УДК 519.41/47

С. А. Довженко (Брянск. пед. ун-т, Россия),
Н. С. Черников* (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИМАРНО СТУПЕНЧАТЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕФРАТТИНИЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

We describe primary graded groups (in particular, locally graded, RN-groups) with complementable non-Frattinian subgroups.

Наведено опис примарно ступінчастих груп (зокрема, локально ступінчастих, RN-груп) із доповнюваними нефраттінієвими підгрупами.

Напомним следующее определение.

Определение 1 [1]. *Группа G называется примарно ступенчатой, если в произвольной ее подгруппе, порожденной двумя сопряженными примарными элементами, любая отличная от единицы подгруппа конечного индекса содержит истинную подгруппу конечного индекса.*

Класс примарно ступенчатых групп весьма широк. Так, он включает в себя класс локально ступенчатых групп и вместе с ним все линейные группы, все классы групп Куроша – Черникова [2], классы локально разрешимых, радикальных (в смысле Б. И. Плоткина), локально конечных, финитно аппроксимируемых групп, бинарно конечных, бинарно разрешимых групп. Более того, класс примарно ступенчатых групп включает в себя класс бинарно ступенчатых групп, т. е. групп, в которых каждые два элемента порождают локально ступенчатую подгруппу. (Определение бинарно ступенчатой группы принадлежит Н. С. Черникову (см., например, [3]).)

В работе [4] полностью описаны конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, не лежащие в подгруппе Фраттини (такие подгруппы можно назвать нефраттиниевыми). В работах [5, 6] полностью описаны отличные от подгруппы Фраттини локально почти разрешимые (и вместе с этим локально конечные и локально разрешимые) группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 – 6.

Ниже для произвольной группы G $\Phi(G)$ и $J(G)$ — соответственно ее подгруппа Фраттини и пересечение всех ее подгрупп конечного индекса; если H — подгруппа группы G, то $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$. Все остальные обозначения стандартны.

Теорема 1. *Пусть для группы G выполняется следующее условие: если $G \neq \Phi(G) \supseteq J(G) \neq 1$, то найдутся конечные множества $M \subseteq G \setminus \Phi(G)$ и $K \subseteq J(G) \setminus 1$ элементов такие, что либо подгруппа $\langle K, M \rangle$ конечна, либо индекс $|\langle K, M \rangle : J(\langle K, M \rangle)|$ бесконечен. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — либо отличная от единицы вполне факторизуемая группа, либо циклическая p-группа порядка $> p$, либо группа порядка p^3 вида $G = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = |c| = p$, $c^b = ca$, $a^b = a$ (p — произвольное простое число).*

Напомним, что вполне факторизуемой называется группа, в которой дополняема каждая ее подгруппа [7]. Теорема Н. В. Черниковой [7, 8] дает полное конструктивное описание вполне факторизуемых групп.

* Выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462).

Теорема 2 [1]. *Пусть G — примарно ступенчатая группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из видов, указанных в теореме* 1.

Теорема 3. *Пусть G — бинарно ступенчатая (в частности, локально ступенчатая) группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из видов, указанных в теореме* 1.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает, например, следующее предложение.

Следствие 1. *Пусть G — бинарно разрешимая группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из видов, указанных в теореме* 1.

Теорема 4. *Пусть G — RN-группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из видов, указанных в теореме* 1.

Из теоремы 4 непосредственно вытекает, например, следующее предложение.

Следствие 2 [1]. *Пусть G — радикальная (в смысле Б. И. Плоткина) группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из видов, указанных в теореме* 1.

Теоремы 3 и 4 — частные случаи теоремы 2, выделенные ввиду их важности.

Теорема 5 [1]. *Пусть G — 2-группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — либо отличная от единицы элементарная абелева группа, либо циклическая группа порядка > 2, либо группа диэдра порядка* 8.

Ниже под линейной группой понимается группа, изоморфно представимая матрицами над некоторым полем.

Теорема 6. *Пусть G — группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$; группа G линейна и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — либо группа второго или третьего вида из теоремы* 1, *либо $G = A \leftthreetimes B$ и подгруппа $A \neq 1$ разложима в прямое произведение инвариантных в G подгрупп простых порядков, число которых по каждому $q \in \pi(A)$, за исключением, быть может, одного, конечно и ограничено некоторой константой, не зависящей от q, а подгруппа B конечна и разложима в прямое произведение подгрупп простых порядков. (В случае $G = A \leftthreetimes B$ группа G вполне факторизуема.)*

(В случае, когда в теореме 6 $B = 1$, число прямых подгрупп-множителей соответствующего ее разложения считается равным нулю.)

