в виде

$$\bar{E}(t, \bar{x}) = \bar{E}_A(\bar{x})\cos\omega t + \bar{E}_B(\bar{x})\sin\omega t,$$
$$\bar{H}(t, \bar{x}) = \bar{H}_A(\bar{x})\cos\omega t + \bar{H}_B(\bar{x})\sin\omega t. \tag{10}$$

Для 16 независящих от времени амплитуд получаем две неперекрывающиеся независимые подсистемы уравнений

$$\operatorname{rot}\bar{H}_A - \omega\varepsilon\bar{E}_B = \operatorname{grad} E_A^0, \quad \operatorname{rot}\bar{E}_B - \omega\mu\bar{H}_A = -\operatorname{grad} H_B^0,$$
$$\operatorname{div}\bar{E}_B = \mu\omega E_A^0, \quad \operatorname{div}\bar{H}_A = -\varepsilon\omega H_B^0, \tag{11}$$

$$\operatorname{rot}\bar{H}_B + \omega\varepsilon\bar{E}_A = \operatorname{grad} E_B^0, \quad \operatorname{rot}\bar{E}_A + \omega\mu\bar{H}_B = -\operatorname{grad} H_A^0,$$
$$\operatorname{div}\bar{E}_A = -\mu\omega E_B^0, \quad \operatorname{div}\bar{H}_B = \varepsilon\omega H_A^0. \tag{12}$$

Предполагая стандартную для уравнения Дирака зависимость от времени

$$\Psi(x) = \Psi(\bar{x})e^{-i\omega t} \Rightarrow \partial_0\Psi(x) = -i\omega\Psi(x), \tag{13}$$

обычным образом переходим от (4) к стационарному уравнению Дирака

$$D^{\mathrm{stat}}\Psi(\bar{x}) = 0, \tag{14}$$

где

$$D^{\text{stat}} = \begin{vmatrix} (\omega-\Phi-m_0) & 0 & i\partial_3 & (i\partial_1+\partial_2) \\ 0 & (\omega-\Phi-m_0) & (i\partial_1-\partial_2) & -i\partial_3 \\ -i\partial_3 & (-i\partial_1-\partial_2) & (-\omega+\Phi-m_0) & 0 \\ (-i\partial_1+\partial_2) & i\partial_3 & 0 & (-\omega+\Phi-m_0) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

В обозначениях (2) система (14) принимает вид

$$\begin{aligned} -i\omega\varepsilon\Psi^1 + (\partial_1 - i\partial_2)\Psi^4 + \partial_3\Psi^3 &= 0, \\ -i\omega\varepsilon\Psi^2 + (\partial_1 + i\partial_2)\Psi^3 - \partial_3\Psi^4 &= 0, \\ -i\omega\mu\Psi^3 + (\partial_1 - i\partial_2)\Psi^2 + \partial_3\Psi^1 &= 0, \\ -i\omega\mu\Psi^4 + (\partial_1 + i\partial_2)\Psi^1 - \partial_3\Psi^2 &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

Теорема 1. *Стационарные уравнения Дирака* (16) *переходят в стационарные уравнения Максвелла* (11) *после подстановки в* (16) *вместо* Ψ *следующей комбинации не зависящих от времени электромагнитных амплитуд:*

$$\Psi_{\text{prima}} = \begin{vmatrix} -H_B^0 + iE_B^3 \\ -E_B^2 + iE_B^1 \\ E_A^0 + iH_A^3 \\ -H_A^2 + iH_A^1 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

а в уравнения (12) *система* (16) *переходит при следующей подстановке:*

$$\Psi_{\text{secunda}} = \begin{vmatrix} -H_A^0 + iE_A^3 \\ -E_A^2 + iE_A^1 \\ -E_B^0 - iH_B^3 \\ H_B^2 - iH_B^1 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство теоремы выполняется непосредственной подстановкой (17) (или (18)) в уравнения (16) с учетом того, что вещественные и мнимые части получаемых выражений в отдельности равны нулю.

Полный набор преобразованный, связывающих стационарные уравнения Дирака и Максвелла, легко получить при помощи операторов Паули–Гюрши в полной аналогии с тем, как это сделано в [9, 10] для случая $E^0 = H^0 = 0$ (или в [7, 11, 12] для обычного нестационарного уравнения Дирака с $m = 0$).

Правую часть (17) полезно представить в терминах компонент комплексной функции

$$\mathbb{E} \equiv \begin{vmatrix} \vec{\mathbb{E}} \\ \mathbb{E}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E^1 - iH^1 \\ E^2 - iH^2 \\ E^3 - iH^3 \\ E^0 - iH^0 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

предварительно опустив индексы A и B у электромагнитных амплитуд. Здесь $\vec{\mathbb{E}} = \vec{E} - i\vec{H}$ — известная форма для электромагнитного поля, используемая еще Майорана (см., например, [15]), а $\mathbb{E}^0 = E^0 - iH^0$ — комплексное скалярное поле. Формы уравнений Максвелла, использующие объект $\vec{\mathbb{E}} = \vec{E} - i\vec{H}$ или (19), см., например, в [16].

