УДК 517.6

И. А. Джалладова (Киев. нац. экон. ун-т)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

We propose and justify a numerical method of the factorization of polynomial with complex coefficients into factors. We construct an algorithm of the factorization of polynomial with real coefficients into real factors in the case of multiple roots.

Запропоновано та обгрунтовано чисельний метод розкладу многочлена з комплексними коефіцієнтами на множники. Побудовано алгоритм розкладу многочлена з дійсними коефіцієнтами на дійсні множники у випадку кратних коренів.

Предложен и обоснован алгоритм разложения многочлена с комплексными коэффициентами на множители. В частном случае рассматривается разложение многочлена с вещественными коэффициентами на вещественные множители.

1. Постановка задачи. Рассмотрим приведенный многочлен n-й степени

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad a_0 = 1, \quad \deg f(x) = n, \tag{1}$$

где коэффициенты a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные комплексные числа.

Пусть

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k}, \quad b_0 = 1, \quad \deg \psi(x) = p, \tag{2}$$

— делитель многочлена (1). Тогда существует многочлен

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{q} c_k x^{q-k}, \quad c_0 = 1, \quad \deg \varphi(x) = q, \quad q = n - p,$$

удовлетворяющий равенству

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{3}$$

Построим алгоритм нахождения коэффициентов b_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, и выясним условия его применимости.

Разделим многочлен (1) на произвольно выбранный многочлен, который для удобства дальнейших рассуждений запишем в виде

$$\psi(x) + \delta\psi(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k} + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x^{p-k}. \tag{4}$$

Остаток от деления представим как

$$R(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = \sum_{k=1}^{p-1} R_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) x^{p-1-k}. \tag{5}$$

Тогда поставленную задачу можно переформулировать так: определить коэффициенты многочлена $\delta\psi(x)$ так, чтобы остаток от деления (5) был равен 0.

Величины α_k, $k = 1, 2, \dots, p$, можно определить численно из системы уравнений

$$R_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{6}$$

используя различные численные методы и, в частности, метод Ньютона.

Очевидно, что для системы функций (6) существует якобиан

$$\frac{D(R_1, R_2, \dots, R_p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}. \tag{7}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть справедливо разложение на множители* (3). *Для того чтобы многочлены* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *не имели общих корней, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\left.\frac{D(R_1, R_2, \dots, R_p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\right|_{\alpha_k = 0} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \tag{8}$$

Доказательство. Положим

$$f(x) = (\varphi(x) + \delta\varphi(x))(\psi(x) + \delta\psi(x)) + R(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p),$$

где

$$\varphi(x) + \delta\varphi(x) = \sum_{k=0}^{q} c_k x^{q-k} + \sum_{k=1}^{q} \beta_k x^{q-k}.$$

Предполагая, что величины $|\alpha_k|$, $|\beta_k|$, $k = 1, 2, \dots, p$, достаточно малы, находим в первом приближении остаток от деления многочлена (1) на многочлен (4):

$$R(x) = -\varphi(x)\delta\varphi(x) - \psi(x)\delta\psi(x)) - \dots , \tag{9}$$

где многоточие обозначает члены второго порядка малости и выше относительно переменных α_k, β_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве (9), получаем систему уравнений относительно неизвестных α_k, β_k, $k = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{gathered}\sum_{s=s_1}^{s_2} c_s \alpha_{p+q-j-s} + \sum_{s=s_3}^{s_4} b_{p+q-j-s}\beta_s = -R_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-1, \\ \sum_{s=s_1} c_s \alpha_{p+q-j-s} + \sum_{s=s_3}^{s_4} b_{p+q-j-s}\beta_s = 0, \quad j = p, \dots, p+q-1,\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$s_1 = \max\{0, q-j\}, \quad s_2 = \min\{q, p+q-j-1\},$$

$$s_3 = \max\{1, q-j\}, \quad s_4 = \min\{q, p+q-j\}.$$

Систему уравнений (10), используя обозначения

$$U = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^T, \quad V = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T,$$