Доказательствам теорем 1, 2, 5 и 6 предпошлем леммы 1 и 2 и предложение.

Лемма 1. *Пусть G — конечная нильпотентная группа, K — ее подгруппа такая, что каждая подгруппа $H \supseteq K$ дополняема в G. Тогда найдется абелева подгруппа $T \trianglelefteq G$ с элементарными силовскими примарными подгруппами такая, что $|G:T| \mid |K|!$ и $K \cap T = 1$.*

Доказательство. Можно считать, что $G \neq 1$. В таком случае $Z(G) \neq 1$. Пусть M — подгруппа, порожденная всеми элементами простых порядков из

$Z(G)$. Очевидно, M вполне факторизуема и ее силовские примарные подгруппы элементарные абелевы. Пусть A — дополнение к $K \cap M$ в M и D — дополнение к KM в G, $T = (AD)_G$. Очевидно, $G = K(AD)$ и $K \cap AD = 1$, $Z(G) \cap D = 1$. Тогда $|G : AD| = |K|$. Значит, $|G : T| \mid |K|!$ (см., например, [2], теорема 12.2.2). Так как $A \subseteq T$ и $A \cap D = 1$, то ввиду леммы С. Н. Черникова (см., например, [9], лемма 1.8) $T = A \times (T \cap D)$. Поскольку $Z(G) \cap (T \cap \cap D)_G \subseteq Z(G) \cap D = 1$, то $(T \cap D)_G = 1$. Следовательно, ввиду теоремы Ремака T является подпрямым произведением групп, изоморфных $T / T \cap D$, и, значит, изоморфных A. Тогда, поскольку подгруппа A абелева с элементарными силовскими примарными подгруппами, то и T такая же. Лемма доказана.

Предложение. *Пусть G — группа, $G \neq \Phi(G)$, и в G дополняема произвольная подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Фактор-группа $G/\Phi(G)$ вполне факторизуема, и $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех $N \trianglelefteq G$, для которых G/N вполне факторизуема.*

2. *Для произвольной локально конечной подгруппы $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G нормализатор $N_G(H)$ локально конечен и $N_G(H) \cap J(G) = 1$ (в частности, $H \cap J(G) = 1$).*

3. *Для произвольного элемента $g \in G \setminus \Phi(G)$ $|g| < \infty$ и $\langle g \rangle \cap J(G) = 1$.*

4. *$\Phi(G)$ совпадает с пересечением некоторых нормальных делителей конечного индекса группы G; в частности, $J(G) \subseteq \Phi(G)$.*

5. *Если $|G/\Phi(G)| = p \in \mathbb{P}$, то $G/J(G)$ — циклическая p-группа, и для каждого $g \in G \setminus \Phi(G)$ $G = J(G) \rtimes \langle g \rangle$.*

6. *Если $J(G) \neq \Phi(G)$, то $G/J(G)$ — группа второго или третьего вида из теоремы 1; в первом случае $|G/\Phi(G)| = p \in \mathbb{P}$, во втором $G/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа порядка p^2.*

Доказательство. 1. Действительно, $G/\Phi(G)$ вполне факторизуема ввиду леммы 6 [6]. Далее, если G/N вполне факторизуема, то в силу леммы 3 [6] $\Phi(G/N) = 1$. Но согласно лемме 2 [6] $N\Phi(G)/N \subseteq \Phi(G/N)$ и, значит, $\Phi(G) \subseteq N$.

2. Действительно, каждая подгруппа из $N_G(H)$, содержащая H, дополняема в G и, значит, ввиду леммы С. Н. Черникова дополняема в $N_G(H)$. Поэтому, очевидно, каждая подгруппа фактор-группы $N_G(H)/H$ дополняема в ней. Следовательно, ввиду теоремы Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах [7, 8] $N_G(H)/H$ локально конечна. Тогда ввиду леммы О. Ю. Шмидта $N_G(H)$ локально конечен. Возьмем произвольные элементы $g \in N_G(H)$ и $a \in N_G(H) \setminus \Phi(G)$. Пусть D — дополнение к $\langle g, a \rangle$ в G. Тогда индекс $|G : D|$ конечен и, значит, $J(G) \subseteq D$. Следовательно, $\langle g \rangle \cap \cap J(G) = 1$. Поэтому ввиду произвольности g $N_G(H) \cap J(G) = 1$.