Теорема 2. *Унитарная связь между стационарными спинорными и электромагнитным (вместе со скалярным) полями имеет вид*

$$\mathbb{E} = W\Psi, \quad \Psi = W^{+}\mathbb{E}, \tag{20}$$

где явный вид унитарного оператора следующий:

$$W = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -i+iC & 0 & -1+C \\ 0 & -1-C & 0 & i+iC \\ -i+iC & 0 & -1+C & 0 \\ i+iC & 0 & 1+C & 0 \end{vmatrix}; \quad C\Psi \equiv \Psi^{*}, \quad C\mathbb{E} = \mathbb{E}^{*}. \tag{21}$$

Доказательство. В унитарности оператора (21) легко убедиться, если принять во внимание операторные свойства

$$(AC)^{+} = CA^{+}, \quad aC = Ca^{*}, \quad (aC)^{*} = Ca, \tag{22}$$

которые выполняются для произвольной матрицы A и числа a. Не представляет труда найти аналогичный унитарный оператор и для связи (18). Ввиду зависимости от C подобные операторы называют также унитарными-антиунитарными или антилинейными.

Оператор (21) преобразует стационарное уравнение Дирака

$$\left[(\omega-\Phi)\gamma^{0} + i\gamma^{k}\partial_{k} - m_{0}\right]\Psi(\bar{x})e^{-i\omega t} = 0 \tag{23}$$

из стандартного представления (представления Паули–Дирака) в бозонное представление

$$\left[(\omega-\Phi)\tilde{\gamma}^{0} + \tilde{i}\,\tilde{\gamma}^{k}\partial_{k} - m_{0}\right]\mathbb{E}(\bar{x}) = 0. \tag{24}$$

Матрицы Дирака в бозонном представлении имеют необычный вид

$$\tilde{\gamma}^{0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} C, \quad \tilde{\gamma}^{1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$\tilde{\gamma}^{2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{3} = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix}, \tag{25}$$

в котором матрица $\tilde{\gamma}^{0}$ содержит явно оператор C комплексного сопряжения, *а* число i из (23) в уравнении (24) становится матричным оператором $\tilde{i}$ следующего вида:

$$\tilde{i} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Ввиду унитарности оператора (21) матрицы $\tilde{\gamma}^{\mu}$ по-прежнему удовлетворяют алгебре Клиффорда–Дирака .

$$\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu} + \tilde{\gamma}^{\nu}\tilde{\gamma}^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \tag{27}$$

и имеют те же свойства эрмитовости, что и матрицы γ^{μ} в представлении Паули–Дирака:

$$\tilde{\gamma}^{0+} = \tilde{\gamma}^{0}, \quad \tilde{\gamma}^{k+} = -\tilde{\gamma}^{k}. \tag{28}$$

В векторно-скалярной форме уравнения (24) имеют вид

$$-i\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbb{E}} + [(\omega-\Phi)C - m_0]\,\bar{\mathbb{E}} = -\mathrm{grad}\,\mathbb{E}^0, \qquad \mathrm{div}\,\bar{\mathbb{E}} = [(\omega-\Phi)C + m_0]\,\mathbb{E}^0. \tag{29}$$

Выполняя в них переход к обычным вещественным напряженностям по формуле $\mathbb{E} = E - iH$ и отделяя вещественные и мнимые части, немедленно получаем уравнения (11).

Таким образом, здесь доказана унитарная связь между стационарным уравнением Дирака (с внешним полем) и стационарными уравнениями Максвелла (11) или (12) с токами и зарядами определенного вида. Доказано также взаимнооднозначное соответствие между множеством решений стационарного уравнения Дирака и множеством решений стационарных уравнений Максвелла (11) (или (12)).

Заметим, что в [1–5] используется изоморфизм между множеством решений стационарных уравнений Максвелла без источников и подмножеством решений стационарного уравнения Дирака, выделяемого из полного множества решений этого уравнения наложением пуанкаре-неинвариатных дополнительных условий $E^0 = H^0 = 0$. Поскольку хорошо известно и не вызывает (по крайней мере, на сегодняшний день) сомнений, что спектр водорода описывается полным множеством (а не каким-либо подмножеством, выделяемым каким-либо дополнительным условием) решений стационарного уравнения Дирака, то выбор в [1–5] формы изоморфизма между уравнениями Дирака и Максвелла считаем неудачным, именно поэтому здесь строится другая теория на основе другой формы подобного изоморфизма. Более того, в случае $E^0 = H^0 = 0$ между стационарными уравнениями Дирака и Максвелла не существует унитарной связи.

Тем не менее, следует отметить пионерскую роль теории [1–5], которая во многом стимулировала настоящее исследование и заставила внимательно рассмотреть возможность связать спектр водорода не, как обычно, с решениями уравнения Дирака, а с решениями уравнений Максвелла. Модель атома Саллхофера представлена в [6].