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_p)^T,$$

запишем в матричной форме

$$AU + BV = -R, \quad CU + DV = 0, \tag{11}$$

где

$$D = \begin{pmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \det D = \pm 1, \quad \dim D = q \times q.$$

Транспонированный определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (11) имеет вид

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & \dots & c_{q-1} & c_q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_0 & c_1 & \dots & c_q \\ b_0 & b_1 & \dots & b_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{p-1} & b_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_p \end{pmatrix}$$

и совпадает с результантом многочленов $\varphi(x)$, $\psi(x)$ [1]. Для того чтобы $\Delta \neq \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни один из корней многочлена $\psi(x)$ не совпадал ни с одним из корней многочлена $\varphi(x)$.

Найдем якобиан (7). Исключая из системы уравнений (11) вектор V, получаем систему уравнений

$$R = (BD^{-1}C - A)U. \tag{12}$$

В равенстве (12) учитываются лишь члены первых порядков малости относительно малых α_k, $k = 1, 2, \dots, p$. Поэтому справедливо равенство

$$\left.\frac{D(R_1, R_2, \dots, R_p)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)}\right|_{\alpha_k = 0} = \det(BD^{-1}C - A), \qquad k = 1, 2, \dots, p. \tag{13}$$

Кроме того,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ -D^{-1}C & E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где E_p, E_q — единичные матрицы порядка p, q [2].

Переходя в равенстве (14) к определителям, получаем равенство

$$\Delta = \det(A - BD^{-1}C)\det D.$$

Следовательно, якобиан (13) лишь знаком отличается от результанта Δ многочленов $\psi(x)$, $\varphi(x)$. Это и доказывает справедливость теоремы.

2. Алгоритм разложения. Из доказанной теоремы вытекает обоснование численного способа разложения многочлена $f(x)$ на множители.

1°. Выбираем степень p многочлена $\psi(x)$.

2°. Находим круг, в котором расположены все корни многочлена $f(x)$. В частности, можно использовать оценку Коши [3]:

$$|x| \le \rho, \quad \rho = 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}.$$

3°. В круге $|x| \le \rho$, выбираем с помощью датчика случайных чисел p комплексных чисел $x_1, x_2, \dots, x_p$.

4°. Образуем многочлен

$$\psi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k}, \quad b_0 = 1.$$

5°. Делим численно многочлен $f(x)$ на $\psi(x)$ и находим остаток от деления

$$R(x) = R_1 + R_2 x + \dots + R_p x^{p-1}.$$

6°. Решаем численно по методу Ньютона систему уравнений $R_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $\dots, \alpha_p) = 0$, $k = 1, 2, \dots, p$. Для этого коэффициентам b_k, $k = 1, 2, \dots, p$, придаем малое приращение $\alpha_k \approx 10^{-3} \div 10^{-6}$ и находим снова остаток от деления $f(x)$ на $\psi(x)$, где

$$\psi_k(x) = \psi(x) + \sum_{s=1}^{p} \delta_{sk}\, \alpha_k\, x^{p-k}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

При этом новый остаток от деления имеет вид

$$R_k(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = R_{1k} + R_{2k} x + \dots + R_{pk} x^{p-1},$$

а столбцовый вектор частных производных

$$J_k = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R_1}{\partial \alpha_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial R_p}{\partial \alpha_k} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (R_{1k} - R_1)\,\alpha_k^{-1} \\ \vdots \\ (R_{pk} - R_p)\,\alpha_k^{-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

7°. Образуем матрицу Якоби, столбцами которой являются векторы J_k: $J =$ $= (J_1, J_2, \dots, J_p)$.

8°. Решаем систему линейных уравнений относительно α_k, $k = 1, 2, \dots, p$,

$$JU = -R.$$

9°. Находим новые значения коэффициентов делителя $\psi(x)$:

$$\overline{b}_k = b_k + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

10°. Переходим к п. 5° и снова вычисляем значения поправок коэффициентов α_k, $k = 1, 2, \dots, p$.

11°. Если система уравнений в п. 8° не решается из-за плохой обусловленности матрицы J или процесс последовательных приближений не сходится за N итераций, то снова переходим к п. 3°.

