УДК 517.944+511

В. І. Бернік, В. В. Бересневіч (Ін-т математики НАН Білорусі, Мінськ),
П. Б. Василишин (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики, Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА З КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We establish conditions of the univalent solvability of multipoint (in time coordinate) problem with multiple knots for linear hyperbolic equations with constant coefficients in the class of functions periodic in spatial variable. We prove metric statements concerning lower bounds of small denominators which appear when constructing a solution of the problem.

Встановлено умови однозначної розв'язності багатоточкової (за часовою координатою) задачі з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в класі функцій, періодичних за просторовою змінною. Доведено метричні твердження, що стосуються оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

1. Задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними є, взагалі, умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Для випадку простих вузлів такі задачі вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 12]).

У даній статті, яка є розвитком роботи [3], досліджується багатоточкова задача з кратними вузлами для гіперболічних рівнянь n-го порядку $(n > 2)$ зі сталими коефіцієнтами в класі функцій, 2π-періодичних за просторовою змінною. Аналогічна задача для одного класу диференціально-операторних рівнянь вивчалась у роботі [13].

Будемо використовувати такі позначення: $\Omega^1_{2\pi}$ — одновимірний тор, тобто коло одиничного радіуса; $D^1 = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], x \in \Omega^1_{2\pi} \}$; Γ — простір тригонометричних многочленів

$$P_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} C_k \exp(ikx), \qquad x \in [0, 2\pi], \qquad m = 0, 1, \dots,$$

з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається таким чином: $\Gamma \supset P_n \underset{\Gamma}{\to} P$, якщо степені всіх поліномів $P_n(x)$ не перевищують деякого фіксованого числа N і при $n \to \infty$ $P_n(x) \to P(x)$; Γ' — простір всіх лінійних неперервних функціоналів над Γ зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [14]; $H_\alpha(\Omega^1_{2\pi})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір комплекснозначних 2π-періодичних функцій вигляду $y(x) = \sum_{|k| \geq 0} y_k \exp(ikx)$ з нормою

$$\|y(x)\|^2_{H_\alpha(\Omega^1_{2\pi})} = 2\pi \sum_{|k| \geq 0} \left(1 + k^2\right)^\alpha |y_k|^2;$$

$H^n_\alpha(D^1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — гільбертів простір функцій $h(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0, T]$ $\partial^s h/\partial t^s \in H_{\alpha-s}(\Omega^1_{2\pi})$, $s = 0, 1, \dots, n$, і

$$\|h(t, x)\|^2_{H^n_\alpha(\Omega^1_{2\pi})} = \int_0^T \sum_{s=0}^{n} \left\| \frac{\partial^s h(t, x)}{\partial t^s} \right\|^2_{H_{\alpha-s}(\Omega^1_{2\pi})} dt < \infty;$$

$C^n([0, T], \Gamma)(C^n([0, T], \Gamma'))$ — клас функцій $g(t, x)$ таких, що для довільного $t \in [0, T]$ $\partial^j g/\partial t^j \in \Gamma(\Gamma')$, $j = 0, 1, \dots, n$.

2. В області D^1 розглянемо задачу

$$L(u) \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^s \, \partial x^{n-s}} = 0, \qquad a_s \in \mathbb{R}, \quad a_n = 1, \tag{1}$$

$$N_{jm_j}(u) \equiv u^{(m_j-1)}(t_j, x) = \varphi_{jm_j}(x) \left(\begin{array}{c} m_j = 1,\ldots,r_j, \quad j = 1,\ldots,l, \\ \sum_{i=1}^{l} r_i = n, \ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_l \le T \end{array} \right), \tag{2}$$

де $2 \le r_j \le n-1$, $j = 1, \ldots, l$; рівняння (1) — строго гіперболічне за Петровським, тобто всі корені λ_j, $j = 1, \ldots, n$, рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^s = 0$$

є дійсними і різними. Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ і $\varphi_{jm_j}(x)$, $m_j = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, l$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ikx). \tag{3}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, визначається як розв'язок такої багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^{n-s} u_k^{(s)}(t) = 0, \tag{4}$$

$$u_k^{(m_j-1)}(t_j) = \varphi_{jm_j}(k), \ m_j = 1, \ldots, r_j, \ j = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

де $\varphi_{jm_j}(k) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_{jm_j}(x) \exp(-ikx) dx$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рівняння (4) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{km}(t) = \begin{cases} \exp(ik\lambda_m t), & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \\ t^{m-1}, & k = 0, \end{cases} \qquad m = 1, \ldots, n.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок задачі (4) (5) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{m=1}^{n} C_{km} u_{km}(t), \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