3. Действительно, $|g| < \infty$ ввиду леммы 7 [6], а потому в силу утверждения 2 настоящего предложения $\langle g \rangle \cap J(G) = 1$.

4. Возьмем произвольный элемент $g \in G \setminus \Phi(G)$. Ввиду утверждения 1 настоящего предложения подгруппа $\langle g \rangle \Phi(G)/\Phi(G)$ дополняема в $G/\Phi(G)$ с помощью некоторой подгруппы $D_g/\Phi(G)$. В силу утверждения 3 настоящего

предложения порядок элемента g конечен. Следовательно, индекс $|G : D_g|$ конечен. Поэтому ввиду теоремы Пуанкаре индекс в G подгрупп $(D_g)_G$ конечен. Нетрудно видеть, что $\Phi(G)$ совпадает с пересечением подгрупп $(D_g)_G$, взятых по всем $g \in G \setminus \Phi(G)$.

5. Пусть $|G/\Phi(G)| = p$. Возьмем произвольный нормальный делитель N конечного индекса группы G и произвольный элемент $g \in G \setminus \Phi(G)$. Пусть D — дополнение к $\langle g \rangle$ в G и $L = N \cap D_G$. Ввиду утверждения 3 настоящего предложения индекс $|G : D|$ конечен. Поэтому вследствие теоремы Пуанкаре индекс $|G : L|$ конечен. Тогда, очевидно, L содержится в максимальной подгруппе группы G. Следовательно, $L \subseteq \Phi(G)$. Понятно, что $\Phi(G/L) = \Phi(G)/L$. Таким образом, $|G/L : \Phi(G/L)| = p$ и, значит, конечная группа G/L имеет единственную максимальную подгруппу. Поэтому G/L — циклическая p-группа. Тогда поскольку $gL \notin \Phi(G/L)$, то $G/L = \langle g \rangle L/L$. Следовательно, $G = \langle g \rangle L$. Поэтому, с учетом того, что $L \subseteq D_G$ и $\langle g \rangle \cap D_G = 1$, $G = \langle g \rangle \leftthreetimes D_G$ и $L = D_G$. В таком случае $D_G \subseteq N$. Значит, ввиду произвольности N $J(G) = D_G$. Следовательно, $G = J(G) \rightthreetimes \langle g \rangle$. Утверждение доказано.

6. Пусть $J(G) \neq \Phi(G)$. Рассмотрим случай, когда $G/J(G)$ — циклическая p-группа. Так как $J(G) \subseteq \Phi(G)$ (см. утверждение 4), то, очевидно, $\Phi(G/J(G)) = \Phi(G)/J(G)$. Поэтому $|G : \Phi(G)| = |G/J(G) : \Phi(G)/J(G)| = |G/J(G) : \Phi(G/J(G))| = p$.

Пусть $G/J(G)$ не является примарной циклической группой. Так как $\Phi(G) \neq J(G)$, то ввиду утверждения 4 настоящего предложения найдется нормальный делитель N конечного индекса группы G, для которого $\Phi(G) \not\subseteq N$. Зафиксируем его.

Пусть M — произвольный нормальный делитель конечного индекса группы G и $L = N \cap M \cap \Phi(G)$. Ввиду теоремы Пуанкаре индекс $|\Phi(G) : L|$ конечен. Вследствие теоремы Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах и утверждения 1 настоящего предложения фактор-группа $G/\Phi(G)$ локально конечна. Следовательно, фактор-группа G/L, будучи расширением конечной группы с помощью локально конечной, локально конечна.

Поскольку, очевидно, $\Phi(G/L) = \Phi(G)/L$, то $\Phi(G/L) \neq G/L$, $\Phi(G/L) \neq 1$ и с учетом утверждения 5 $|G/L : \Phi(G/L)| \notin \mathbb{P}$. Далее, ввиду леммы 4 [6] каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G/L)$ группы G/L дополняема в ней. Следовательно, ввиду теоремы 1 [6] и леммы 3 [6] G/L — группа третьего вида из теоремы 1. Значит, $|\Phi(G/L)| = p \in \mathbb{P}$ и $(G/L) / \Phi(G/L)$ — элементарная абелева группа порядка p^2.

Так как $|\Phi(G/L)| = p$ и $N/L \not\supseteq \Phi(G)/L = \Phi(G/L)$, то $(N/L) \cap \Phi(G/L) = 1$. Следовательно, поскольку G/L — неабелева группа порядка p^3, то $N/L = 1$ и, значит, $N = L \subseteq M$. Поэтому ввиду произвольности M $N = J(G)$. Таким образом, $G/J(G)$ — группа третьего вида из теоремы 1. Предложение доказано.