При $p=1$ указанный способ полностью совпадает с обычным методом Ньютона для отыскания вещественных и комплексных корней многочлена.

3. Частный случай. Рассмотрим подробнее случай $p=2$, когда предложенный численный способ позволяет эффективно находить двукратные корни, пару простых комплексно-сопряженных или вещественных корней.

Пусть $\psi(x)$ — многочлен второй степени с вещественными корнями x_1, x_2:

$$\psi(x) = x^2 + ax + b = (x-x_1)(x-x_2).$$

Разделим многочлен $f(x)$ на $\psi(x)$. При этом имеем

$$f(x) = \varphi(x)(x-x_1)(x-x_2) + R_2(a,b)x + R_1(a,b). \tag{15}$$

Подставляя значения корней x_1, x_2 в равенство (15), получаем значения остатков $R_2(a,b)$, $R_1(a,b)$:

$$R_1(a,b) = f(x_1) - R_2(a,b)x_1, \quad R_2(a,b) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

Непосредственное вычисление якобиана (7) приводит к явной формуле

$$\frac{D(R_1,R_2)}{D(a,b)} =$$

$$= -\frac{[f(x_1)-f(x_2)-f'(x_2)(x_1-x_2)][f(x_2)-f(x_1)-f'(x_1)(x_1-x_2)]}{(x_1-x_2)^4}.$$

В случае кратных корней, т. е. при $x_2 \to x_1$, имеем

$$\frac{D(R_1,R_2)}{D(a,b)} = -\frac{1}{4}(f''(x_1))^2. \tag{16}$$

Для двукратного корня якобиан (7) отличен от нуля, так как $f''(x_1) \neq 0$. Это дает новое доказательство того, что предложенный численный способ дает возможность выделения p-кратного корня при $p=2$.

Рассмотрим важный случай, когда корни x_1, x_2 — комплексные, а многочлен $f(x)$ имеет вещественные коэффициенты. Пусть

$$x_1 = \alpha + i\beta, \quad x_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0,$$

$$\psi(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Выделим вещественную и мнимую части многочлена $f(x)$:

$$f(\alpha+i\beta) = u(\alpha,\beta) + i\nu(\alpha,\beta), \quad u = \operatorname{Re} f(x), \quad \nu = \operatorname{Im} f(x).$$

С помощью формул Коши – Римана [4] находим явное выражение для якобиана:

$$\frac{D(R_1,R_2)}{D(a,b)} = \beta^{-1}\left(\frac{\partial\nu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right)^2 + \beta^{-1}\left(\beta^{-1}\nu(\alpha,\beta) - \frac{\partial u(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right)^2.$$

Если $R_1=0$, $R_2=0$, находим

$$\frac{D(R_1, R_2)}{D(\alpha, \beta)} = \beta^{-1}\left(\left(\frac{\partial u(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right)^2\right) = \beta^{-1}(f'(\alpha + i\beta))^2.$$

Поскольку справедливы равенства

$$\frac{D(\alpha, \beta)}{D(a, b)} = -\frac{1}{4\beta}, \quad \frac{D(R_1, R_2)}{D(a, b)} = -\frac{1}{4}\beta^{-1}(f'(\alpha + i\beta))^2,$$

и для простых комплексных корней $\beta \neq 0$, $f'(\alpha + i\beta) \neq 0$, то предложенный численный способ пригоден для отыскания пары простых комплексно-сопряженных корней.

Рассмотрим также случай, когда $\beta \to 0$. Введя вспомогательную функцию $w(\alpha, \beta) = \beta^{-1}(v(\alpha, \beta))$, получим явное выражение для якобиана

$$\frac{D(R_1, R_2)}{D(a, b)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right)^2.$$

При $\beta \to 0$ имеем равенство

$$\frac{D(R_1, R_2)}{D(a, b)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u(\alpha, 0)}{\partial \alpha}\right)^2,$$

которое совпадает с (16), так как $v(\alpha, 0) = 0$.

1. *Курош В. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 435 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 516 с.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958. – 736 с.

Получено 03.08.98,
после доработки — 16.06.99