УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. VII*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, we analyze the application to abstract differential equations, implicit equations, and control problems.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком у 1965 р., до абстрактних диференціальних рівнянь, рівнянь неявного вигляду та задач керування.

Данная статья является продолжением работ [1–6], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, формул, теорем и т. д.

3.9. Абстрактные уравнения. Здесь рассматривается применение метода к дифференциальным уравнениям в бесконечномерном банаховом пространстве X (до сих пор мы анализировали использование метода в конечномерных пространствах). Впервые случай $X = l^{\infty}$ был рассмотрен А. М. Самойленко [7] при изучении T-периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_1, x_2, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{204}$$

Впоследствии с использованием метода рассматривались также счетные системы с запаздыванием вида [8]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t+\Delta)), \quad f\colon \mathbb{R}\times l^{\infty}\times l^{\infty} \to l^{\infty},$$

и счетные системы с импульсным воздействием [9]. Заметим, что основной целью указанных работ было построение конкретных реализаций метода, в то время как анализу условий сходимости уделялось меньше внимания. При этом оказалось удобным взять за основу схему метода для конечномерных систем с правой частью, удовлетворяющих условию Липшица вида

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x-y\| \tag{205}$$

с положительной константой k. Тогда обоснование метода для бесконечномерных систем заключалось в основном в проверке корректности замены конечномерной нормы $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ на норму $\|\cdot\|_X$ бесконечномерного пространства X.

Существенное развитие абстрактный вариант метода получил в работе [10], в которой он был обобщен для исследования T-периодических уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x), \qquad x : \mathbb{R} \to X, \tag{206}$$

где A — вообще говоря, неограниченный оператор, определяющий в банаховом пространстве X полугруппу $P(t)$. В этом случае задача об обобщенных (слабых) T-периодических решениях уравнения (206) сводилась к задаче о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = \left[P(t) + \frac{t}{T} - \frac{t}{T}P(t)\right]z + \int_0^t P(t-s)\, f(s, x(s))\, ds -$$

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта OMFB UK-3/1999.

$$-\frac{t}{T}\int_0^T P(T-s)\, f(s, x(s))\, ds \tag{207}$$

с параметром $z \in X$ и разрешимости определяющего уравнения

$$[E - P(T)]\, z = \int_0^T P(T-s)\, f\big(s, x^*(s, z)\big)\, ds\,,$$

где x^* — единственное решение уравнения (207).

Замечание **20.** В конечномерном случае уравнения с выделенной линейной частью вида (206) были исследованы с помощью численно-аналитического метода в статье [11], в которой $P(t) = e^{At}$. Однако предложенный в [11] алгоритм неприменим к уравнениям (206) с неограниченным оператором A.

При выполнении условия Липшица (205) в работе [10] были установлены следующие результаты, которые мы приводим в несколько другой редакции.

Теорема 31 [10]. *Интегральное уравнение (207), возникающее при применении метода к уравнению (206), может быть разрешено методом последовательных приближений для любого* $z \in X$, *если выполнено одно из следующих предположений:*

1) $A = 0$ *и* $kT < 3{,}417\ldots$;

2) A — *отрицательно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* X, *причем* $kT < 1/0{,}519\ldots = 1{,}92678\ldots$;

3) A — *кососамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве* X *и* $kT < 1/0{,}796\ldots$;

4) *полугруппа* $P(t)$ *удовлетворяет условию* $\|P(t)\| \le C_a e^{at}$, $t \in [0, \infty)$, *с некоторыми постоянными* a *и* C_a, *для которых* $C_a kT \le v(aT)$, *где* $v(s)$ — *корень уравнения*

$$e^{s+v} - 1 = \left(2 + \frac{s}{v}\right)(s+v)\,.$$

В [10] также отмечалось, что последнюю теорему „можно значительно обобщить, если вместо банахова пространства X рассматривать пространство, нормированное векторами из конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$ или даже из произвольного K-пространства".

Изложим некоторые новые результаты в этом направлении, следуя работе [12]. Начнем с краткого обсуждения необходимых в дальнейшем понятий частично упорядоченных векторных пространств.

3.9.1. Сведения из теории частично упорядоченных векторных пространств. Ниже излагаются большей частью известные понятия и определения, которые можно найти в работах [13; 14].

Пусть $X = \langle X, \preceq_X, \|\cdot\|_X \rangle$ — полное по норме частично упорядоченное нормированное пространство (сокращенно ч.у.н.п.). Если не возникает недоразумений, в обозначении $\preceq_X$, $\|\cdot\|_X$ мы иногда будем опускать индекс X.

Наряду с символом $\preceq_X$ для обозначения соотношения $x_1 \preceq_X x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ будем также употреблять запись $x_2 \succeq_X x_1$. Предполагаем, что линейные операции в X связаны с упорядочением $\preceq_X$ обычными для неравенств соотношениями, и, кроме того, для любой последовательности $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ из соотношений $x_n \succeq_X 0$ $(\forall n \ge 1)$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ следует неравенство $x \succeq_X 0$.

Множество $X_+ := \{x \in X, x \succeq_X 0\}$ называется конусом положительных элементов пространства X. Легко видеть [14], что класс всех конусов ч. у. н. п. описывается следующим определением.

Определение 2 [13]. *Замкнутое по норме подмножество H ч. у. н. п. X называется конусом, если выполняются условия:*

1) $\forall \mu \in \mathbb{R}_+,\ x \in H : \mu x \in H$;

2) $\{x_1, x_2\} \subset H \Rightarrow x_1 + x_2 \in H$;

3) $x \in H \Rightarrow -x \notin H$.

Очевидно, конус положительных элементов X_+ ч. у. н. п. X является конусом в смысле определения 2, и, обратно, всякий конус $H \subset X$ порождает на X структуру ч. у. н. п.