2. Водородные решения уравнений Максвелла. Рассмотрим электродинамически полную систему уравнений Максвелла с токами и зарядами градиентного типа в среде

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\,\bar{H} - \varepsilon\partial_0\bar{E} = \bar{j}_e, \qquad \mathrm{rot}\,\bar{E} + \mu\partial_0\bar{H} = \bar{j}_{\mathrm{mag}}, \\ \mathrm{div}\,\varepsilon\bar{E} = \rho_e, \qquad \mathrm{div}\,\mu\bar{H} = \rho_{\mathrm{mag}}, \end{gathered} \tag{30}$$

эквивалентную системе (1). Электрическая и магнитная проницаемости в (30) те же, что и в (1), т. е. задаются формулами (2), тот же и явный вид токов, а для зарядов теперь имеем другие выражения

$$\rho_e = -\varepsilon\mu\partial_0 E^0 + \bar{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon, \qquad \rho_{\mathrm{mag}} = \varepsilon\mu\partial_0 H^0 + \bar{H}\,\mathrm{grad}\,\mu. \tag{31}$$

Система (30) в отличие от (1) позволяет строить электродинамически замкнутую модель атома, т. е. интерпретировать все явления, происходящие в атоме, только в рамках классической электродинамики в специфической внутриатомной среде (2) без апеллирования к квантовой механике. Тем не менее, именно система (1), а не (30) непосредственно связана с уравнением Дирака, как показано в предыдущем пункте.

Предполагая гармоническую зависимость (9) функций (E^0, H^0) от времени, ищем решения уравнений (30) в виде (10). Как и в предыдущем пункте, для 16 независящих от времени амплитуд получаем две неперекрывающиеся независимые подсистемы уравнений

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\,\bar{H}_A - \omega\varepsilon\bar{E}_B = \mathrm{grad}\,E_A^0, \qquad \mathrm{rot}\,\bar{E}_B - \omega\mu\bar{H}_A = -\mathrm{grad}\,H_B^0, \\ \mathrm{div}\,\varepsilon\bar{E}_B = \varepsilon\mu\omega E_A^0 + \bar{E}_B\,\mathrm{grad}\,\varepsilon, \qquad \mathrm{div}\,\mu\bar{H}_A = -\varepsilon\mu\omega H_B^0 + \bar{H}_A\,\mathrm{grad}\,\mu, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\operatorname{rot} \bar{H}_B + \omega\varepsilon\bar{E}_A = \operatorname{grad} E_B^0, \qquad \operatorname{rot} \bar{E}_A + \omega\mu\bar{H}_B = -\operatorname{grad} H_A^0,$$
$$\operatorname{div}\varepsilon\bar{E}_A = -\varepsilon\mu\omega E_B^0 + \bar{E}_A \operatorname{grad}\varepsilon, \qquad \operatorname{div}\mu\bar{H}_B = \varepsilon\mu\omega H_A^0 + \bar{H}_B \operatorname{grad}\mu. \tag{33}$$

Допуская сферическую симметрию в случае, когда $\Phi(\bar{x}) = \Phi(r)$, $r \equiv |\bar{x}|$, ищем решения системы (32) (или (33)) в сферических координатах в виде

$$(E, H)(\bar{r}) = R_{(E,H)}(r) f_{(E,H)}(\theta, \varphi), \tag{34}$$

где $E \equiv (E^0, \bar{E})$, $H \equiv (H^0, \bar{H})$.

Ниже приведем сначала, как и в [3–5], водородные решения стационарного уравнения Дирака (16) в удобных для нас обозначениях, а затем по установленным здесь связям (17), (18) найдем стационарные решения уравнений Максвелла (32) и (33).

В дальнейшем понадобятся следующие простейшие формы в сферических координатах (C — константа):

$$(\partial_1 + i\partial_2)\Psi = (\partial_1 + i\partial_2)\, CR(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \tag{35}$$

$$\partial_3\Psi = \partial_3 CR(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{36}$$

Для получения этих выражений в удобном явном виде используем известные в теории Дирака операторы

$$(\partial_1 \pm i\partial_2) = e^{\pm i\varphi}\left(\sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta \pm \frac{i}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right), \tag{37}$$

$$\partial_3 = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta \tag{38}$$

и соответствующие сферические функции (присоединенные полиномы Лежандра)

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d\cos^m\theta}, \qquad 0 \le |m| \le l. \tag{39}$$

Рассмотрим известные [17, 18] рекуррентные соотношения для сферических функций и представлений тригонометрических функций сферическими:

$$(2l+1)\sin\theta P_l^m = (l-m+1)(l-m+2) P_{l+1}^{m-1} - (l+m-1)(l+m) P_{l-1}^{m-1}, \tag{40}$$

$$(2l+1)\left(-\frac{m}{\sin\theta}P_l^m + \sin\theta\cos\theta d_{\cos\theta} P_l^m\right) = (l+1)(l+m)(l+m-1) P_{l-1}^{m-1} +$$
$$+ l(l-m+1)(l-m+2) P_{l+1}^{m-1}, \tag{41}$$

$$(2l+1)\sin^2\theta d_{\cos\theta} P_l^m = (l+1)(l+m) P_{l-1}^m - l(l-m+1) P_{l+1}^m, \tag{42}$$

$$(2l+1)\cos P_l^m = (l+m) P_{l-1}^m + (l-m+1) P_{l+1}^m, \tag{43}$$

$$\sin\theta = \frac{P_{l-1}^{m+1} - P_{l+1}^{m+1}}{(2l+1)P_l^m}, \tag{44}$$

$$\cos\theta = \frac{(l-m+1)P_{l+1}^m + (l+m)P_{l-1}^m}{(2l+1)P_l^m}, \tag{45}$$

Формулы (40)–(45) либо непосредственно представлены в [17], либо получаются из имеющихся там формул линейными комбинациями или тождественными преобразованиями. Их можно получить также из [18] или из других справочников.

