УДК 519.21

О. В. Панамарчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДИФУЗІЙНИЙ ПРОЦЕС НА ПЛОЩИНІ З МЕМБРАНАМИ НА ДВОХ ПРЯМИХ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

We construct a generalized diffusion process in $\mathbb{R}^2$ with the unit diffusion matrix and a drift vector with δ-functions concentrated on two intersecting straight lines.

Побудовано узагальнений дифузійний процес в $\mathbb{R}^2$ з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу з δ-функціями, зосередженими на двох прямих, що перетинаються.

1. Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ задано дві прямі S_1 та S_2, які перетинаються не під прямим кутом. Будемо вважати, що в $\mathbb{R}^2$ фіксовано таку систему координат, що $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ та $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \sin\xi - x_2 \cos\xi = 0\}$, де через (x_1, x_2) позначаються координати точки $x \in \mathbb{R}^2$ у вибраній системі координат, а через ξ — величина гострого кута між S_1 та S_2, так що $\xi \in (0, \pi/2)$ надалі фіксовано. Позначимо через ν_i для $i = 1, 2$ орт нормалі до прямої S_i, зорієнтований так, що $\nu_1 = (0, 1)$, а $\nu_2 = (\sin\xi, -\cos\xi)$.

Мета цієї роботи — побудова узагальненого дифузійного процесу в $\mathbb{R}^2$ з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу вигляду $\nu_1 q(x)\delta_{S_1}(x) + \nu_2 r(x)\delta_{S_2}(x)$, де $q(\cdot)$ та $r(\cdot)$ — деякі задані відповідно на S_1 та S_2 неперервні функції з дійсними значеннями такі, що $|q(x)| \le 1$ при всіх $x \in S_1$, та $|r(x)| \le 1$ при всіх $x \in S_2$, а через $\delta_{S_i}(x)$, $i = 1, 2$, позначено узагальнену функцію на $\mathbb{R}^2$, яка діє на пробну функцію φ на $\mathbb{R}^2$ за правилом

$$\langle \delta_{S_i}, \varphi \rangle = \int_{S_i} \varphi(x)\, d\sigma, \qquad i = 1, 2,$$

з криволінійним інтегралом в правій частині цієї рівності.

Метод побудови такий: стартуємо з узагальненого дифузійного процесу, який відповідає одиничній матриці дифузії та вектору переносу вигляду $\nu_1 q(x)\delta_{S_1}(x)$, і збурюємо його за допомогою векторного поля $\nu_2 r(x)\delta_{S_2}(x)$, використовуючи методи теорії потенціалу. При цьому стосовно заданих функцій $q(\cdot)$ та $r(\cdot)$ доведеться зробити додаткові припущення (див. формулювання теореми).

2. Позначимо через $g_0(t, x, y)$ для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$ густину ймовірності переходу вінерівського процесу в $\mathbb{R}^2$

$$g_0(t, x, y) = (2\pi t)^{-1} \exp\{-|y - x|^2 / 2t\}$$

і покладемо

$$G_0(t, x, y) = g_0(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{S_1} g_0(\tau, x, z) \frac{\partial g_0(t-\tau, z, y)}{\partial \nu_1(z)} q(z)\, d\sigma_z, \tag{1}$$

де через $\dfrac{\partial g_0(t-\tau, z, y)}{\partial \nu_1(z)}$ позначено похідну в напрямку ν_1 функції $g_0(t-\tau, z, y)$ як функції аргументу z,

$$\frac{\partial g_0(t-\tau, z, y)}{\partial \nu_1(z)} = \frac{(y-z, \nu_1)}{t-\tau} g_0(t-\tau, z, y),$$

а внутрішній інтеграл в правій частині (1) є криволінійним інтегралом від функції під знаком інтеграла як функції аргументу z.