Из предложения непосредственно вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ груупы G дополняема в ней, когда G — группа одного из трех видов, указанных в теореме* 1.

В связи со следствием 3 заметим, что ввиду теоремы Н. В. Черниковой произвольная вполне факторизуемая группа финитно аппроксимируема.

***Следствие* 4.** *Пусть группа $G \neq \Phi(G)$ с дополняемыми подгруппами $H \not\subseteq \Phi(G)$ содержит элемент $g \notin \Phi(G)$, который с каждым своим сопряженным порождает конечную подгруппу. Тогда G финитно аппроксимируема и является группой одного из трех видов, указанных в теореме* 1.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь элемент $a \in J(G)$. Ввиду утверждения 2 предложения $\langle g, g^a \rangle \cap J(G) = 1$. Поэтому, очевидно, $\langle g, g^a \rangle = \langle g \rangle$, т. е. $a \in N_G(\langle g \rangle)$. Следовательно, снова ввиду утверждения 2 $a = 1$. Таким образом, $J(G) = 1$ и, значит, настоящее следствие справедливо ввиду следствия 3.

Из следствия 4 вытекает такое следствие.

***Следствие* 5** [1]. *Пусть G — бинарно конечная группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G — группа одного из трех видов, указанных в теореме* 1.

Лемма 2. *Пусть G — 2-группа, $A \trianglelefteq G$ и $A \neq 1$, B — конечная подгруппа группы G и $A \cap B = 1$. Тогда $C_A(B) \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, пусть $C_A(B) = 1$, H — наибольшая среди подгрупп X группы B, для которых $C_A(X) \neq 1$, и $K \supset H$ — подгруппа группы B, для которой $|K : H| = 2$; g и a — инволюции соответственно из подгрупп K/H и $H N_A(H)/H$ фактор-группы $N_G(H)/H$. Тогда подгруппа $\langle g, a \rangle$ конечна, и $1 \neq \langle g, a \rangle \cap (H N_A(H)/H) \trianglelefteq \langle g, a \rangle$. Следовательно, подгруппа $L/H = Z(\langle g, a \rangle \cap (H N_A(H)/H)$ отлична от единицы. Очевидно, $L \subseteq N_G(K)$ и $L \cap A \neq 1$. Следовательно, $N_A(K) \neq 1$. Но $N_A(K) = C_A(K)$, поскольку $K \cap A = 1$. Противоречие. Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 5.** *Достаточность* очевидна. Докажем *необходимость*. Пусть $G \neq \Phi(G)$, и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней. Возьмем элемент $g \in G \setminus \Phi(G)$. В силу утверждений 2 и 3 предложения $C_G(\langle g \rangle) \cap J(G) = 1$. Следовательно, ввиду леммы 2 $J(G) = 1$. Поэтому ввиду следствия 3 G — группа одного из трех видов из теоремы 1. В случае, когда G — группа первого вида, она является элементарной абелевой в силу теоремы Н. В. Черниковой. При $p = 2$ группа третьего вида, как известно, есть группа диэдра. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** *Достаточность* с учетом того, что для вполне факторизуемой группы G $\Phi(G) = 1$ (см. [6], лемма 3), устанавливается так же, как в доказательстве теоремы [4]. *Необходимость* ввиду утверждений 1, 5, 6 предложения имеет место в случае, когда $J(G) = 1$. Покажем, что $J(G) = 1$. Пусть $J(G) \neq 1$.

1°. Ввиду утверждения 2 предложения подгруппа $\langle K, M \rangle$ бесконечна и, значит, индекс $|\langle K, M \rangle : J(\langle K, M \rangle)|$ бесконечен. Возьмем элемент $g \in \langle K, M \rangle \setminus \Phi(G)$. Ввиду утверждения 3 предложения его порядок конечен и $\langle g \rangle \cap J(G) = 1$. Пусть h — примарный элемент из $\langle g \rangle \setminus \Phi(G)$ и p — число, по которому он примарен. Зафиксируем h и p. Положим $F_1 = \langle K, M \rangle \cap J(G)$ и $F = F_0 = F_1 \langle h \rangle$. Ввиду утверждения 4 предложения $F_1 \subseteq \Phi(G)$. Вследствие утверждений 1, 5, 6 предложения и теоремы Н. В. Черниковой фактор-группа $G/J(G)$ локально конечна. Поэтому индекс $|\langle K, M \rangle : F_1|$ конечен. Следовательно, индекс $|F_1 : J(F_1)|$ бесконечен. Пусть при некотором $i > 1$ уже определена инвариантная в F подгруппа $F_{i-1} \subsetneq F_1$ конечного индекса. Тогда F_{i-1} содержит истинную подгруппу L конечного индекса. Ввиду теоремы Пуанкаре индекс $|F : L_F|$ конечен. Пусть теперь F_i / L_F — максимальная среди истинных подгрупп группы F_{i-1} / L_F, инвариантных в F / L_F. Тогда F_{i-1} / F_i — конечный главный фактор группы F. Подгруппа F_i конечнопорождена в силу теоремы Шрейера (см., например, [2], теорема 14.3.1). Итак, в F определен убывающий инвариантный ряд