Для замены m на $(-m)$ удобно пользоваться соотношением

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m, \tag{46}$$

которое легко получить из имеющихся в [19] выражений. Выполняя в (40), (41) замену m на $(-m)$ и применяя (46), получаем более простые рекуррентные соотношения

$$(2l+1)\sin\theta P_l^m = P_{l-1}^{m+1} - P_{l+1}^{m+1}, \tag{47}$$

$$(2l+1)\left(\frac{m}{\sin\theta}P_l^m + \sin\theta\cos\theta\, d_{\cos\theta}P_l^m\right) = -(l+1)P_{l-1}^{m+1} - l\,P_{l+1}^{m+1}. \tag{48}$$

Подставляя в (35) явный вид (37), используя

$$\partial_\theta P_l^m(\cos\theta) = -\sin\theta\partial_{\cos\theta}P_l^m(\cos\theta) \tag{49}$$

и (47), (48), получаем

$$(\partial_1 \pm i\partial_2)CRP_l^m e^{\pm im\varphi} = \frac{Ce^{\pm i(m+1)\varphi}}{2l+1}\left[\left(d_r + \frac{l+1}{r}\right)RP_{l-1}^{m+1} - \left(d_r - \frac{l}{r}\right)RP_{l+1}^{m+1}\right]. \tag{50}$$

Вводя удобное обозначение

$$\left(d_r + \frac{a}{r}\right)R \equiv R_{,a}, \tag{51}$$

окончательно имеем

$$(\partial_1 \pm i\partial_2)CRP_l^m e^{\pm im\varphi} = \frac{-Ce^{\pm i(m+1)\varphi}}{2l+1}\left[R_{,-l}P_{l+1}^{m+1} - R_{,l+1}P_{l-1}^{m+1}\right]. \tag{52}$$

Аналогично, подставляя в (36) явный вид (38), используя (49) и (42), (43), (51), получаем

$$\partial_3 CRP_l^m e^{im\varphi} = \frac{Ce^{im\varphi}}{2l+1}\left[R_{,l+1}(l+m)P_{l-1}^m - R_{,-l}(l-m+1)P_{l+1}^m\right]. \tag{53}$$

При помощи операторов (52), (53) несложно получить явный вид решений стационарного уравнения Дирака, описывающих спектр водорода. Угловая часть этих решений имеет вид

$$\Psi^{-\mathrm{I}} = C^{-\mathrm{I}}\begin{vmatrix} -iR_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1}e^{-i(m+1)\varphi} \\ -i(l^{\mathrm{I}}-m+1)R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m}e^{-im\varphi} \\ R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}e^{-i(m+1)\varphi} \\ -i(l^{\mathrm{I}}+m+1)R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m}e^{-im\varphi} \end{vmatrix}, \tag{54}$$

$$\Psi^{-\mathrm{II}} = C^{-\mathrm{II}}\begin{vmatrix} -iR_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1}e^{i(m+1)\varphi} \\ i(l^{\mathrm{II}}+m)R_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m}e^{-im\varphi} \\ R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1}e^{-i(m+1)\varphi} \\ (l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m}e^{-im\varphi} \end{vmatrix}, \tag{55}$$

$$\Psi^{+\mathrm{I}} = C^{+\mathrm{I}}\begin{vmatrix} -i(l^{\mathrm{I}}-m+1)R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m}e^{-im\varphi} \\ iR_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1}e^{i(m+1)\varphi} \\ (l^{\mathrm{I}}+m+1)R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m}e^{im\varphi} \\ R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}e^{i(m+1)\varphi} \end{vmatrix}, \tag{56}$$

$$\Psi^{+\mathrm{II}} = C^{+\mathrm{II}} \left| \begin{matrix} i(l^{\mathrm{II}}+m)R_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m} e^{im\varphi} \\ iR_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1} e^{i(m+1)\varphi} \\ -(l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}}^{m} e^{im\varphi} \\ R_H^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1} e^{i(m+1)\varphi} \end{matrix} \right|, \tag{57}$$

и, как легко убедиться непосредственной подстановкой (54)–(57) в (16), приводит к известным [6] радиальным уравнениям теории Дирака (ε и μ заданы в (2), а Φ — в (4))

$$\varepsilon\omega R_E^{\mathrm{I}} - R_{H,-l}^{\mathrm{I}} = 0, \qquad \mu\omega R_H^{\mathrm{I}} - R_{E,l+2}^{\mathrm{I}} = 0, \tag{58}$$

$$\varepsilon\omega R_E^{\mathrm{II}} - R_{H,l+1}^{\mathrm{II}} = 0, \qquad \mu\omega R_H^{\mathrm{II}} + R_{E,-l+1}^{\mathrm{II}} = 0; \qquad R_{,a} \equiv \left(\frac{d}{dr} + \frac{a}{r}\right) R. \tag{59}$$

Маркировка наборов решений (54)–(57) и уравнений (58), (59) здесь выбрана уже с точки зрения их отношения к уравнениям Максвелла, что будет продемонстрировано ниже. Решения радиальных уравнений Дирака известны и в соответствующих областях энергии описывают дискретный и непрерывный спектры водорода.