Відомо (див., наприклад, [1], § 5), що G_0 є густиною ймовірності переходу згаданого вище узагальненого дифузійного процесу в $\mathbb{R}^2$ з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу $\nu_1 q(x)\delta_{S_1}(x)$. Напівгрупа операторів, що відповідає шуканому процесу, буде відшукуватись як розв`язок рівняння

$$u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} G_0(t, x, y)\varphi(y)dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{S_2} G_0(t-\tau, x, y)\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(\tau, y+, \varphi)}{\partial \nu_2} + \frac{\partial u(\tau, y-, \varphi)}{\partial \nu_2}\right] r(y)d\sigma_y \tag{2}$$

в області $t>0$, $x \in \mathbb{R}^2$, де φ — довільна обмежена вимірна функція на $\mathbb{R}^2$ з дійсними значеннями, $u(t, x, \varphi)$ — шукана функція, а при $\tau > 0$, $y \in S_2$ покладемо

$$\frac{\partial u(\tau, y\pm, \varphi)}{\partial \nu_2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\partial u(\tau, y \pm \varepsilon \nu_2, \varphi)}{\partial \nu_2}.$$

Щоб розв`язати рівняння (2), треба дослідити поведінку похідних в напрямку ν_2 таких потенціалів:

$$W_0(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{S_2} g_0(t-\tau, x, z)\, v(\tau, z)\, r(z) d\sigma_z,$$

$$W(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{S_2} F(t-\tau, x, z)\, v(\tau, z)\, r(z) d\sigma_z, \tag{3}$$

де $v(\tau, z)$ — довільна вимірна функція на $[0, \infty) \times S_2$ з дійсними значеннями, а через $F(t, x, y)$ позначено другий доданок в правій частині (1).

Лема. *Нехай функція q задовольняє умову Ліпшиця $|q(y) - q(z)| \le \le L|y - z|$ при всіх $y \in S_1$ та $z \in S_1$ з деякою сталою L, а функція r в деякому околі нуля задовольняє умову $|r(y)| \le L|y|$ при всіх $y \in S_2$ таких, що $|y| \le \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$ фіксоване). Тоді, якою б не була обмежена вимірна функція $v(\tau, z)$ на $[0, \infty) \times S_2$, при всіх $t > 0$ та $x \in S_2$ справджується рівність*

$$\lim_{u \to x} \frac{\partial W(t, u)}{\partial \nu_2} = \int_0^t d\tau \int_{S_2} \frac{\partial F(t-\tau, x, z)}{\partial \nu_2(x)} v(\tau, z)\, r(z) d\sigma_z. \tag{4}$$

Доведення. 1. Підрахуємо значення $\dfrac{\partial W(t, u)}{\partial \nu_2}$, якщо $x \in S_2$:

$$\frac{\partial F(t, x, z)}{\partial \nu_2(x)} = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial g_0(t-\tau, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \frac{\partial g_0(\tau, y, z)}{\partial \nu_1(y)} q(y) d\sigma_y.$$

При $x \in S_2$, формально диференціюючи (3), маємо

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial \nu_2} = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_0^{t-\tau} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 \sin\xi}{2\pi(t-\tau-\theta)^2} \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2(t-\tau-\theta)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(x_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2(t-\tau-\theta)}\right\} \frac{z_1 \operatorname{tg}\xi}{2\pi\theta^2} \exp\left\{-\frac{(z_1-y_1)^2}{2\theta}\right\} \exp\left\{-\frac{(z_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2\theta}\right\} q(y_1) \times$$
$$\times r(z_1)\, v(\tau, z_1)\, dy_1. \tag{5}$$

2. Доведемо, що інтеграли в правій частині (5) існують. Маємо $\dfrac{\partial F(t,x,z)}{\partial \nu_2(x)} = A + B$, де

$$A = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial g_0(t-\tau,x,y)}{\partial \nu_2(x)} \frac{\partial g_0(\tau,y,z)}{\partial \nu_1(y)} [q(y_1) - q(x_1)]\, d\sigma_y,$$

$$B = q(x_1) \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial g_0(t-\tau,x,y)}{\partial \nu_2(x)} \frac{\partial g_0(\tau,y,z)}{\partial \nu_1(y)} d\sigma_y, \qquad x \in S_2.$$

Застосовуючи формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2(t-\tau)} - \frac{(z_1-y_1)^2}{2\tau}\right\} dy_1 =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi\tau(t-\tau)}}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(z_1-x_1)^2}{2t}\right\} \tag{6}$$

