УДК 517.9

Н. А. Качановский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПЕРАТОР ОБОБЩЕННОГО СДВИГА В НЕГАУССОВОМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ АНАЛИЗЕ

Pseudodifferential equations of the form $\nu(D_\chi)y = f$ (where ν is a function holomorphic at zero and D_χ is a pseudodifferential operator) are studied on spaces of test functions of non-Gaussian infinite-dimensional analysis. The results obtained are applied to construct a generalized translation operator $T_y^\chi = \chi(\langle y, D_\chi\rangle)$ on the already mentioned spaces and to study its properties. In particular, the associativity, the commutativity, and another properties of T_y^χ are proved which are analogs of the classical properties of generalized translation operator.

Вивчаються псевдодиференціальні рівняння вигляду $\nu(D_\chi)y = f$ (де ν — голоморфна у нулі функція, D_χ — псевдодиференціальний оператор) на просторах основних функцій негауссівського нескінченновимірного аналізу. Отримані результати застосовуються для побудови оператора узагальненого зсуву $T_y^\chi = \chi(\langle y, D_\chi\rangle)$ на вказаних просторах та вивчення його властивостей. Зокрема, доведено асоціативність, комутативність та інші властивості T_y^χ, що є аналогами класичних властивостей оператора узагальненого зсуву.

В настоящее время негауссовский бесконечномерный анализ активно разрабатывается и обобщается многими авторами (см., например, [1 – 11]). Наиболее широкие обобщения, полученные в работах Ю. М. Березанского и Ю. Г. Кондратьева [2, 6], Ю. М. Березанского [7, 10], основаны на замене экспоненты в производящей функции полиномов Эрмита некоторой целой функцией, а обычного сдвига — обобщенным. В работе [12] решается обратная задача: по известным характерам Аппеля или Дельсарта (аналогам полиномов Эрмита, см. [2, 6, 7, 10, 12]) восстанавливается оператор обобщенного сдвига. Подобные построения можно провести и в случае, когда вместо полиномов Эрмита используются обобщенные квазиаппелевы полиномы с производящей функцией $\gamma(\theta)\chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle)$ [8], где $\chi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, γ и α — голоморфные в нуле функции на комплексификации $N_\mathbb{C}$ некоторого вещественного ядерного пространства N. Именно, оператор обобщенного сдвига — это оператор $T_y^\chi = \chi(\langle y, D_\chi\rangle)$, где D_χ — псевдодифференциальный оператор, связанный с упомянутой выше функцией χ. Таким образом, базой для построения обобщенного сдвига являются псевдодифференциальные уравнения вида $\nu(D_\chi)y = f$, где ν — голоморфная в $0 \in N_\mathbb{C}$ функция. Отметим, что такие уравнения изучались (безотносительно к обобщенному сдвигу) в одномерном случае в [13] (по поводу бесконечномерных обобщений см. [8, 9, 11]).

Целью настоящей статьи является изучение псевдодифференциальных уравнений вида $\nu(D_\chi)y = f$ для функций бесконечного количества переменных, а также построение и изучение с помощью указанных уравнений оператора обобщенного сдвига T_y^χ на пространствах основных функций негауссовского бесконечномерного анализа. (При этом функция $\chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle)$ является характером для этого сдвига: $T_y^\chi \chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle) = \chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle)\chi(\langle y, \alpha(\theta)\rangle)$.) В частности, доказано, что введенный оператор T_y^χ имеет ассоциативность, коммутативность и другие классические свойства обобщенного сдвига. Результаты статьи можно условно разделить на две части. Первая представляет собой обобщение на бесконечномерный случай соответствующих результатов [13] в более общей, чем в [8, 9, 11], постановке. Во второй конкретизированы исследования [12] в случае анализа на пространствах, порожденных обобщенными квазиаппелевыми полиномами, а не абстрактными характерами Аппеля или Дельсарта, т. е. в качестве характера $\chi(x;\theta)$ фигурирует $\chi(\langle x,\alpha(\theta)\rangle)$. Отметим, однако, что представленные здесь результаты не являются частным случаем [12], поскольку построенный оператор T_y^{χ} отличается от обобщенного сдвига в [12] (действует на других пространствах), а производящая функция обобщенных квазиаппелевых полиномов не является частным случаем производящей функции характеров Аппеля или Дельсарта (в частности, из-за наличия параметра α). В целом, статья продолжает исследования автора, опубликованные в [8].