Определение 3 [13, 14]. *Конус $X_+ \subset X$ называется воспроизводящим, если линейная оболочка X_+ совпадает с X.*

Другими словами, X_+ — воспроизводящий конус тогда и только тогда, когда всякий элемент $x \in X$ может быть представлен в виде $x = x^+ - x^-$, где $\{x^+, x^-\} \subset X_+$.

Определение 4 [14]. *Конус X_+ ч. у. н. п. X называется нормальным, если при любых $\{x_1, x_2\} \subset X$ из соотношения $0 \preceq x_1 \preceq x_2$ следует неравенство $\| x_1 \|_X \leq \nu \| x_2 \|_X$, где ν — положительное число, не зависящее от x_1 и x_2.*

Наименьшее возможное значение ν в определении 4 называется постоянной нормальности конуса X_+. Будем обозначать эту постоянную символом $\nu(X_+)$.

Пусть $B = \langle B, \preceq_B, \| \cdot \|_B \rangle$ — некоторое другое ч. у. н. п.

Определение 5 [14]. *Линейный непрерывный оператор $L : X \to B$ называется положительным, если $LX_+ \subset B_+$, где X_+ и B_+ — соответственно конусы положительных векторов в X и B.*

В следующем определении вводится понятие, в некотором смысле аналогичное понятию модуля действительного числа. Заметим, что подобные объекты рассматриваются также в теории решеточно-нормированных пространств (см., например, [15]).

Определение 6 [12]. *Будем говорить, что отображение $m : X \to B_+$ является абстрактным B_+-значным модулем (или, более кратко, модулем) на X, если выполняются следующие условия:*

m_1) $m(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;

m_2) $m(\mu x) = |\mu| m(x) \quad (\forall \mu \in \mathbb{R},\ x \in X)$;

m_3) $m(x_1 + x_2) \preceq_B m(x_1) + m(x_2) \quad (\forall \{x_1, x_2\} \subset X)$.

Примером X_+-значного модуля служит операция $|\cdot| : X \to X_+$, определенная в случае, когда конус X_+ является воспроизводящим и миниэдральным в следующем смысле.

Определение 7 [12]. *Говорят, что конус X_+ миниэдрален, если для каждой пары векторов $\{x_1, x_2\} \subset X_+$ в X_+ существует точная верхняя грань, обозначаемая символом* $\sup\{x_1, x_2\}$.

Можно показать [14, с. 19], что при воспроизводящем и миниэдральном конусе X_+ понятие точной верхней грани может быть введено для любых конечных подмножеств X, не обязательно состоящих из положительных элементов. В этом случае для каждого $x \in X$ полагают

$$|x| := \sup\{x, 0\} + \sup\{-x, 0\}$$

и называют $|x|$ модулем вектора x.

В дальнейшем, кроме условий $m_1) - m_3)$, указанных в определении 6, будем также требовать, чтобы для абстрактного модуля m выполнялись следующие дополнительные предположения:

$m_4)$ $m(x_1) \preceq_B m(x_2)$, как только $0 \preceq_X x_1 \preceq_X x_2$;

$m_5)$ $\exists\alpha > 0 : \|x\|_X \le \alpha \|m(x)\|_B \quad (\forall x \in X)$.

Легко видеть, что условия $m_4)$ и $m_5)$ выполнены, например, если $B = X$, $B_+ = X_+$ — нормальный конус, а оператор m имеет все элементы X_+ неподвижными точками и удовлетворяет условию

$$m(x) \succeq_B \beta x \quad (\forall x \in X),$$

где β — некоторая положительная постоянная.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 32 [12]. *Пусть конусы положительных векторов X_+ и B_+ являются соответственно воспроизводящим и нормальным. Тогда всякий оператор m, имеющий свойства $m_1) - m_5)$, непрерывен на X.*

Можно также доказать [12], что в условиях теоремы 32 норма на X, заданная с помощью соотношения

$$X \ni x \mapsto \|m(x)\|_B, \tag{208}$$

эквивалентна норме $\|\cdot\|_X$. Это обстоятельство полезно учитывать при использовании теорем о неподвижной точке следующего типа.

Теорема 33 [16]. *Пусть $\langle X, \preceq_X, \|\cdot\|_X \rangle$ и $\langle B, \preceq_B, \|\cdot\|_B \rangle$ — ч.у.н.п. с воспроизводящим и нормальным конусами X_+ и B_+ соответственно, из которых X полно по норме $\|\cdot\|_X$ (т. е. является банаховым).*

Предположим, что отображение $m : X \to B_+$ удовлетворяет условиям $m_1) - m_5)$, а для отображения $\mathcal{T} : X \to X$ можно указать такой линейный непрерывный оператор $L : B \to B$, что $LB_+ \subset B_+$ (т. е. L положителен), и

$$m(\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2) \preceq_B Lm(x_1 - x_2) \quad \text{для всех } \{x_1, x_2\} \subset X. \tag{209}$$

Если, кроме этого, спектральный радиус L меньше единицы, то уравнение $x = \mathcal{T}x$ однозначно разрешимо в X.

3.9.2. Периодические решения уравнений в частично упорядоченных векторных пространствах. Используем понятия и обозначения, введенные в п. 3.9.1, предполагая выполненными сделанные там предположения относительно двух ч.у.н.п. $\langle X, \preceq_X, \|\cdot\|_X \rangle$ и $\langle B, \preceq_B, \|\cdot\|_B \rangle$ и абстрактного модуля $m : X \to B_+$.

Рассмотрим T-периодическую краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x(T), \quad t \in [0, T], \tag{210}$$

где функция $f : [0, T] \times X \to X$ непрерывна на совокупности аргументов. Под решением (210) будем понимать сильно дифференцируемую функцию $x : [0, T] \to X$ со свойством $x(0) = x(T)$, всюду на отрезке $[0, T]$ удовлетворяющую указанному дифференциальному уравнению.