та перетворення Лапласа, можна звести B до вигляду

$$B = \frac{\operatorname{sign} z_2}{2\pi t^2} q(x_1) \exp\left\{-\frac{(z_1-x_1)^2}{2t}\right\} \exp\left\{-\frac{(|x_2|+|z_2|)^2}{2t}\right\} \times$$
$$\times \left[(z_1-x_1)\sin\xi + (|x_2|+|z_2|)\operatorname{sign} x_2 \cos\xi\right]. \tag{7}$$

Звідси

$$|z_1| \operatorname{tg}\xi |B| \le K \left(\frac{|z_1-x_1|}{t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(z_1-x_1)^2}{2t}\right\} + \frac{1}{t} \exp\left\{-\frac{(z_1-x_1)^2}{2t}\right\} \right).$$

З умов, накладених на функцію $r(x)$, випливає

$$\int_{S_2} |B| |r(z)| d\sigma_z \le K t^{-1/2}, \tag{8}$$

де K — деяка додатна стала (буквою K позначатимемо різні сталі).

Розглянемо тепер вираз A. Маємо $A = A' + A''$, де

$$A' = \int_0^t \frac{z_1 \operatorname{tg}\xi}{2\pi\tau^2} \exp\left\{-\frac{(z_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2\tau}\right\} \frac{\sin\xi}{2\pi(t-\tau)^2} \exp\left\{-\frac{(x_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2(t-\tau)}\right\} d\tau \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (y_1-x_1)(q(y_1)-q(x_1)) \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2(t-\tau)}\right\} \exp\left\{-\frac{(z_1-y_1)^2}{2\tau}\right\} dy_1,$$

$$A'' = \int_0^t \frac{z_1 \operatorname{tg}\xi}{2\pi\tau^2} \exp\left\{-\frac{(z_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2\tau}\right\} \frac{x_1 \sin\xi}{2\pi(t-\tau)^2} \exp\left\{-\frac{(x_1 \operatorname{tg}\xi)^2}{2(t-\tau)}\right\} d\tau \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (q(y_1) - q(x_1)) \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1)^2}{2(t-\tau)}\right\} \exp\left\{-\frac{(z_1 - y_1)^2}{2\tau}\right\} dy_1 .$$

Враховуючи нерівність

$$\frac{|y-x|^{\alpha}}{t^{\alpha/2}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} \le K \exp\left\{-\frac{\mu(y-x)^2}{t}\right\}, \tag{9}$$

$\alpha, \mu < \dfrac{1}{2}$ — додатні сталі, і умови, накладені на функцію $q(x)$, маємо

$$|A'| \le \frac{K}{\sqrt{2\pi}\, t} \exp\left\{-\mu \frac{(z_1 - x_1)^2}{t}\right\} \exp\left\{-\frac{(|z_1| + |x_1|)^2 \operatorname{tg}^2 \xi}{2t}\right\}, \tag{10}$$

$$\int_{S_2} |A'| |r(z)| \, d\sigma_z \le K t^{-1/2}. \tag{11}$$

За допомогою формул (6), (9) та перетворення Лапласа одержуємо

$$|A''| \le \frac{K}{\sqrt{2\pi}\, t} \exp\left\{-\mu \frac{(z_1 - x_1)^2}{t}\right\} \exp\left\{-\frac{(|z_1| + \sqrt{2\mu}\,|x_1|)^2 \operatorname{tg}^2 \xi}{2t}\right\}, \tag{12}$$

$$\int_{S_2} |A''| |r(z)| \, d\sigma_z \le K t^{-1/2}. \tag{13}$$

З (8), (11), (13) маємо

$$\int_{S_2} \left| \frac{\partial F(t, x, z)}{\partial \nu_2(x)} \right| |r(z)| \, d\sigma_z \le C t^{-1/2}, \tag{14}$$

де C — деяка додатна стала, $0 < t < \infty$, $x \in S_2$.

Отже, інтеграли в правій частині (5) існують, оскільки $v(\tau, z)$ — обмежена.

3. Нехай тепер u наближається до x, знаходячись на нормалі до S_2 в точці x. Підрахуємо граничне значення $\dfrac{\partial W(t, u)}{\partial \nu_2}$.