в якій коефіцієнти C_{km}, $m = 1, \ldots, n$, визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} u_{kq}^{(m_j-1)}(t_j) C_{kq} = \varphi_{jm_j}(k), \qquad m_j = 1, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{7}$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ визначник $\Delta'(k)$ системи (7) виражається формулами

$$\Delta'(k) = \begin{cases} \Delta(k)(ik)^r, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \\ \prod_{m=1}^{l} \left(\prod_{j=1}^{m-1} j! \right) \prod_{1 \le s < p \le l} (t_p - t_s), & k = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $r = (1/2)\sum_{j=1}^{l} r_j(r_j - 1)$, а $\Delta(k), k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, — визначник n-го порядку, який має вигляд

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \exp(ik\lambda_1 t_1) & \exp(ik\lambda_2 t_1) & \ldots & \exp(ik\lambda_n t_1) \\ \lambda_1 \exp(ik\lambda_1 t_1) & \lambda_2 \exp(ik\lambda_2 t_1) & \ldots & \lambda_n \exp(ik\lambda_n t_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_1^{r_1-1} \exp(ik\lambda_1 t_1) & \lambda_2^{r_1-1} \exp(ik\lambda_2 t_1) & \ldots & \lambda_n^{r_1-1} \exp(ik\lambda_n t_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \exp(ik\lambda_1 t_l) & \exp(ik\lambda_2 t_l) & \ldots & \exp(ik\lambda_n t_l) \\ \lambda_1 \exp(ik\lambda_1 t_l) & \lambda_2 \exp(ik\lambda_2 t_l) & \ldots & \lambda_n \exp(ik\lambda_n t_l) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_1^{r_l-1} \exp(ik\lambda_1 t_l) & \lambda_2^{r_l-1} \exp(ik\lambda_2 t_l) & \ldots & \lambda_n^{r_l-1} \exp(ik\lambda_n t_l) \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Нехай справджуються умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}) \qquad \Delta(k) \neq 0. \qquad (10)$$

Якщо $\varphi_{jm_j} \in \Gamma(\Gamma')$, $m_j = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, l$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^n([0, T], \Gamma)(C^n([0, T], \Gamma'))$.

Доведення проводиться за схемою доведення теорем 1 із [10] та 2 із [9] і базується на формулі, яка зображає формально розв'язок задачі (1), (2):

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0} \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{m_j=1}^{r_j} \frac{\Delta_{m_j q}^{j}(k)\ \varphi_{jm_j}(k)\ \exp[ik(x + \lambda_q t)]}{(ik)^{q-1}\ \Delta(k)}, \qquad (11)$$

де $u_0(t)$ — многочлен $(n-1)$-го степеня, $\Delta_{m_j q}^{j}(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента $\lambda_q^{m_j - 1} \exp(ik\lambda_q t_j)$ у визначнику $\Delta(k)$.

Зауважимо, що умови (10) є також необхідними умовами єдиності розв'язку задачі (1), (2) в класі $C^n([0, T], \Gamma')$ (див. [10]).

В інших випадках ряд (11), взагалі, розбіжний, оскільки відмінна від нуля величина $\Delta(k)$ може набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної множини значень $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (10) *і існує стала* $\xi > 0$ *така, що*

$$(\forall k \in \mathbb{Z},\ |k| > K > 0) \qquad |\Delta(k)| > |k|^{-\xi}. \qquad (12)$$

Якщо $\varphi_{jm_j} \in H_{\xi+\alpha}(\Omega_{2\pi}^1)$, $m_j = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, l$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $H_\alpha^n(D^1)$, *який неперервно залежить від функцій* φ_{jm_j}.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.4 із розділу 2 [7].

3. З'ясуємо, коли виконуються оцінки (12). Зобразимо $\Delta(k)$ у вигляді

$$\Delta(k) \equiv \Delta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k) = \sum_{q \in F} P_q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \exp\left(ik \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_{q_j}\right), \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \qquad (13)$$

де $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\hat{t} = (t_1, \ldots, t_l)$, F — множина векторів $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \in \mathbb{N}^n$, компоненти яких утворюють всілякі перестановки чисел $\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1}$, $\underbrace{2, \ldots, 2}_{r_2}$, … …, $\underbrace{l, \ldots, l}_{r_l}$ (кількість таких перестановок рівна $N = n!/(r_1! \ldots r_l!)$);

$$P_q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{s \in G_q} \delta_s \lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_n^{s_n}$$