Предположим, что для функции f при всех $\{x_1, x_2\} \subset X$ и $t \in [0, T]$ выполнено (обобщенное) условие Липшица вида

$$m(f(t, x_1) - f(t, x_2)) \preceq_B L(t) m(x_1 - x_2), \tag{211}$$

где $\{L(t) : t \in [0, T]\}$ — некоторая совокупность линейных непрерывных операторов в B, положительных относительно конуса B_+.

Согласно изложенному в п. 3.9.1, из (211) следует, что при фиксированном t функция $f(t, \cdot)$ является непрерывной по норме (208), эквивалентной норме $\|\cdot\|_X$. При этом, если величина $\sup_{t \in [0,T]} \|L(t)\|_{B \to B}$ конечна, то существует единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (210), продолжимое на $[0, T]$ (см. [16]). Это имеет место, в частности, при выполнении следующего условия, справедливость которого и будем предполагать в дальнейшем: оператор-функция $L : [0, T] \to L(B)$ сильно непрерывна (здесь символом $L(B)$ обозначена алгебра линейных непрерывных операторов $B \to B$).

Перейдем к исследованию основных уравнений численно-аналитического метода (интегрального и определяющего) для T-периодической краевой задачи. Для любого $x \in C([0, T], B)$ положим

$$(Kx)(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t L(s) x(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T L(s) x(s) ds, \quad t \in [0, T], \tag{212}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Очевидно, что определенный равенством (212) оператор K положителен на пространстве $C([0, T], B)$ с выделенным в нем конусом непрерывных функций со значениями в B_+.

Теорема 34 [12]. *Предположим, что конусы X_+ и B_+ являются соответственно воспроизводящим и нормальным и в* (210) *отображение $f: [0, T] \times X \to X$ удовлетворяет условию Липшица* (211), *в котором абстрактный модуль $m : X \to B_+$ имеет указанные в п.* 3.9.1 *свойства $m_1) - m_4)$.*

Если спектральный радиус $r(K)$ определенного формулой (212) *оператора K меньше единицы, то интегральное уравнение*

$$x(t, z) = z + \int_0^t f(s, x(s, z)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x(s, z)) ds \tag{213}$$

численно-аналитического метода для задачи (210) *имеет единственное решение $x(\cdot, z)$ для каждого $z \in X$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 33, рассмотрев естественным образом упорядоченные банаховы пространства $C([0, T], X)$ и $C([0, T], B)$ с абстрактным модулем

$$\tilde{m} : C([0, T], X) \to C([0, T], B),$$

порождаемым модулем $m : X \to B$ по формуле

$$\tilde{m}(x)(t) = m(x(t)), \quad t \in [0, T],$$

для каждого $x \in C([0, T], X)$. Отметим, что конус непрерывных функций $[0, T] \to B$ со значениями в B_+ нормален, поскольку, по предположению, нормальным является конус B_+. Действительно, если $0 \preceq_B x(t) \preceq_B y(t)$ для всех $t \in [0, T]$, то $\|x(t)\|_B \leq \nu(B_+)\|y(t)\|_B$. Следовательно, $\|x(t)\|_B \leq \leq \nu(B_+) \max_{t\in[0,T]}\|y(t)\|_B$, откуда $\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|_B \leq \nu(B_+) \max_{t\in[0,T]}\|y(t)\|_B$.

Пусть оператор $\mathcal{T}: C([0,T],X) \to C([0,T],X)$ задан правой частью (213). Используя справедливую в принятых предположениях лемму об оценке модуля от интеграла абстрактной функции интегралом от ее модуля [12], в силу предположения можно заключить, что оператор $\mathcal{T}$ удовлетворяет абстрактному условию Липшица типа (209) с оператором, заданным формулой (212), а именно, для любых $x_1, x_2 \in C([0,T],X)$ справедливо поточечное неравенство

$$\tilde{m}(\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2) \preceq_{C([0,T],B)} K\,\tilde{m}(x_1 - x_2).$$

В силу теоремы 33, из условия $r(K) < 1$ следует существование единственного решения уравнения (213), что и требовалось доказать.

***Следствие* 18.** *Пусть $L(t) \equiv L$ для всех $t \in [0,T]$. Тогда для разрешимости уравнения* (213) *методом последовательных приближений достаточно, чтобы*

$$r(L) \leq \frac{q}{T}, \tag{214}$$

где q — константа из п. 1.

Доказательство. Поскольку L непрерывен, то $K = \mathcal{A}L = L\mathcal{A}$, где

$$(\mathcal{A}y)(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t y(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T y(s)\,ds, \quad t \in [0,T]$$

— линейный положительный оператор на $C([0,T],B)$. Следовательно, согласно [17, с. 450], имеем

$$r(K) = r(\mathcal{A}L) \leq r(\mathcal{A})\,r(L).$$

Подсчитаем $r(\mathcal{A})$, непосредственно оценивая нормы $\mathcal{A}^n$. При этом, в силу свойства неотрицательности итерированного ядра $K_n(t,x)$, имеем

$$\max_{t\in[0,T]}\|(\mathcal{A}^n y)(t)\|_B = \max_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^T K_n(t,s)\,y(s)\,ds\right\|_B \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}\int_0^T K_n(t,s)\,ds \cdot \max_{s\in[0,T]}\|y(s)\|_B = \alpha_n\!\left(\frac{T}{2}\right)\max_{s\in[0,T]}\|y(s)\|_B,$$

где $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ — последовательность функций вида (150).

Поэтому

$$\|\mathcal{A}^n\|_{C([0,T],B)} \leq \alpha_n\!\left(\frac{T}{2}\right). \tag{215}$$

(На самом деле [12], в последнем соотношении имеет место равенство.)

В силу утверждения (160) теоремы 28 [5] (см. также следствие 16), из (215) имеем оценку $r(\mathcal{A}) \leq T/q$, из которой и следует неравенство (214).

Таким образом, условия теоремы 34 гарантируют существование однозначной функции $\Delta: X \to X$,

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x^*(s,z)\big)\,ds, \quad z \in X,$$

нули которой так же, как и в конечномерном случае, определяют начальные значения T-периодических решений задачи (210). Здесь x^* — единственное решение интегрального уравнения (213).