Учитывая доказанные в предыдущем пункте утверждения о связи решений стационарных уравнений Дирака и Максвелла, из решений (54)–(57) на базе формулы (17) (или (18)) легко получить явный вид соответствующих решений стационарных уравнений Максвелла (11) и, что особо важно, полных в электродинамическом отношении уравнений Максвелла (32) (или (12) и (33) соответственно). Угловые части решений стационарных уравнений Максвелла (32) (а также уравнений (11)) имеют вид

$$\begin{aligned}
E_A^{-\mathrm{I}0} &= C^{-\mathrm{I}} R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1} \cos(m+1)\varphi, \\
E_B^{-\mathrm{I}1} &= -C^{-\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}-m+1) R_E^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m} \cos(m\varphi), \\
E_B^{-\mathrm{I}2} &= C^{-\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}-m+1) R_E^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m} \sin(m\varphi), \\
E_B^{-\mathrm{I}3} &= -C^{-\mathrm{I}} R_E^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi, \\
H_B^{-\mathrm{I}0} &= C^{-\mathrm{I}} R_E^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi, \\
H_A^{-\mathrm{I}1} &= C^{-\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}+m+1) R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m} \sin(m\varphi), \\
H_A^{-\mathrm{I}2} &= C^{-\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}+m+1) R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m} \cos(m\varphi), \\
H_A^{-\mathrm{I}3} &= -C^{-\mathrm{I}} R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1} \sin(m+1)\varphi,
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
E_A^{-\mathrm{II}0} &= C^{-\mathrm{II}} R_H^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1} \cos(m+1)\varphi, \\
E_B^{-\mathrm{II}1} &= C^{-\mathrm{II}} (l^{\mathrm{II}}+m) R_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m} \cos(m\varphi), \\
E_B^{-\mathrm{II}2} &= -C^{-\mathrm{II}} (l^{\mathrm{II}}+m) R_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m} \sin(m\varphi), \\
E_B^{-\mathrm{II}3} &= -C^{-\mathrm{II}} R_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1} \cos(m+1)\varphi, \\
H_B^{-\mathrm{II}0} &= C^{-\mathrm{II}} R_E^{\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi,
\end{aligned} \tag{61}$$

$$
\begin{aligned}
H_A^{-\mathrm{II}1} &= -C^{-\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m}\sin(m\varphi),\\
H_A^{-\mathrm{II}2} &= -C^{-\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m}\cos(m\varphi),\\
H_A^{-\mathrm{II}3} &= -C^{-\mathrm{II}}R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1}\sin(m+1)\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_A^{+\mathrm{I}0} &= C^{+\mathrm{I}}(l^{\mathrm{I}}+m+1)R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m}\cos(m\varphi),\\
E_B^{+\mathrm{I}1} &= C^{+\mathrm{I}}R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1}\cos(m+1)\varphi,\\
E_B^{+\mathrm{I}2} &= C^{+\mathrm{I}}R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1}\sin(m+1)\varphi,\\
E_B^{+\mathrm{I}3} &= -C^{+\mathrm{I}}(l^{\mathrm{I}}-m+1)R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m}\cos(m\varphi),\\
H_B^{+\mathrm{I}0} &= -C^{+\mathrm{I}}(l^{\mathrm{I}}-m+1)R_E^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m}\sin(m\varphi),\\
H_A^{+\mathrm{I}1} &= C^{+\mathrm{I}}R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}\sin(m+1)\varphi,\\
H_A^{+\mathrm{I}2} &= -C^{+\mathrm{I}}R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}\cos(m+1)\varphi,\\
H_A^{+\mathrm{I}3} &= C^{+\mathrm{I}}(l^{\mathrm{I}}+m+1)R_H^{\mathrm{I}}P_{l^{\mathrm{I}}}^{m}\sin(m\varphi),
\end{aligned}
\qquad (62)
$$

$$
\begin{aligned}
E_A^{+\mathrm{II}0} &= -C^{+\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m}\cos(m\varphi),\\
E_B^{+\mathrm{II}1} &= C^{+\mathrm{II}}R_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1}\cos(m+1)\varphi,\\
E_B^{+\mathrm{II}2} &= C^{+\mathrm{II}}R_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1}\sin(m+1)\varphi,\\
E_B^{+\mathrm{II}3} &= C^{+\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}+m)R_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m}\cos(m\varphi),\\
H_B^{+\mathrm{II}0} &= C^{+\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}+m)R_E^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m}\sin(m\varphi),\\
H_A^{+\mathrm{II}1} &= C^{+\mathrm{II}}R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1}\sin(m+1)\varphi,\\
H_A^{+\mathrm{II}2} &= -C^{+\mathrm{II}}R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1}\cos(m+1)\varphi,\\
H_A^{+\mathrm{II}3} &= -C^{+\mathrm{II}}(l^{\mathrm{II}}-m)R_H^{\mathrm{II}}P_{l^{\mathrm{II}}}^{m}\sin(m\varphi),
\end{aligned}
\qquad (63)
$$

и, будучи подставленными в уравнения (32) или (11), переводят эти уравнения в уравнения для радиальных частей, которые совпадают с радиальными уравнениями теории Дирака, т. е. по-прежнему получаем уравнения (58), (59), приводящие к спектру водорода.