— многочлени степеня r (див. (8)) без вільного члена, а G_q — множина векторів $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що l компонент кожного з них дорівнюють нулю, $q \in F$, δ_s дорівнює 1 або -1, $s_j \le \mu_0 - 1$, $j = 1, \ldots, n$, $\mu_0 = \max_{1 \le m \le l} \{r_m\}$, $|s| = r$, причому $s_{\alpha_1} = s_{\alpha_2} = \ldots = s_{\alpha_l} = 0$, якщо $q_{\alpha_m} \ne q_{\alpha_h}$, $1 \le m < h \le l$. Розглянемо всі похідні за змінними $t_1, \ldots, t_l$ виразу (13) до певного досить високого порядку

$$Q_\beta \equiv \frac{\partial^{|\beta|} \Delta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k)}{\partial t_1^{\beta_1} \ldots \partial t_l^{\beta_l}} = (ik)^{|\beta|} \sum_{q \in F} P_{\beta,q}(\hat{\lambda}) \exp\left(ik \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_{q_j} \right), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{14}$$

де $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{Z}_+^l$, $P_{\beta,q}(\hat{\lambda})$ — поліноми степеня $r + |\beta|$ з цілими коефіцієнтами. Серед похідних (14) виберемо N таким чином, щоб визначник N-го порядку $\delta(\hat{\lambda}) = \det \| P_{\beta,q}(\hat{\lambda}) \|_{\beta \in M, q \in F}$ не дорівнював тотожно нулеві, де M — множина мультиіндексів $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$, які відповідають вибраним похідним. Позначимо $b = \min_{\beta \in M} |\beta|$, $B = \max_{\beta \in M} |\beta|$. Припустимо, що для деякого $\gamma_1 \in \mathbb{R}$

$$\sup_{\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^n} \max_{\hat{t} \in [0, T]^l} |Q_\beta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k)| \le |k|^{\gamma_1}, \qquad \beta \in M.$$

Дана система нерівностей рівносильна системі рівнянь

$$Q_\beta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k) = \theta_\beta(\hat{\lambda}, \hat{t}) |k|^{\gamma_1}, \qquad \beta \in M, \tag{15}$$

де $|\theta_\beta(\hat{\lambda}, \hat{t})| \le 1$, $\beta \in M$. Система рівнянь (15) є лінійною алгебраїчною системою відносно змінних $\exp\left(ik \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_{q_j} \right) \equiv y_p$, $p = 1, \ldots, N$, кожна з яких за модулем дорівнює одиниці. Детермінант системи (15) зображається формулою

$$\Delta^*(\hat{\lambda}, k) = (ik)^{\gamma_2} \delta(\hat{\lambda}), \qquad \gamma_2 = \gamma_2(M, N), \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{16}$$

На основі леми 2.3 із розділу 1 [7] встановлюється, що для майже всіх $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ і для деякого $\gamma_3 = \gamma_3(M)$ справджуються нерівності

$$|\Delta^*(\hat{\lambda}, k)| > C_1(\hat{\lambda}) |k|^{\gamma_3}, \qquad C_1(\hat{\lambda}) > 0, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{17}$$

На основі формул Крамера із (15) отримуємо

$$1 = |y_p| = |\Delta_p^*(\hat{\lambda}, \hat{\theta}, k)| \, |\Delta^*(\hat{\lambda}, k)|^{-1}, \qquad p = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

де $\Delta_p^*(\hat{\lambda}, \hat{\theta}, k)$ — визначник, одержаний шляхом заміни у визначнику $\Delta^*(\hat{\lambda}, k)$ p-го стовпця стовпцем правих частин системи рівнянь (15), $\hat{\theta} = \{ \theta_\beta(\hat{\lambda}, \hat{t}), \beta \in \in M \}$. Із (15) і (16) одержуємо

$$|\Delta_p^*(\hat{\lambda}, \hat{\theta}, k)| \le C_2(\hat{\lambda}) |k|^{\gamma_1 + \gamma_2 - b}, \quad p = 1, \ldots, N, \; C_2(\hat{\lambda}) > 0, \; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{19}$$

Із оцінок (17) і (19) випливає, що для майже всіх $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ і для $|k| > K > 0$ при $\gamma_1 < b + \gamma_3 - \gamma_2$ рівності (18) суперечливі; тому можна вважати, що хоча б одна із частинних похідних порядку $|\overline{\beta}|$, $\overline{\beta} \in M$, задовольняє нерівність

$$\left| \frac{\partial^{|\overline{\beta}|} \Delta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k)}{\partial t_1^{\overline{\beta}_1} \ldots \partial t_l^{\overline{\beta}_l}} \right| > C_3 |k|^{b+\gamma_3-\gamma_2-\varepsilon/2}, \qquad C_3 > 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{20}$$

для майже всіх $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ і для всіх $\hat{t} \in [0, T]^l$.