1. Пусть $\mathcal{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, N — сепарабельное ядерное пространство Фреше, плотно и непрерывно вложенное в $\mathcal{H}$, N' — пространство, сопряженное к N относительно $\mathcal{H}$. Тогда (в силу ядерности) $N = \operatorname{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_p$, $N' = \operatorname{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{-p}$, где $\mathcal{H}_p$, $p\in\mathbb{Z}$, — некоторые гильбертовы пространства (которые можно выбрать, разумеется, не единственным образом; мы будем считать, что такой выбор сделан и зафиксирован), $\mathcal{H}_{p+1}$ вложено в $\mathcal{H}_p$ оператором типа Гильберта – Шмидта для каждого $p\in\mathbb{Z}$, $\mathcal{H}_{-p}$ — негативные пространства цепочек $\mathcal{H}_{-p}\supseteq\mathcal{H}\supseteq\mathcal{H}_p$. Обозначим через $|\cdot|_p$ норму в $\mathcal{H}_p$, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — спаривание между элементами N' и N, $\mathcal{H}_{-p}$ и $\mathcal{H}_p$, задаваемое расширением скалярного произведения в $\mathcal{H}$, и сохраним эти обозначения для тензорных степеней пространств и комплексификаций.

Пусть $N_{\mathbb{C}}$ — комплексификация N. Обозначим через $\mathrm{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$ алгебру ростков голоморфных в нуле функций $\gamma\colon N_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$, через $\mathrm{Hol}_0(N_{\mathbb{C}},N_{\mathbb{C}})$ — алгебру ростков голоморфных в нуле функций $\alpha\colon N_{\mathbb{C}}\to N_{\mathbb{C}}$.

Пусть $\chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi_n}{n!}u^n$, $u\in\mathbb{C}$, — целая функция такая, что $\chi(0)=1$, $\chi_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{Z}_+$. Рассмотрим функцию $\gamma(\theta)\chi(\langle z,\alpha(\theta)\rangle)$, $\theta\in N_{\mathbb{C}}$, $z\in N'_{\mathbb{C}}$, где $\gamma\in\mathrm{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$, $\gamma(0)\neq 0$; $\alpha\in\mathrm{Hol}_0(N_{\mathbb{C}},N_{\mathbb{C}})$ $\alpha(0)=0$ и обратима. Раскладывая ее в в ряд Тейлора по θ, с помощью теоремы о ядре получаем следующее представление:

$$\gamma(\theta)\chi(\langle z,\alpha(\theta)\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle P_n^{\gamma,\alpha}(z),\theta^{\otimes n}\rangle, \quad P_n^{\gamma,\alpha}(z)\in N_{\mathbb{C}}^{\prime\hat{\otimes} n},$$

где $\hat{\otimes}$ обозначает симметрическое тензорное произведение.