Задача **14.** Оценить величины $m(x^*(t,z)-x_m(t,z))$, $m(\Delta(z_1)-\Delta(z_2))$ и доказать аналог теоремы 3 из п. 1.1. [1] для случая упорядоченных пространств с абстрактным модулем (ср. с [18]).

Задача **15.** Рассмотреть разностное уравнение вида (159) в банаховом пространстве с абстрактным модулем. Доказать для такой задачи аналог теоремы 28. Показать, что, в отличие от рассмотренного выше непрерывного случая, можно не требовать выполнения аксиомы m_4).

3.10. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Одно из интересных приложений метода связано с исследованием дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Более того, как оказалось, эти исследования дали импульс для появления серии работ, связанных с изучением таких уравнений (см., например, библиографию в [19]).

Процедура приведения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{216}$$

к нормальному виду сопряжена с целым рядом трудностей, в то время как при применении численно-аналитического метода к уравнению (216) необходимость в этом отпадает.

Имеется не так уж много работ, относящихся к этой тематике. Первыми из них были статьи Ю. Д. Шлапака [20, 21]. В дальнейшем этот вопрос затрагивался лишь в работах [22–26].

Изложим один из возможных подходов к исследованию T-периодических решений системы (216) с помощью указанного метода. Пусть непрерывная функция $f(t,x,y)$ определена в области $(t,x,y)\in \mathbb{R}\times D\times D_1$, $D, D_1 \in \mathbb{R}^n$ и T-периодична по t.

Введем в рассмотрение систему уравнений

$$\begin{cases} x(t) = z + \int\limits_0^t f(s, x(s), y(s))\,ds - \dfrac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s), y(s))\,ds, \\ y(t) = f(t, x(t), y(t)). \end{cases} \tag{217}$$

Предположим, что для фиксированного z методом последовательных приближений

$$x_{m+1}(t,z) = z + \int\limits_0^t f(s, x_m(s,z), y_m(s,z))\,ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x_m(s,z), y_m(s,z))\,ds, \tag{218}$$

$$y_{m+1}(t,z) = f(t, x_m(t,z), y_m(t,z)), \tag{219}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; $x_0(t,z)\equiv z$, $y_0(t,z)\equiv 0$, в банаховом пространстве $CB(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ непрерывных ограниченных вектор-функций с supremum-нормой найдено решение $x = x^*(t,z)$, $y = y^*(t,z)$ системы (217). По индукции легко заключить, что $x_m(t,z)$ и $y_m(t,z)$ для всех m принадлежат $CP_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, где $CP_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ означает множество T-периодических непрерывных вектор-функций. Таким образом, $x^*(t,z)$ и $y^*(t,z)$ также принадлежат $CP_T(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, и мы вправе рассмотреть непрерывную определяющую функцию

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x^*(s,z), y^*(s,z)\right)ds .$$

Пусть $\Delta(z^*) = 0$. Тогда в силу (217)

$$\frac{dx^*\left(t, z^*\right)}{dt} = f(t, x^*(t, z^*), y^*(t, z^*)) = y^*(t, z^*).$$

Это означает, что $x = x^*(t, z^*)$ является T-периодическим решением уравнения (216).

Выясним теперь условия сходимости последовательности функций (218), (219). Пусть выполняются следующие условия:

$$z \in D_\beta, \quad \beta = \frac{T}{2}M, \quad M = \sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times D\times D_1} |f(t,x,y)|;$$

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \le L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2|$$

для всех t, (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в соответствующих областях, и, кроме этого,

$$f([0,T], D, D_1) \subset D_1 .$$

Тогда очевидно, что итерационная последовательность (218), (219) корректно определена для каждого $m \ge 0$.

Положим $w(t) = \mathrm{col}\,(x(t), y(t))$, и пусть $(Nw)(t)$ — выражение, определяемое правой частью (217). Тогда

$$|(Nw_1)(t) - (Nw_2)(t)| \le \begin{bmatrix} \mathcal{A} L_1 & \mathcal{A} L_1 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix} |w_1(t) - w_2(t)| = Q_1 |w_1(t) - w_2(t)|.$$

Таким образом, если

$$r(Q_1) < 1, \tag{220}$$

то итерационный процесс (218), (219) будет сходящимся в $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ для каждого $z \in D_\beta$. Заметим, что условие (220) выполнено, если $r(Q_2) < 1$, где

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{T}{3}L_1 & \frac{T}{3}L_2 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix},$$

поскольку $(Q_1\alpha_1)(t) \le Q_2\alpha_1)(t)$.

В силу леммы 2 [3] условие $r(Q_2) < 1$ эквивалентно соотношению

$$r\left(\frac{T}{3}L_1 + L_2\right) < 1 .$$

***Задача* 16.** По аналогии с (217) и (218), (219), исследовать T-периодические решения дифференциально-операторного уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = \left[A\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\right](t) .$$

Периодическая задача для скалярного уравнения (216) с $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ с помощью численно-аналитического метода впервые была исследована в работе [21]. При этом вместо полученных выше условий

$$r(Q_2) = \frac{T}{3}L_1 + L_2 < 1, \quad b-a \geq \frac{2T}{3}M, \quad c \leq -M \leq M \leq d$$

в [21] фигурировали более жесткие условия

$$r(Q_3) = \frac{T}{2}L_1 + 2L_2 < 1, \quad b-a \geq TM, \quad c \leq -2M \leq 2M \leq d,$$

где

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{T}{2}L_1 & \frac{T}{2}L_2 \\ 2L_1 & 2L_2 \end{pmatrix}.$$

Ухудшение условий сходимости при этом связано с формальным (и менее удачным) выбором последовательности периодических приближений

$$x_{m+1}(t,z) = z + \int_0^t \left[f\left(t, x_m(t,z), \frac{dx_m(t,z)}{dt}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z), \frac{dx_m(s,z)}{dt}\right)ds \right] dt. \tag{221}$$

Заметим, что итерационный процесс (221) эквивалентен (218), (219), если (219) заменить на

$$y_{m+1}(t,z) = f(t, x_m(t,z), y_m(t,z)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z), y_m(s,z))ds.$$

Ясно, однако, что в отличие от первого уравнения системы (218), (219), вычитать интегральное среднее во втором уравнении совершенно не обязательно.