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^l$) векторів $\hat{t} \in$ $\in [0, T]^l$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\hat{\lambda}$ нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq |k|^{-\gamma_4-\varepsilon}, \qquad \gamma_4 = B + \gamma_2 - \gamma_3 - b, \quad \varepsilon > 0, \tag{21}$$

справджується для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > K > 0$.

Доведення одержуємо із оцінки (20) на основі леми 2.3 із розділу 1 [7] та леми Бореля – Кантеллі [5].

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ і для довільних фіксованих $\hat{t} \in \mathbb{R}^l$ нерівність*

$$|\Delta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k)| \geq |k|^{-(\delta+\omega)-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{22}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) $k \in \mathbb{Z}$, де $\delta = \sum_{q=1}^{l-1} \sum_{s=q+1}^{l} r_s r_q$, $\omega = (1/2)\sum_{m=2}^{l} r_m (r_m - 1)$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4 із [16] (див. також [8, 11, 17]); при цьому визначник $\Delta(\hat{\lambda}, \hat{t}, k)$ оцінюється знизу на основі оцінок побудованих за цим визначником функцій $g_j(\hat{\lambda}, k)$, $j = 1, \ldots, \mu(l)$, $\mu(l) = 1 +$ $+ (r_l - 1)l + \sum_{m=2}^{l-1} m\, r_m$, та їх похідних за компонентами вектора $\hat{\lambda}$ з використанням леми 2 із [6] та леми Бореля – Кантеллі.

Лема. *Нехай $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ — неперервно диференційовне відображення, де $U \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина. Якщо $A \subset U$ має нульову міру Лебега, то $f(A)$ теж має нульову міру Лебега.*

Доведення базується на теоремі Сарда [18], згідно з якою критичні значення перетворення f утворюють множину міри нуль у просторі $\mathbb{R}^n$; тому критичні точки можна відкинути і вважати відображення f локальним дифеоморфізмом, для якого твердження леми очевидне (див., наприклад, лему 5 з [19, с. 146]).

Розглянемо рівняння

$$\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + a_1 \mu + a_0 = 0, \tag{23}$$

де $\hat{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, і позначимо через $\hat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ вектор, складений з коренів рівняння (23). Як відомо, відповідність між множиною векторів $\hat{a}$ і множиною векторів $\hat{\mu}$ є взаємно однозначною.

Теорема 5. *Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ — підмножина векторів $\hat{\mu}$ нульової міри Лебега. Тоді відповідна їй множина векторів $\hat{a}$ теж має нульову міру Лебега.*

Доведення випливає з леми та формул Вієта, які визначають коефіцієнти рівняння (23) як неперервно диференційовні в $\mathbb{R}^n$ функції коренів цього рівняння.

Із теорем 3–5 випливають такі твердження.

Наслідок 1. *Для майже всіх векторів* $\hat{t} \in \mathbb{R}^l$ *і для майже всіх векторів* $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$ *нерівність* (21) *справджується при* $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > K > 0$.

Наслідок 2. *Для майже всіх векторів* $\hat{a} \in \mathbb{R}^n$ *і для довільних фіксованих* $\hat{t} \in \mathbb{R}^l$ *нерівність* (22) *справедлива для всіх* (*крім скінченного числа*) $k \in \mathbb{Z}$.

1. *Березанский Ю. М.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363–372.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УССР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
4. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле–Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // Там же. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
5. *Пташник Б. Й.* Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Там же. Сер. А. – 1974. – **13**, № 4. – С. 1254–1257.
6. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. *Пташник Б. Й., Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Допов. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 20–23.
9. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66–79.
10. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Там же. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1236–1249.
11. *Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Там же. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468–1476.
12. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 44–53.
13. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Там же. – 1996. – **37**, № 2. – С. 251–258.
14. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
15. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
16. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студії. Пр. Львів. мат. тов-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.
17. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210–215.
18. *Sard A.* The measure of the critical values of differentiable maps // Bull. Amer. Math. Soc. – 1942. – **48**. – P. 883–890.
19. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Ч.2. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 353 с.

Одержано 02.01.98,
після доопрацювання – 12.03.99