$$F_0 = F \supset F_1 \supset \ldots \supset F_i \supset F_{i+1} \supset \ldots \supset F_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

конечнопорожденных подгрупп конечного индекса, каждый фактор которого главный (и, значит, будучи конечным, разлагается в прямое произведение изоморфных между собой простых групп).

Заметим, что произвольная подгруппа Y / F_i группы F / F_i дополняема в любой подгруппе $X / F_i \supseteq Y / F_i$ в случае, когда $Y \not\subseteq \Phi(G)$ (в частности, в случае, когда $h \in Y$). Действительно, в этом случае Y дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Ввиду леммы С. Н. Черникова $D \cap X$ дополняет Y в X. Поэтому, очевидно, $(D \cap X)F_i / F_i$ дополняет Y / F_i в X / F_i.

2°. Покажем, что при каждом i для произвольного $q \neq p$ силовская q-подгруппа Q группы F / F_i элементарная абелева.

Пусть $N = N_{F/F_i}(Q)$ и $R = \{a \mid a \in Z(Q),\ a^q = 1\}$. Очевидно, R элементарная абелева. Так как $Q \subseteq F_1 / F_i$, то ввиду леммы Фраттини $F / F_i = (F_1 / F_i)N$. Так как $(F / F_i) / (F_1 / F_i)$ ($\simeq F / F_1$) — циклическая p-группа, то для некоторой циклической p-подгруппы $L / F_i \subseteq N$ $F / F_i = (F_1 / F_i)(L / F_i)$. Следовательно, поскольку $F \not\subseteq \Phi(G)$ и $F_1 \subseteq \Phi(G)$, то $L \not\subseteq \Phi(G)$. Поэтому подгруппа $R(L / F_i)$ дополняема в группе $Q(L / F_i)$ с помощью некоторой подгруппы D. Очевидно, D дополняет R в Q, а потому $D \trianglelefteq Q$ и $D \cap Z(Q) = 1$. В силу этого $D = 1$ и, значит, $Q = R$.

3°. Покажем, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ при каждом $i > m$ силовская p-подгруппа группы F_m / F_i элементарная абелева.

Пусть P — силовская p-подгруппа группы F / F_i, содержащая $\langle h \rangle F_i / F_i$, A — элементарный абелев нормальный делитель максимального порядка группы P и $t_i = |P : A|$. Так как каждая подгруппа группы P, содержащая $\langle h \rangle F_i / F_i$, дополняема в P, то ввиду леммы 1 $t_i \le |h|!$. Возьмем $m \in \mathbb{N}$, для которого $t_m = \max(t_k \mid k \in \mathbb{N})$. Пусть $i > m$ и φ — гомоморфизм F / F_i на F / F_m. Тогда P^φ — силовская p-подгруппа группы F / F_m, $A^\varphi \trianglelefteq P^\varphi$, A^φ — элементарная абелева и $|P^\varphi : A^\varphi| \le t_i \le t_m$. Следовательно, $|P^\varphi : A^\varphi| = t_m = t_i = |P : A|$. Поэтому, очевидно, $P \cap (F_m / F_i) \subseteq A$. Следовательно, силовская p-подгруппа $P \cap (F_m / F_i)$ группы F_m / F_i элементарная абелева.

Зафиксируем число m.

4°. Покажем, что при каждом $i > m$ группа F_m / F_i разрешима.

Пусть это не так. Тогда для некоторого $i > m$ группа F_{i-1} / F_i неабелева.