Исследованию двухточечной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad Ax(0) + Cx(T) = d,$$

где $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\det C \neq 0$, посвящена вторая половина работы [25] и часть статьи [24]. При этом в [25] используется алгоритм, описанный п. 3.2.3 [3], а в [24] — некоторая его модификация.

Заметим, что итерационный алгоритм [25] дает, по сути, другую форму процедуры (218), (219). Поэтому условия применимости метода в работе [25] те же, что и в нашем случае. В [24] за счет усложнения схемы метода ограничение типа (220) удалось снять.

В работе [26] уравнение (216) исследовалось при общих краевых условиях вида

$$l(x) = d, \tag{222}$$

где $l: C([0,T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ — линейный вектор-функционал. В частном случае T-периодической краевой задачи, когда $l(x) = x(0) - x(T)$ и $d = 0$, в [26] также использовался алгоритм (221), что давало, по сути, те же условия сходимости, что и в [21].

В [22] рассматривалась T-периодическая краевая задача для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}, \int_0^t \varphi\left(t, s, x(s), \frac{dx}{ds}\right)ds\right).$$

При этом алгоритм построения последовательности T-периодических приближений был полностью аналогичен (221). Эта работа также содержит некоторые рассуждения по поводу изучения T-периодических решений системы дифференциальных уравнений вида

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Заметим, что в первой работе [20] по данной тематике, связанной с изучением дифференциальных уравнений неявного вида, рассматривалось все же не уравнение первого порядка (216), а скалярное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right), \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{223}$$

При этом предполагалось, что функция $f(t, x, p, y)$ определена в области

$$t \in \mathbb{R}, \quad a \le x \le b, \quad a_1 \le p \le b_1, \quad a_2 \le y \le b_2,$$

периодична по t с периодом T, непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет неравенству

$$|f(t, x_1, p_1, y_1) - f(t, x_2, p_2, y_2)| \le L_1 |x_1 - x_2| + L_2 |p_1 - p_2| + L_3 |y_1 - y_2|.$$

Кроме того, требовалось выполнение неравенств

$$\begin{gathered} b - a \ge \frac{MT^2}{2}; \quad a_1 \le -\frac{5MT}{6} \le \frac{5MT}{6} \le b_1; \\ a_2 \le -2M \le 2M \le b_2; \\ \frac{T^2}{4} L_1 + \frac{5T}{6} L_2 + 2L_3 < 1. \end{gathered} \tag{224}$$

(В работе [20] при записи последнего неравенства была допущена опечатка.) При этом схема метода была следующая:

$$x_{m+1}(z, t) = z + L^2 f\left(t, x_m(t, z), \frac{dx_m}{dt}, \frac{d^2x_m}{dt^2}\right), \tag{225}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t, z) \equiv z$, а оператор L введен формулами (38) и (44) в [2]. Видоизменив алгоритм (225) аналогично тому, как это было проделано для системы дифференциальных уравнений первого порядка в (218), (219), мы сможем в достаточной мере ослабить требования (224), предъявляемые к уравнению (223) в работе [20].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 35. *Предположим, что выполнены неравенства*

$$b - a \ge \frac{MT^2}{8}; \quad a_1 \le -\frac{MT}{4} \le \frac{MT}{4} \le b_1; \quad a_2 \le -M \le M \le b_2; \tag{226}$$

$$\frac{T^2}{16} L_1 + \frac{T}{4} L_2 + L_3 < 1. \tag{227}$$

Тогда последовательность T-периодических функций

$$x_{m+1}(t, z) = z + L^2 f(t, x_m(t, z), p_m(t, z), y_m(t, z)),$$

$$p_{m+1}(t, z) = L f(t, x_m(t, z), p_m(t, z), y_m(t, z)),$$

$$y_{m+1}(t,z) = f(t, x_m(t,z), p_m(t,z), y_m(t,z)),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t,z) = z$, $p_0(t,z) = 0$, $y_0(t,z) = 0$, *равномерно сходится в* $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *к функции*

$$w^*(t,z) = \operatorname{col}(x^*(t,z), p^*(t,z), y^*(t,z)).$$

Если $z = z^* \in \left[a + \frac{MT^2}{8}, b - \frac{MT^2}{8}\right]$ *таково, что*

$$\Delta(z^*) = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x^*\left(t, z^*\right), p^*\left(t, z^*\right), y^*\left(t, z^*\right)\right) dt = 0,$$

то $x = x^*(t, z^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*)$ *будет* T*-периодическим решением уравнения* (223).

Доказательство. Пусть $w(t,z) = \operatorname{col}(x(t,z), p(t,z), y(t,z))$. Непосредственные вычисления дают, что

$$|w_{m+1}(t,z) - w_m(t,z)|_0 \le$$

$$\le \begin{bmatrix} \frac{T^2}{16}L_1 & \frac{T^2}{16}L_2 & \frac{T^2}{16}L_3 \\ \frac{T}{4}L_1 & \frac{T}{4}L_2 & \frac{T}{4}L_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \max_{s\in[0,T]} |w_m(s,z) - w_{m-1}(s,z)|$$

для всех $m \ge 2$. Спектральный радиус матрицы, фигурирующей в предыдущей формуле, равен ее следу и поэтому меньше единицы. Более того, в силу (226), последовательность $w_m(t,z)$ корректно определена. Дальнейшее доказательство завершается применением теоремы о неподвижной точке.