Покладемо $\rho = x_1 \sin \xi - x_2 \cos \xi$, де x_1, x_2 — координати точки $x \in \mathbb{R}^2$. Тоді

$$u_1 = x_1 + \rho \sin \xi,$$

$$u_2 = x_2 - \rho \cos \xi,$$

$$\frac{\partial W(t, u)}{\partial \nu_2} = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_0^{t-\tau} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 \sin \xi - \rho}{2\pi (t - \tau - \theta)^2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(y_1 - x_1 - \rho \sin \xi)^2}{2(t - \tau - \theta)}\right\} \exp\left\{-\frac{(x_1 \operatorname{tg} \xi - \rho \cos \xi)^2}{2(t - \tau - \theta)}\right\} \frac{z_1 \operatorname{tg} \xi}{2\pi \theta^2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(z_1 - y_1)^2}{2\theta}\right\} \exp\left\{-\frac{(z_1 \operatorname{tg} \xi)^2}{2\theta}\right\} q(y_1)\, r(z_1)\, v(\tau, z_1)\, dy_1 .$$

Спрямувавши в цій рівності ρ до 0, отримаємо твердження леми.

Повернемось до рівняння (2). Зауважимо, що з (41) (див. § 3 [1]) для $x \in S_2$ випливає

$$\frac{\partial W_0(t, x \pm)}{\partial \nu_2} = \mp v(t, x) r(x). \tag{15}$$

Враховуючи (4), (15), для $x \in S_2$ одержуємо

$$\frac{\partial u(t, x \pm, \varphi)}{\partial \nu_2(x)} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial G_0(t, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy \mp \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(t, x+, \varphi)}{\partial \nu_2(x)} + \frac{\partial u(t, x-, \varphi)}{\partial \nu_2(x)}\right] \times$$

$$\times r(x) + \int_0^t d\tau \int_{S_2} \frac{\partial F(t-\tau, x, z)}{\partial \nu_2(x)} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(\tau, z+, \varphi)}{\partial \nu_2(z)} + \frac{\partial u(\tau, z-, \varphi)}{\partial \nu_2(z)}\right] r(z) d\sigma_z. \tag{16}$$

Покладемо

$$V(t, x, \varphi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(t, x+, \varphi)}{\partial \nu_2(x)} + \frac{\partial u(t, x-, \varphi)}{\partial \nu_2(x)}\right].$$

Тоді з (16) для невідомої функції V одержуємо інтегральне рівняння

$$V(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial G_0(t, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{S_2} \frac{\partial F(t-\tau, x, z)}{\partial \nu_2(x)} V(\tau, z, \varphi) r(z) d\sigma_z. \tag{17}$$

Отже, щоб знайти шукану функцію $u(t, x, \varphi)$, треба розв'язати інтегральне рівняння (17), а потім розв'язок підставити в (2).

Покладемо

$$V_0(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial G_0(t, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy$$

і для $k = 1, 2, \ldots$

$$V_k(t, x, \varphi) = \int_0^t d\tau \int_{S_2} \frac{\partial F(t-\tau, x, z)}{\partial \nu_2(x)} V_{k-1}(\tau, z, \varphi)\, r(z)\, d\sigma_z.$$

З нерівності (11.3) (див. [2], гл. IV) випливає

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial g_0(t, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy\right| \le K \|\varphi\| t^{-1/2}, \text{ де } \|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\varphi(x)|. \tag{18}$$

З (8), (11), (13) одержуємо

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial \nu_2(x)} \varphi(y) dy\right| \le K \|\varphi\|. \tag{19}$$

З (18), (19) маємо

$$|V_0(t, x, \varphi)| \le K_T \|\varphi\| t^{-1/2}, \tag{20}$$

де K_T — стала, що залежить від T. Оцінка має місце в кожній області вигляду $(t, x) \in (0, T] \times S_2$ при скінченних T, φ — довільна обмежена вимірна функція.

За допомогою індукції по k, враховуючи (14), одержуємо оцінки

$$|V_k(t, x, \varphi)| \le \frac{K_T \|\varphi\| C^k \pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}}, \tag{21}$$

що мають місце для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$, K_T — стала з нерівності (20), C — стала з нерівності (14).

Оцінки (21) дозволяють зробити висновок, що ряд

$$V(t, x, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, x, \varphi)$$

збігається і є неперервним за сукупністю змінних розв'язком рівняння (17), який в кожній області вигляду $(t, x) \in (0, T] \times S_2$ (при скінченних T) задовольняє нерівність

$$|V(t, x, \varphi)| \leq C_T \|\varphi\| t^{-1/2}, \tag{22}$$

де C_T — стала, що може залежати від T. Ці ж оцінки переконують нас в тому, що такий розв'язок єдиний.