Решения радиальных уравнений (58), (59) известны (см. любой учебник по релятивистской квантовой механике). Поэтому процедуру их решения опускаем. Укажем лишь, что для определенной области энергии из них получаем непрерывный спектр водорода, а для другой области энергии — дискретный спектр водорода, т. е. формулу Зоммерфельда–Дирака [6]

$$
\omega^{\mathrm{hyd}} = \frac{m_0 c^2}{\hbar\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{\left(n_r+\sqrt{k^2+\alpha^2}\right)^2}}}, \qquad (64)
$$

где, как обычно, $n_r = n - k$, $k = j + 1/2$, $\alpha = e^2/\hbar c$. Подчеркнем, что эта формула здесь получена из уравнений Максвелла, а не только из уравнения Дирака.

В предлагаемой модели состояния атома водорода описываются напряженностями (60)–(63), которые генерируются токами и зарядами из (32). Функции $(\bar{E}, \bar{H})$ вместе с функциями (E^0, H^0), которые определяют токи и заряды в (32), являются решениями (34) системы стационарных уравнений Максвелла (32): они разные для разных наборов квантовых чисел $n, j = l \mp 1/2, m$.

Угловые части решений стационарных уравнений Максвелла (33) (а также уравнений (12)) получаются на основе другой связи (18). Их явный вид здесь не приводится, поскольку его легко получить из явного вида решений (60)–(63) заменой $E_A \to -E_B$, $E_B \to E_A$, $H_A \to -H_B$, $H_B \to H_A$. Дело в том, что системы (32) и (33) связаны между собой преобразованиями $E \to H$, $H \to -E$, $\varepsilon E \to \mu H$, $\mu H \to -\varepsilon E$, $\varepsilon \to \mu$, $\mu \to \varepsilon$, которые являются естественным и понятным обобщением преобразования дуальности для свободного электромагнитного поля.

Разумеется, система (33) приводит к тем же радиальным уравнениям и к тому же конечному результату (64).

Зная явный вид решений, несложно вычислить правые части дивергентных уравнений в системах (32), (33), т. е. соответствующие электрические и магнитные заряды. Получаем

$$\begin{aligned}
\rho_e^{-\mathrm{I}} &= -C^{-\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1} \cos(m+1)\varphi(\varepsilon R_E^{\mathrm{I}}),_{\,l^{\mathrm{I}}+2},\\
\rho_e^{-\mathrm{II}} &= -C^{-\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}}^{m+1} \cos(m+1)\varphi(\varepsilon R_E^{\mathrm{II}}),_{\,-l^{\mathrm{II}}+1},\\
\rho_e^{+\mathrm{I}} &= -C^{+\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}+m+1) P_{l^{\mathrm{I}}}^{m} \cos m\varphi(\varepsilon R_E^{\mathrm{I}}),_{\,l^{\mathrm{I}}+2},\\
\rho_e^{+\mathrm{II}} &= C^{+\mathrm{II}} (l^{\mathrm{II}}-m) P_{l^{\mathrm{II}}}^{m} \cos m\varphi(\varepsilon R_E^{\mathrm{II}}),_{\,-l^{\mathrm{II}}+1},\\
\rho_{\mathrm{mag}}^{-\mathrm{I}} &= -C^{-\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi(\mu R_H^{\mathrm{I}}),_{\,-l^{\mathrm{I}}},\\
\rho_{\mathrm{mag}}^{-\mathrm{II}} &= -C^{-\mathrm{II}} P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi(\mu R_H^{\mathrm{II}}),_{\,l^{\mathrm{II}}+1},\\
\rho_{\mathrm{mag}}^{+\mathrm{I}} &= C^{+\mathrm{I}} (l^{\mathrm{I}}-m+1) P_{l^{\mathrm{I}}+1}^{m+1} \sin(m+1)\varphi(\mu R_H^{\mathrm{I}}),_{\,-l^{\mathrm{I}}},\\
\rho_{\mathrm{mag}}^{+\mathrm{II}} &= -C^{-\mathrm{II}} (l^{\mathrm{II}}+m) P_{l^{\mathrm{II}}-1}^{m} \sin m\varphi(\mu R_H^{\mathrm{II}}),_{\,l^{\mathrm{II}}+1},
\end{aligned} \tag{65}$$

для системы (32), где использовано обозначение

$$(\varepsilon R_E^{\mathrm{I}}),_{\,l^{\mathrm{I}}+2} \equiv \varepsilon\left(\frac{d}{dr} + \frac{l^{\mathrm{I}}+2}{r}\right) R_E^{\mathrm{I}} + R_E^{\mathrm{I}} \frac{d\varepsilon}{dr}. \tag{66}$$

Соответствующие токи, как видно из (32), (33), представляют собой градиенты от приведенных в (60)–(63) функций, поэтому этот частный случай мы предложили называть токами градиентного вида.