***Замечание* 21.** Аналог теоремы 35 можно получить и в случае, когда $x \in \mathbb{R}^n$. При этом выкладки изменяются незначительно, а условие (227), в силу леммы 2 из [3], эквивалентно неравенству

$$r\left(\frac{T^2}{16}L_1 + \frac{T}{4}L_2 + L_3\right) < 1,$$

где $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

***Задача* 17.** Используя приближенную определяющую функцию

$$\Delta_m(z) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t,z), p_m(t,z), y_m(t,z))\, dt,$$

исследовать вопрос о периодических движениях спутника, описываемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2e\sin t\,\frac{dx}{dt} - e\cos t\,\frac{d^2x}{dt^2} + 4e\sin t - \alpha\sin x.$$

Полученные результаты сравнить с данными статьи [20] и развивающей ее работы [19].

3.11. Задача управления. Существование, нахождение и свойства определяющей функции $\Delta(z)$, как мы уже указывали, играют важную роль при построении T-периодических решений систем дифференциальных уравнений. Кроме того, эта функция представляет также самостоятельный интерес, в частности, в связи со следующей задачей управления.

Пусть требуется для системы, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) - \mu, \tag{228}$$

с периодической по t периода T правой частью и постоянным управлением $\mu \in \mathbb{R}^n$, выбрать это управление так, чтобы траекторию, проходящую в заданный момент времени $t=0$ через заданную точку $x=z$, сделать периодической с периодом T. Ясно, что решение этой задачи, названной в [27] *периодической задачей управления,* дается управлением

$$\mu = \Delta(z), \tag{229}$$

где Δ введено в [1] формулой (10).

При выполнении априорних оценок п. 1.2.1 [1], как мы уже убедились, такое управление (229) существует, единственно и непрерывно по z. Более того, применение теоремы Шаудера о неподвижной точке гарантирует, что для всех $z \in D_\beta$ существует, по крайней мере, одно такое управление $\Delta(z)$. Если $\Delta(z)$ к тому же единственно, то, вообще говоря, оно также непрерывно зависит от z [28].

Заметим, что практически все работы, развивающие метод, в той или иной мере касались задачи управления (см., например, §4.21 и 4.22 монографии [9], а также п. 3.6 настоящей работы, где этот аспект численно-аналитического метода был выделен как главный).

В работах [29, 30] на базе численно-аналитического метода решалась периодическая задача управления

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda), \qquad x(0) = x(T) = z, \tag{230}$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$. При этом начальное значение периодического решения z фиксировалось сразу. Нужно было определить значение управляющего параметра $\lambda = \lambda^*$, при котором управление

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda^*) \tag{231}$$

имело бы T-периодическое решение, удовлетворяющее краевым условиям (230).

Заметим, что одновременно с нахождением искомого управления решался и вопрос о построении T-периодического решения уравнения (231). Для этого использовалась итерационная схема

$$\begin{gathered} x_{m+1}(t,\lambda) = z + Lf(t, x_m(t,\lambda_m), \lambda_m), \qquad m = 0,1,2,\ldots, \\ \int_0^T f(t, x_m(t,\lambda_m), \lambda_m)\,dt = 0. \end{gathered} \tag{232}$$

Здесь $x_0(t,\lambda) \equiv \lambda$, а λ_m находится на каждом шаге итерационного процесса из трансцендентного уравнения (232). Для обеспечения разрешимости уравнения

(232) требуется жесткое дополнительное ограничение, названное в [30] „A-свойством".

Указанные идеи впоследствии были развиты в работах [31–35] для дифференциальных уравнений с запаздыванием первого и второго порядков, а также для разностных уравнений.

Задача управления особенно легко решается в скалярном случае, для которого справедливо следующее утверждение.

Теорема 36 [37]. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$ *и выполнены условия, при которых решение задачи Коши для уравнения* (228) *при произвольном* $\mu \in \mathbb{R}$ *локально единственно. Тогда для любого* $z \in \mathbb{R}$ *интегральное уравнение* (229) *имеет единственное решение* $x = x^*(t, z)$ *и функция* Δ *непрерывна на* $\mathbb{R}$.

С помощью этого результата можно следующим образом усилить теорему 7.2 из [27].

Теорема 37. *Пусть в областях*

$$D_1 = [0, T] \times [a_1, b_1]; \quad D_2 = [0, T] \times [a_2, b_2]$$

для уравнения (228) *при* $x \in \mathbb{R}$ *и* $\mu = 0$ *выполнено условие* H1.4 *п*.1.2.1 [1], *и* $D_{1\beta} \neq \varnothing$, $D_{2\beta} \neq \varnothing$. *Если при этом найдутся точки* $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$, *такие, что*

$$\Delta(x_1)\Delta(x_2) < 0, \tag{233}$$

то существует, по крайней мере, одно T*-периодическое решение* $x = x^*$ *уравнения* (228), *причем для всех* $t \in [0, T]$

$$\min(a_1, a_2) \leq x^*(t) \leq \max(b_1, b_2).$$

Заметим, что проверка неравенства (233) может быть осуществлена конструктивно посредством вычисления приближенной определяющей функции Δ_m аналогично тому, как это было сделано в [27].

***Пример* 8.** Рассмотрим задачу управления для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) - \mu, \quad x(0) = x(T) = z, \tag{234}$$

где $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, а P и f периодичны с периодом T.

Из рассмотрений п. 1.2.1 непосредственно следует, что если

$$r\left(\max_{t \in [0,T]} |P(t)|\right) < \frac{q}{T},$$

то искомое управление μ, при котором решение системы (234), принимающее при $t = 0$ значение z, будет T-периодическим, может быть найдено как предел последовательных приближений

$$\mu = \lim_{m \to \infty} \mu_m = \lim_{m \to \infty} \left[\frac{1}{T}\int_0^T P(s)\, x_m(s, z)\, ds + S(f)\right],$$

где $x_m(s, z)$ — T-периодические функции, для $m = 1, 2, \ldots$ определяемые соотношением

$$x_m(t, z) = z + \int_0^t P(s)\, x_{m-1}(s, z)\, ds - \frac{t}{T}\int_0^T P(s)\, x_{m-1}(s, z)\, ds + \varphi(t),$$

в котором $x_0(t,z) \equiv z$ и $\varphi(t) = \int_0^t [f(s) - S(f)]\,ds$, а символом Sf обозначается интегральное среднее $Sf := \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds$ функции f.