Відзначимо також що розв'язок рівняння (17) лінійно залежить від φ. Більше того, він неперервний відносно φ_n, якщо $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in \mathbb{R}^2$, і, крім того, $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$. Це також випливає з оцінок (21) і можливості здійснювати граничний перехід під знаками інтегралів, що визначають функції $V_k(t, x, \varphi)$.

Визначимо сім'ю операторів T_t, $t > 0$, що діють на обмежену вимірну функцію $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, за формулою

$$T_t \varphi(x) = T_t^0 \varphi(x) + \int_0^t d\tau \int_{S_2} G_0(t-\tau, x, y) V(\tau, y, \varphi) r(y) d\sigma_y, \tag{23}$$

де $T_t^0 \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_0(t, x, y) \varphi(y) dy$.

Як випливає з (22) та нерівності $\int_{S_2} G_0(t, x, y) d\sigma_y \leq K t^{-1/2}$, оператор T_t при кожному $t > 0$ є лінійним обмеженим оператором в просторі обмежених вимірних функцій φ на $\mathbb{R}^2$ з нормою $\|\varphi\| = \sup_x |\varphi(x)|$.

Наведене вище зауваження показує, що оператор T_t (при фіксованому $t > 0$) неперервний відносно поточкової збіжності функцій φ_n з рівномірно обмеженими нормами. Тому, якщо довести, що оператори T_t утворюють напівгрупу і невід'ємні функції переводять в невід'ємні, то цим буде доведено існування такої ймовірності переходу $P(t, x, dy)$ в $\mathbb{R}^2$, для якої

$$T_t \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) P(t, x, dy). \tag{24}$$

Доведення напівгрупової властивості повністю аналогічне доведенню цього факту в [3, с. 159 – 160].

Доведення того, що при умові $|r(x)| \leq 1$ напівгрупа операторів T_t невід'ємні функції переводить в невід'ємні, проводиться аналогічно доведенню в [1, с. 77 – 78]. Отже, існує ймовірність переходу $P(t, x, dy)$ в $\mathbb{R}^2$, яка задовольняє (24).

Нескладні підрахунки переконують нас в тому, що

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |y - x|^4 P(t, x, dy) \leq N_T t^2,$$

$t \in (0, T]$, N_T — деяка стала, що залежить від T (при скінченних T), і тому існує неперервний процес Маркова з імовірністю переходу $P(t, x, dy)$.

Нарешті, після деяких підрахунків одержуємо співвідношення

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \left[\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^2} (y - x, \lambda)\, P(t, x, dy) \right] dx =$$

$$= (\nu_1, \lambda) \int_{S_1} \varphi(x)\, q(x)\, d\sigma_x + (\nu_2, \lambda) \int_{S_2} \varphi(x)\, r(x)\, d\sigma_x, \tag{25}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \left[\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^2} (y - x, \lambda)^2\, P(t, x, dy) \right] dx = |\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\, dx, \tag{26}$$

якими б не були $\lambda \in \mathbb{R}^2$ та неперервна фінітна функція φ на $\mathbb{R}^2$.

Співвідношення (25), (26) означають, що побудований процес є узагальненим дифузійним, і для нього існують в узагальненому сенсі дифузійні коефіцієнти: одинична матриця дифузії і вектор переносу $\nu_1 \delta_{S_1}(x) q(x) + \nu_2 \delta_{S_2}(x) q(x)$.

Підведемо підсумок наведеним міркуванням.

Теорема. *Нехай виконуються умови леми. Тоді існує узагальнений дифузійний процес з одиничною матрицею дифузії та вектором переносу* $\nu_1 \delta_{S_1}(x) q(x) + \nu_2 \delta_{S_2}(x) r(x)$.

Зауваження. Такий дифузійний процес можна побудувати і у випадку ортогональних прямих. Цей випадок не потребує накладання додаткових умов на функцію r і міркування є значно простішими.

1. *Портенко М. І.* Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – 134 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Portenko N. I.* Generalized diffusion processes. – Providence: Rhode Island, 1990. – 177 p.

Одержано 22.12.98,
після доопрацювання – 31.03.99