Очевидно, она не содержит отличных от единицы разрешимых нормальных делителей. Пусть P — силовская p-подгруппа группы F/F_i, содержащая $\langle h\rangle F_i/F_i$, и D — дополнение к P в F/F_i, U — один из множителей разложения группы F_{i-1}/F_i в прямое произведение простых подгрупп; S — силовская 2-подгруппа группы F_{i-1}/F_i и N — нормализатор подгруппы S в группе $H/F_i = (F_{i-1}/F_i) \leftthreetimes (\langle h\rangle F_i/F_i)$. Так как $(|P|, |D|) = 1$ и U субнормальна в F/F_i, то ввиду леммы 2.13 [9] $U = (P\cap U)(D\cap U)$. В силу леммы Фраттини $H/F_i = (F_{i-1}/F_i)N$.

Покажем, что $p \nmid |U|$. В самом деле, пусть $p \mid |U|$. Тогда, учитывая, что силовская 2-подгруппа группы U абелева (см. пп. 2° и 3° доказательства), и используя теорему Дж. Уолтера [10], классифицирующую конечные простые группы с абелевой силовской 2-подгруппой, теорему Н. Ито [11], описывающую все факторизации с двумя подгруппами-множителями группы $\mathrm{PSL}_2(q^n)$ при произвольных $q \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$, и результаты [12], в соответствии с которыми (конечные простые) группы J_a и типа Ри не имеют нетривиальных факторизаций с двумя множителями, хотя бы один из которых примарный, убеждаемся в том, что $D\cap U$ совпадает с нормализатором в группе U ее силовской 2-подгруппы и $|U : D\cap U| = p \neq 2$. Отсюда вытекает, что $|(H/F_i) : N|$ — степень p и для холловой $2'$-подгруппы T/F_i группы N, существующей ввиду теоремы И. Шура (см., например, [2], теорема 20.2.6), $N = S(T/F_i)$ и $H/F_i = (F_{i-1}/F_i)(T/F_i)$. Тогда поскольку $H \not\subseteq \Phi(G)$ и $F_{i-1} \subseteq \Phi(G)$, то $T \not\subseteq \Phi(G)$. Следовательно, T/F_i дополняема в H/F_i с помощью некоторой подгруппы W. Последняя, будучи бипримарной ($\{2, p\}$-) группой, ввиду теоремы Бернсайда разрешима. Так как $H/F_i = WN$, $S \trianglelefteq N$ и, очевидно, $S \subseteq W$, то ввиду леммы С. А. Чунихина (см., например, [9], лемма 1.36) $\langle S^{H/F_i}\rangle \subseteq W$ и, значит, подгруппа $\langle S^{H/F_i}\rangle \trianglelefteq F_{i-1}/F_i$ разрешима. Противоречие.

Итак, $p \nmid |F_{i-1}/F_i|$. Используя лемму Фратини, легко убедиться в том, что для произвольного простого $q \mid |F_{i-1}/F_i|$ в F_{i-1}/F_i найдется силовская q-подгруппа Q, нормализуемая $\langle h\rangle F_i/F_i$. Очевидно, дополнение к $Q(\langle h\rangle F_i/F_i)$ в H/F_i является дополнением к Q в F_{i-1}/F_i. Таким образом, для произвольного $q \mid |F_{i-1}/F_i|$ силовская q-подгруппа группы F_{i-1}/F_i дополняема в ней. Поэтому F_{i-1}/F_i разрешима в силу теоремы Ф. Холла (см., например, [13], гл. VI, предложение 1.10). Противоречие.

Напомним, что по теореме Г. Цассенхауза при произвольном $n \in \mathbb{N}$ ступени разрешимости групп матриц степеней $\leq n$ над полями ограничены в совокупности (см., например, [14], теорема 3.7). Максимум этих ступеней обозначим через $\zeta(n)$.

Для произвольной разрешимой группы X через $d(X)$ обозначим ступень ее разрешимости.

5°. Пусть X и $Y \subset X$ — произвольные нормальные делители группы F, содержащиеся в F_1, для которых X/Y — конечная разрешимая p'-группа с элементарными абелевыми примарными подгруппами.