Более тщательный анализ алгоритма метода позволяет установить следующее утверждение, касающееся линейной задачи в примере 8.

Теорема 38 [37]. *Предположим, что сопряженное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = -P^*(t)x$$

не имеет решений с нулевым средним на $[0,T]$. *Тогда периодическая задача управления* (234) *имеет единственное решение, задаваемое управлением* $\mu = \Delta(z)$ *для всех* $z \in \mathbb{R}^n$.

В работах [38–45] метод обобщался на задачи, содержащие управляющие параметры либо в краевых условиях, либо в дифференциальном уравнении, либо и в уравнении, и в краевых условиях. При этом рассматривались двухточечные, непериодические краевые условия.

Так, в [38, 40] решалась задача управления

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad Ax(0) + \lambda Cx(T) = d, \qquad (235)$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

где $t \in [0,T]$, $x:[0,T] \to D \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\det C \neq 0$. Задача состоит в определении значения управляющего параметра $\lambda = \lambda^*$, при котором краевая задача (235) имеет решение $x = x^*(t)$, т.е. ищется пара (λ^*, x^*). Для нахождения этой пары в указанных работах использовался итерационный процесс

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) = z + \int_0^t \left[f(t, x_m(t,u,\lambda)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(t,u,\lambda))\,ds \right] dt + \\ + \frac{t}{\lambda T}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + \lambda E\right)z\right], \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x_0(t,u,\lambda) \equiv z \in D_\beta$, $z = \mathrm{col}(x_{10}, z_2, z_3, \ldots, z_m)$, $u = \mathrm{col}(z_2, z_3, \ldots, z_m)$,

$$\beta = \frac{T}{2}M + \left|\frac{1}{\lambda}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + \lambda E\right)z\right]\right|.$$

Соответствующее определяющее уравнение имеет вид

$$\Delta(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda T}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + \lambda E\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t, x^*(t,u,\lambda)\right)dt = 0,$$

где $x^*(t,u,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,u,\lambda)$.

Пусть $\Delta(u^*, \lambda^*) = 0$. Тогда неизвестная пара

$$(\lambda^*, x^*(t)) = (\lambda^*, x^*(t, u^*, \lambda^*)). \qquad (236)$$

В [40] исследовалась задача управления для краевой задачи с нефиксированной правой границей

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T], \\ Ax(0) + Cx(\lambda) = d, \quad \det C \neq 0, \quad \lambda \in (0,T], \\ x_1(0) = x_{10}. \end{cases}$$

Искомая пара $(\lambda^*, x^*(t))$ вида (236) отыскивалась на основании итерационной формулы

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) = z + \int_0^t \left[f(t, x_m(t,u,\lambda)) - \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t, x_m(t,u,\lambda))\,ds \right] dt +$$
$$+ \frac{t}{\lambda}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + E\right)z \right],$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots,\ x_0(t,u,\lambda) \equiv z \in D_\beta$,

$$\beta = \frac{\lambda}{2}M + \left| C^{-1}d - \left(C^{-1}A + E\right)z \right|,$$

а определяющее уравнение имеет вид

$$\Delta(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + E\right)z \right] - \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f\left(t, x^*(t,u,\lambda)\right)dt = 0.$$

В [40] на основании численно-аналитического метода изучалась задача управления в случае нескольких управляющих параметров в краевых условиях

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad \lambda_1 A x(0) + C x(\lambda_2) = d,$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$x_2(0) = x_{20},$$

где $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n\ (n \geq 3)$, $\det C \neq 0$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, T]$, $a_2 > 0$. В этом случае последовательные приближения имеют вид

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) = z + \int_0^t \left[f(t, x_m(t,u,\lambda)) - \frac{1}{\lambda_2}\int_0^{\lambda_2} f(s, x_m(s,u,\lambda))\,ds \right] dt +$$
$$+ \frac{t}{\lambda_2}\left[C^{-1}d - \left(\lambda_1 C^{-1}A + E\right)z \right],$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots,\ x_0(t,u,\lambda) \equiv z \in D_\beta$,

$$z = \operatorname{col}(x_{10}, x_{20}, z_2, z_3, \ldots, z_m) = \operatorname{col}(x_{10}, x_{20}, u),$$

$$\beta = \beta(z, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{2}M + \left| C^{-1}d - \left(\lambda_1 C^{-1}A + E\right)z \right|.$$

Решением этой задачи управления является пара

$$(\lambda^*, x^*(t)) = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, x^*(t, u^*, \lambda^*)), \tag{237}$$

где (u^*, λ^*) находится как корень определяющего уравнения

$$\Delta(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2}\left[C^{-1}d - \left(\lambda_1 C^{-1}A + E\right)z\right] - \frac{1}{\lambda_2}\int\limits_0^{\lambda_2} f\left(t, x^*(t,u,\lambda)\right)dt = 0.$$

В статье [41] решалась задача управления вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \lambda_1 g(t,x), \quad Ax(0) + \lambda_2 Cx(T) = d,$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$x_2(0) = x_{20},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\det C \neq 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Итерационный процесс метода задавался формулой

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) = z + L\left(f(t, x_m(t,u,\lambda)) + \lambda_1 g(t, x_m(t,u,\lambda))\right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + \lambda_2 E\right)z\right], \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

в которой $x_0(t,u,\lambda) \equiv z \in D_\beta$, а определяющее уравнение имеет вид

$$\Delta(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2 T}\left[C^{-1}d - \left(C^{-1}A + \lambda_2 E\right)z\right] -$$

$$- \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[f\left(t, x^*(t,u,\lambda)\right) + \lambda_1 g\left(t, x^*(t,u,\lambda)\right)\right]dt = 0.$$