Для системы (33) заряды те же, что и в (65), отличие только в общем знаке при всех ρ_{mag}. Вычисление вектора Пойнтинга для стационарных состояний $(\bar{E}, \bar{H})$ из (60)–(63) показывает, что это выражение, как и выражение для полного импульса системы $(\bar{E}, \bar{H}, E^0, H^0)$ электромагнитного и двух скалярных полей, равно нулю. Это означает, что такой атом в стационарных состояниях не излучает.

3. Проверка. Разумеется для нахождения стационарных решений уравнений Максвелла (32), (33) можно вообще не апеллировать к уравнениям Дирака. В частности, справедливость полученных решений легко проверить непосредственной подстановкой их в уравнения Максвелла. Например, подставим набор решений (60) в первую компоненту первого уравнения в (32), т. е. проверим следующее уравнение:

$$\partial_2 H_A^3 - \partial_3 H_A^2 - \omega\varepsilon E_B^1 - \partial_1 E_A^0 = 0. \tag{67}$$

Воспользуемся формулами, которые легко вывести по аналогии с выводом (52), (53):

$$\partial_1\left[R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}\cos(m+1)\varphi\right] = \frac{1}{2l^{\mathrm{I}}+1}\cos\varphi\cos(m+1)\varphi\left(R^{\mathrm{I}}_{H,\ l^{\mathrm{I}}+1}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}-1} - R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}+1}\right) + $$
$$+\frac{m+1}{\sin\theta}P^{m+1}_{l^{\mathrm{I}}}\frac{R_H^{\mathrm{I}}}{r}\cos m\varphi, \tag{68}$$

$$\partial_2\left[R_H^{\mathrm{I}} P_{l^{\mathrm{I}}}^{m+1}\sin(m+1)\varphi\right] = \frac{1}{2l^{\mathrm{I}}+1}\sin\varphi\sin(m+1)\varphi\left(R^{\mathrm{I}}_{H,\ l^{\mathrm{I}}+1}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}-1} - R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}+1}\right) + $$
$$+\frac{m+1}{\sin\theta}P^{m+1}_{l^{\mathrm{I}}}\frac{R_H^{\mathrm{I}}}{r}\cos m\varphi, \tag{69}$$

$$\partial_3\left[(l^{\mathrm{I}}+m+1)R_H^{\mathrm{I}}P^m_{l^{\mathrm{I}}}\cos m\varphi\right] =$$
$$= (l^{\mathrm{I}}+m+1)\frac{\cos m\varphi}{2l^{\mathrm{I}}+1}\left[(l^{\mathrm{I}}+m)R^{\mathrm{I}}_{H,\ l^{\mathrm{I}}+1}P^m_{l^{\mathrm{I}}-1} + (l^{\mathrm{I}}-m+1)R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}P^m_{l^{\mathrm{I}}+1}\right]. \tag{70}$$

Тогда уравнение (67) после приведения подобных и использования одной простой тригонометрической формулы принимает вид

$$\cos m\varphi\left[\omega\varepsilon(l^{\mathrm{I}}-m+1)R_E^{\mathrm{I}}P^m_{l^{\mathrm{I}}+1} - \frac{1}{2l^{\mathrm{I}}+1}\left(R^{\mathrm{I}}_{H,\ l^{\mathrm{I}}+1}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}-1} - R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}P^{m+2}_{l^{\mathrm{I}}+1}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\frac{m+1}{\sin\theta}P^{m+1}_{l^{\mathrm{I}}}\frac{R_H^{\mathrm{I}}}{r} - \frac{(l^{\mathrm{I}}+m+1)}{2l^{\mathrm{I}}+1}\left((l^{\mathrm{I}}+m)R^{\mathrm{I}}_{H,\ l^{\mathrm{I}}+1}P^m_{l^{\mathrm{I}}-1} + (l^{\mathrm{I}}-m+1)R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}P^m_{l^{\mathrm{I}}+1}\right)\right] = 0. \tag{71}$$

В (71) отказываемся от обозначений (51), после чего возможно дальнейшее приведение подобных членов. Воспользуемся формулой

$$2(2l+1)\frac{m+1}{\sin\theta}P_l^{m+1} = -(l+1)P^{m+2}_{l-1} - l\,P^{m+2}_{l+1} -$$
$$-(l+1)(l+m+1)(l+m)P^m_{l-1} - l(l-m)(l-m+1)P^m_{l+1}, \tag{72}$$

которая является линейной комбинацией формул (41) и (48), а также формулами (40) и (47). Вновь восстановливаем удобные обозначения (51) и окончательно получаем

$$(l^{\mathrm{I}}-m+1)P^m_{l^{\mathrm{I}}+1}\cos(m\varphi)\left[\omega\varepsilon R_E^{\mathrm{I}} - R^{\mathrm{I}}_{H,\ -l^{\mathrm{I}}}\right] = 0, \tag{73}$$

т. е. некоторое не равное нулю выражение, умноженное на первое из радиальных уравнений Дирака (58), что и требовалось доказать.