Покажем, что $d(X/Y) \leq \zeta(l) + 1$ для $l = |h|$. Пусть $H = (X/Y) \leftthreetimes$

$\leftthreetimes (\langle h\rangle Y/Y)$, R — подгруппа Фиттинга группы X/Y. Вследствие теоремы Машке R разлагается в прямое произведение некоторых элементарных абелевых минимальных нормальных делителей U группы H. Так как X/Y разрешима, то $R = C_{X/Y}(R)$ (см., например, [13], гл. III, предложение 4.2), и потому R совпадает с пересечением централизаторов $C_{X/Y}(U)$, взятых по всем U. Зафиксируем произвольный U. Пусть q — число, по которому примарен U, L — какая-нибудь максимальная среди истинных подгрупп U, инвариантных относительно $\langle h\rangle Y/Y$. Легко видеть, что $|U:L| \le q^l$. Далее, подгруппа $L(\langle h\rangle Y/Y)$ дополняема в H с помощью некоторой подгруппы D. Очевидно, D дополняет L в X/Y. Поэтому, как легко видеть, $D\cap U$ дополняет L в U, в силу чего $D\cap U \trianglelefteq X/Y$. Тогда для произвольного $g\in H$ $(D\cap U)^g \trianglelefteq X/Y$. Так как $|D\cap U| = |U:L| \le q^l$, то $(X/Y)/C_{X/Y}((D\cap U)^g)$ естественным образом вкладывается в группу $\mathrm{GL}_l(q)$. Следовательно, ввиду отмеченной теоремы Цассенхауза $d((X/Y))/C_{X/Y}((D\cap U)^g) \le \zeta(l)$. Так как U — минимальный нормальный делитель группы H, то $U = \langle (D\cap U)^g \mid g\in H\rangle$ и, значит, $C_{X/Y}(U) = \bigcap_{g\in H} C_{X/Y}((D\cap U)^g)$. Поэтому $d((X/Y)/C_{X/Y}(U)) \le \zeta(l)$, в силу чего $d((X/Y)/R) \le \zeta(l)$. Следовательно, $d(X/Y) \le \zeta(l)+1$.

6°. Покажем, что фактор-группа F_m/F_ω разрешима (ступени $\le 2\zeta(l)+3$). Так как группа F_m/F_i, $i\ge m$, разрешима (см. п. 4° доказательства) и ее силовская p-подгруппа абелева (см. п. 3°), то ввиду теоремы Ф. Холла – Хигмена (см., например, [13], гл. VI, предложение 6.6) F_m имеет ряд $F_m \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq$ $\supseteq F_i$ характеристических подгрупп с абелевым p-фактором N_1/N_2 и p'-факторами F_m/N_1 и N_2/F_i. Примарные подгруппы последних абелевы (см. п. 2°), и потому $d(F_m/N_1) \le \zeta(l)+1$, $d(N_2/F_i) \le \zeta(l)+1$ (см. п. 5°). Следовательно, $d(F_m/F_i) \le 2\zeta(l)+3$ и, значит, ввиду произвольности i F_m/F_ω разрешима (с $d(F_m/F_\omega) \le 2\zeta(l)+3$).

Перейдем к заключительному этапу доказательства.

7°. Пусть B — наименьший член производного ряда группы F_m/F_ω, имеющий в ней конечный индекс, C — следующий за ним член этого ряда и T/C — подгруппа, состоящая из всех элементов конечных порядков группы B/C. Так как F_m/F_ω конечнопорождена, то ввиду теоремы О. Шрейера подгруппа B и вместе с тем фактор-группа B/C конечнопорождены. Тогда поскольку B/C бесконечна и абелева, то $B/C \ne T/C$. Следовательно, B/T — отличная от единицы конечнопорожденная абелева группа без кручения. Но в группе $(B/T)\leftthreetimes(\langle h\rangle T/T)$ дополняема каждая подгруппа, содержащая $\langle h\rangle T/T$, и, значит, ввиду леммы 8 [6] $B/T = 1$. Полученное противоречие показывает, что $J(G)=1$. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** *Необходимость.* Пусть $G\ne\Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней. Возьмем любой элемент $g\in G\setminus\Phi(G)$. Ввиду утверждения 3 предложения g имеет конечный порядок. Пусть h — какой-нибудь примарный элемент из $\langle g\rangle\setminus\Phi(G)$. Положим $M=\langle h\rangle$. Далее, в предположении, что $\Phi(G)\supseteq J(G)\ne 1$, возьмем произвольный элемент $a\in J(G)\setminus 1$. Если $a\in C_G(\langle h\rangle)$, то положим $K=\{a\}$, а если $a\notin C_G(\langle h\rangle)$, то в качестве K возьмем произвольное конечное множество образующих подгруппы $\langle h, h^a \rangle \cap J(G)$. Тогда в первом случае $\langle K, M \rangle = \langle h \rangle \times \langle a \rangle$, а во втором — $\langle K, M \rangle = \langle h, h^a \rangle$. Очевидно, бесконечность подгруппы $\langle K, M \rangle$ влечет бесконечность индекса $|\langle K, M \rangle : J(\langle K, M \rangle)|$. Следовательно, необходимость справедлива ввиду теоремы 1.