В [44, 45] с помощью метода исследовалась задача управления вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda_1), \quad Ax(0) + C(\lambda_1)x(\lambda_2) = d(\lambda_2),$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$x_2(0) = x_{20},$$

где $t \in [0,T]$, x; $[0,T] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\lambda_1 \in [a_1, b_1]$, $\lambda_2 \in (0,T]$. В этом случае строились приближения вида

$$x_{m+1}(t,u,\lambda) = z + \int\limits_0^t \left[f(s, x_m(s,u,\lambda), \lambda_1) - \frac{1}{\lambda_2}\int\limits_0^{\lambda_2} f(\tau, x_m(\tau,u,\lambda), \lambda_1)d\tau\right]ds +$$

$$+ \frac{t}{\lambda_2}\left[C^{-1}(\lambda_1)d(\lambda_2) - \left(C^{-1}(\lambda_1)A + E\right)z\right],$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t,u,\lambda) \equiv z = (x_{10}, x_{20}, u) \in D_\beta$,

$$\beta = \frac{T}{2}M' + \left|C^{-1}(\lambda_1)d(\lambda_2) - \left(C^{-1}(\lambda_1)A + E\right)z\right|,$$

$$M' = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x,\lambda_1)\in\Omega} f(t,x,\lambda_1) - \min_{(t,x,\lambda_1)\in\Omega} f(t,x,\lambda_1)\right].$$

Решение этой задачи управления дается формулой (237), где (u^*, λ^*) находятся как корни определяющего уравнения

$$\Delta(u,\lambda) = \frac{1}{\lambda_2}\left[C^{-1}(\lambda_1)d(\lambda_2) - \left(C^{-1}(\lambda_1)A + E\right)z\right] -$$

$$-\frac{1}{\lambda_2}\int_0^{\lambda_2} f\left(s, x^*(t,u,\lambda), \lambda_1\right)ds = 0.$$

Условия сходимости построенных итерационных процессов, а также свойства определяющих функций могут быть исследованы с помощью техники численно-аналитического метода.

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 102–117.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – № 2. – С. 225–243.
3. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Там же. – № 7. – С. 960–979.
4. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Там же. – № 12. – С. 1656–1672.
5. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. V // Там же. – 1999. – **51**, № 5. – С. 663–673.
6. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI // Там же. – № 7. – С. 960–971.
7. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования счетных систем периодических дифференциальных уравнений // Мат. физика. – 1966. – Вып. 2. – С. 115–132.
8. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
9. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
10. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 162–168.
11. *Перестюк Н. А.* О периодических решениях некоторых систем дифференциальных уравнений // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 136–146.
12. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 34 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; 96-02).
13. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (23). – С. 3–95.
14. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
16. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
17. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
18. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for non-linear differential equations. – Miskolc, 1996. – 19 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 96-01).
19. *Petrishyn W. W., Yu Z. S.* Periodic solutions of nonlinear second-order differential equations which are not solvable for the highest derivative // J. Math. Anal. and Appl. – 1982. – **89**. – P. 462–488.
20. *Шлапак Ю. Д.* О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 6. – С. 850–854.
21. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной // Там же. – 1980. – **32**, № 5. – С. 638–644.
22. *Турбаев Б. Е.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. мат., мех. – 1985. – Вип. 27. – С. 98–104.

23. *Овездурдыев Х.* Численно-аналитические методы исследования решений двухточечных краевых задач: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 15 с.
24. *Kwapisz M.* On modifications of the integral equation of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems // Math. Nachr. – 1992. – **157**. – P. 125–135.
25. *Augustinowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving boundary value problems for functional differential equation of neutral type // Ibid. – 1990. – **145**. – P. 255–269.
26. *Мартынюк С. В.* Исследование решений краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 16 с.
27. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
28. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 13 (47). – С. 31–36.
29. *Собкович Р. И.* О периодической задаче управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Аналитические методы нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 125–133.
30. *Собкович Р. И.* Численно-аналитический метод исследования краевых задач с управлением: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1983. – 17 с.
31. *Митропольский Ю. А.., Мартынюк Д. И., Юрчик А. И.* Задача управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – С. 594–599.
32. *Митропольский Ю. А.., Мартынюк Д. И., Юрчик А. И.* Решение одной задачи управления для систем с запаздыванием методом двусторонних приближений // Там же. – № 4. – С. 462–467.
33. *Мартынюк Д. И., Юрчик А. И.* Задача об управлении для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 129–132.
34. *Мартынюк Д. И., Юрчик А. И.* Периодическая задача управления для систем разностных уравнений // Некоторые вопросы теории асимптотических методов в нелинейной механике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 138–141.
35. *Мартынюк Д. И., Юрчик А. И.* Решение одной периодической задачи управления в системах разностных уравнений методом двусторонних приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1987. – Вып. 7(41). – С. 145–151.
36. *Юрчик А. И.* Об одной периодической задаче управления нелинейными системами с запаздыванием // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 165–169.
37. *Трофимчук Е. П.* Итерационные методы исследования дифференциальных систем с особенностями: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 75 с.
38. *Самойленко А. М., Ронто Н. И., Ронто В. А.* Двухточечная краевая задача с параметрами в граничных условиях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 7. – С. 23–26.
39. *Ронто Н. И., Ронто В. А.* Об одном методе исследования краевых задач с параметрами // Краевые задачи математической физики. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 3–10.
40. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
41. *Ронто Н. И., Король И. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1031–1043.
42. *Король І. І.* Про дослідження двоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з параметрами // Допов. НАН України. – 1995. – № 9. – С. 6–12.
43. *Король І. І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1996. – 16 с.
44. *Rontó M.* On numerical-analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D, Natur. Sci. Math. – 1996. – **36**, № 2. – P. 125–132.
45. *Rontó M.* On some existence results for parametrized boundary value problems // Ibid. – 1997. – **37**, № 2. – P. 95–104.

Получено 07.04.99