Заметим, что проверка дивергентных уравнений требует значительно меньших технических усилий. Проверка других роторных уравнений аналогична.

4. Некоторые выводы. Заметим, во-первых, что, как следует из доказанного в п. 1 взаимно-однозначного соответствия между множествами решений стационарных уравнений Дирака и Максвелла, на основе стационарных уравнений Максвелла могут решаться все те задачи атомной и ядерной физики, к которым ранее успешно применялось стационарное уравнение Дирака с тем или иным внешним полем, а не только проиллюстрированная здесь задача о спектре водорода. Выбирая в (2) вместо потенциала Φ в виде (4) другие виды потенциала, приведенный метод можно применять к задачам о дейтоне, мюонии, позитронии, к описанию двухкварковых систем, не говоря уже о спектрах водородоподобных ридберговских атомов, т. е. любая потенциальная задача квантовой механики в области атомной и ядерной физики, по-видимому, может быть рассмотрена в рамках данного подхода. Таким образом, предложенная здесь теория претендует на замену существующей квантовой механики микроскопической классической электродинамикой. Атом в такой модели понимается как специфическая внутриатомная среда, задаваемая по (2), а атомный электрон интерпретируется как стационарная электромагнитная волна, каждому состоянию которой (по постулатам Бора) соответствует некоторая линия в спектре. Детали физической интерпретации выходят за рамки данной статьи, посвященной в большей степени математическим аспектам.

Здесь отметим, что получение новых решений таких всесторонне изученных уравнений как уравнения Максвелла стало возможным благодаря полному отказу от использования электромагнитных потенциалов в качестве вспомогательных объектов при решении уравнений Максвелла. Автором неоднократно подчеркивалось (см., например, [16]), что уравнения Максвелла можно и следует решать непосредственно в терминах напряженностей, не переходя к потенциалам — другому объекту и другому коварианту теории поля, отличному от тензора напряженностей. Выше наглядно показано, чего можно достичь, если не привязываться к $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$, а использовать, скажем, связь (17) со спинорным полем Дирака.

Автор выражает глобукую благодарность Г. Саллхоферу за многочисленные полезные дискуссии и разнообразную поддержку настоящих исследований, а также И. Ю. Кривскому, Е. П. Сабаду и Е. Ю. Ремете за всестороннее обсуждение полученных результатов

1. *Sallhofer H.* Elementary derivation of the Dirac equation. I // Z. Naturforsch. A. – 1978. – **33.** – P. 1379–1381.
2. *Sallhofer H.* Maxwell–Dirac — Isomorphism. XI // Ibid. – 1986. – **41.** – P. 1087–1088.
3. *Sallhofer H.* Hydrogen in electrodynamics. II // Ibid. – 1989. – **44.** – P. 167–168.
4. *Sallhofer H.* Hydrogen in electrodynamics. V // Ibid. – 1990. – **45.** – P. 1038–1040.
5. *Sallhofer H.* Hydrogen in electrodynamics. VI // Ibid. – 1990. – **45.** – P. 1361–1366.
6. *Lakhtakia A.* Models and modelers of hydrogen. – London: World Scientific, 1996. – 424 p.
7. *Симуляк В. М.* Связь симметрийных свойств уравнений Дирака и Максвелла и законы сохранения // Теорет. и мат. физика. – 1991. – **87**, № 1. – С. 76–85.
8. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Уравнение Дирака и представление спина 1, связь с симметриями уравнений Маквелла // Там же. – 1992. – **90**, № 3. – С. 388–406.
9. *Simulik V. M.* Some algebraic properties of Maxwell–Dirac isomorphism // Z. Naturforsch. A. – .1994. – **49**. – P. 1074–1076.
10. *Симулик В. М., Кривский И. Ю.* Полный набор преобразований, связывающих уравнения Дирака и Максвелла // Допов. НАН України. – 1995. – № 7. – С. 54–57.
11. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Об унитарном операторе, связывающем уравнения Маквелла и Дирака // Там же. – 1996. – № 8. – С. 79–85.
12. *Krivsky I. Y., Simulik V. M.* Unitary connection in Maxwell–Dirac isomorphism and the Clifford algebra // Adv. Appl. Cliff. Alg. – 1996. – **6**, № 2. – P. 249–259.
13. *Simulik V. M., Krivsky I. Yu.* A classical electrodynamical model of the hydrogen atom // Наукові праці ІЕФ'96. – Ужгород, 1996. – С. 27–31.
14. *Simulik V. M., Krivsky I. Yu.* An electrodynamical version of the hydrogen spectrum // Proceedings of the 28-th European group of atomic spectroscopy conference, 16–19 July, 1996. – Graz., Austria. – 1996. – P. 41–42.
15. *Mignani R., Recami E., Baldo M.* About a Dirac-like equation for the photon according to Ettore Majorana // Lett. Nuuvo cim. – 1974. – **11**, № 12. – P. 572–586.
16. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Основы квантовой электродинамики в терминах напряженностей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.
17. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
18. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
19. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. – М.: Наука (Ленингр. отд-ние), 1975 – 440 с.

Получено 27.01.97