Достаточность справедлива ввиду теоремы 1.

***Доказательство теоремы* 6.** *Необходимость.* Ввиду теоремы А. И. Мальцева (см., например, [14], теорема 4.2) произвольная конечнопорожденная подгруппа группы G финитно аппроксимируема. Поэтому вследствие теоремы 1 G — группа одного из трех ее видов. Пусть G является группой первого вида. Тогда ввиду теоремы Н. В. Черниковой она локально сверхразрешима. Следовательно, в силу теоремы 11.21 [14] G содержит инвариантную локально нильпотентную подгруппу H, фактор-группа G/H по которой конечна и абелева. Пусть D — дополнение к H в G. Тогда $G = H \rtimes D$. В случае, когда $H \neq 1$, положим $A = H$ и $B = D$, а в случае $H = 1$ — $A = G$ и $B = 1$. Ввиду теоремы Н. В. Черниковой и критерия А. И. Мальцева изоморфной представимости абелевой группы матрицами над полем (см., например, [14], теорема 2.2) A и B удовлетворяют требуемым условиям.

Достаточность. Если G — группа второго или третьего вида из теоремы 1, то в силу этой теоремы $\Phi(G) \neq 1$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней. Пусть $G = A \rtimes B$. Тогда ввиду теоремы Н. В. Черниковой группа G вполне факторизуема. Поэтому согласно лемме 3 [6] $\Phi(G) = 1$. Далее, ввиду отмеченного критерия А. И. Мальцева A линейна (в указанном смысле), а потому вследствие конечности индекса $|G : A|$ и G линейна (А. И. Мальцев (см., например, [14], лемма 2.3)). Теорема доказана.

Из теоремы 6 вытекает следующее предложение.

***Следствие* 6** [15]. *Группа G является линейной вполне факторизуемой тогда и только тогда, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = B \ltimes A$ конечной подгруппы B, разложимой в прямое произведение подгрупп простых порядков, и подгруппы A, разложимой в прямое произведение инвариантных в G подгрупп простых порядков, число которых по каждому $p \in \pi(A)$, за исключением, быть может, одного, конечно и ограничено некоторой константой, не зависящей от p.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G линейная вполне факторизуемая. Можно считать, что $G \neq 1$. Тогда в силу леммы 3 [6] $G \neq \Phi(G)$ и, значит, необходимость имеет место ввиду теоремы 6.

Достаточность. Действительно, группа $G = B \ltimes A$ линейна и вполне факторизуема ввиду теоремы 6 и теоремы Н. В. Черниковой [7, 8] о вполне факторизуемых группах.

1. *Довженко С. А., Черников Н. С.* Группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ: Тез. докл. (Москва, 10–12 февраля 1999 г.). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – С. 23.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
3. *Черников Н. С., Малаповка Г. А.* Одно условие дополняемости в группах // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 10. – С. 1417–1425.
4. *Довженко С. А.* К теореме Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах // Там же. – 1999. – 51, № 6. – С. 854–855.
5. *Довженко С. А.* Локально почти разрешимые группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами // Вторая международная алгебраическая конференция в Украине, посвященная памяти профессора Л. А. Калужнина: Тез. докл. (Киев; Винница, 9–16 мая 1999 г.). – Винница: Пед. ун-т, 1999. – С. 73.

6. *Довженко С. А.* Локально конечные и локально почти разрешимые группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами // Вопросы алгебры (Гомель). – 1999. – **15**. – С. 84–89.
7. *Черникова (Баева) Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877–880.
8. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 3. – С. 273–292.
9. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
10. *Walter J. H.* The characterization of finite groups with Abelian Sylow 2-subgroups // Ann. Math. – 1969. – **89**, № 3. – P. 405–514.
11. *Itô N.* On the factorizations of the linear fractional group $LP(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. Szeged. – 1953. – **15**, № 1. – P. 79–84.
12. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1978. – С. 50–63.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
14. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin etc.: Springer, 1973. – 229 p.
15. *Черников Н. С., Никитин В. В.* О двух классах линейных неабелевых групп // Проблемы алгебры и кибернетики: Материалы междунар. конф. памяти акад. С. А. Чунихина. Ч. I. Алгебра и теория чисел: Тез. докл. (Гомель, 10–15 сент. 1995 г.). – Гомель: Гомел. ун-т, 1995. – С. 19–21.

Получено 01.06.99