Определение 1. *Назовем системой (бесконечномерных) обобщенных квазиаппелевых полиномов* $P^{\gamma,\alpha} := \{\langle P_n^{\gamma,\alpha},\varphi^{(n)}\rangle\colon \varphi^{(n)}\in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},\ n\in\mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\mathcal{P}(N')$ — множество всех непрерывных полиномов на N'. Для $p,q\in\mathbb{Z}_+$ и $\beta\in[0,1]$ определим пространство основных функций $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\alpha}$ как замыкание $\mathcal{P}(N')$ по соответствующей норме:

$$(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\alpha} = \Big\{\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma,\alpha}(x),\varphi^{(n)}\rangle\colon$$

$$\|\varphi\|^2_{p,q,\beta,\gamma,\alpha} := \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta}2^{qn}|\varphi^{(n)}|_p^2 < \infty\Big\}.$$

Положим

$$(N)^{\beta}_{\gamma,\alpha} := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\alpha}.$$

Свойства системы полиномов $P^{\gamma,\alpha}$ и пространств $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\alpha}$, $(N)^{\beta}_{\gamma,\alpha}$ при $\beta = 1$ изучены в [8].

Замечание 1. Ядра $P^{\gamma,\alpha}_n$, как введенные пространства и норма $\|\cdot\|_{p,q,\beta,\gamma,\alpha}$, зависят, конечно, от функции χ. Однако мы не будем подчеркивать эту зависимость соответствующим индексом для упрощения обозначений.

2. Пусть $\nu \in \operatorname{Hol}_0(N_{\mathbb{C}})$. Определим на $\mathcal{P}(N')$ псевдодифференциальный оператор $\nu(D_\chi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \nu_n, D_\chi^{\otimes n}\rangle$, где $\nu_n \in N_{\mathbb{C}}'^{\hat{\otimes} n}$ из разложения $\nu(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \nu_n, \theta^{\otimes n}\rangle$, полагая на мономах

$$\langle \nu_n, D_\chi^{\otimes n}\rangle\langle x^{\otimes m}, \varphi^{(m)}\rangle := 1_{\{m\ge n\}} \frac{m!\,\chi_{m-n}}{(m-n)!\,\chi_m} \langle x^{\otimes(m-n)} \hat{\otimes} \nu_n, \varphi^{(m)}\rangle,$$

$$\varphi^{(m)} \in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}, \quad x \in N',$$

и продолжая по линейности (здесь $1_{\{m\ge n\}}$ — индикатор $\{m \ge n\}$).

Лемма 1. *Оператор $\nu(D_\chi)$ можно продолжить до линейного непрерывного оператора, действующего из $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ в $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\nu\gamma,\mathrm{id}}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$. При этом если $\varphi \in (\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ записана в виде*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle P^{\gamma,\mathrm{id}}_m(x), \varphi^{(m)}\rangle, \quad \varphi^{(m)} \in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}, \tag{1}$$

то

$$(\nu(D_\chi)\varphi)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle P^{\nu\gamma,\mathrm{id}}_m(x), \varphi^{(m)}\rangle, \tag{2}$$

т. е. действие оператора $\nu(D_\chi)$ сводится к замене ядер $P^{\gamma,\mathrm{id}}_m$ на $P^{\nu\gamma,\mathrm{id}}_m$ (мы сохраняем для продолжения $\nu(D_\chi)$ на $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ прежнее обозначение).

Доказательство. Пусть $\varphi \in (\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ и записана в виде (1). Тогда $\|\varphi\|^2_{p,q,\beta,\gamma,\mathrm{id}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\beta} 2^{qn} |\varphi^{(n)}|_p^2 < \infty$. Положим $\varphi_M(\cdot) := \sum_{m=0}^{M} \langle P^{\chi,\gamma,\mathrm{id}}_m(\cdot), \varphi^{(m)}\rangle \in \mathcal{P}(N')$. Ясно, что $\varphi_M \xrightarrow[M\to\infty]{} \varphi$ в топологии $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$.

Вычислим $(\nu(D_\chi)\varphi_M)(x)$, $x \in N'$. В [8] доказано, что

$$\langle \nu_n, D_\chi^{\otimes n}\rangle\langle P^{\gamma,\mathrm{id}}_m(x), \varphi^{(m)}\rangle = 1_{\{m\ge n\}} \frac{m!}{(m-n)!} \langle P^{\gamma,\mathrm{id}}_{m-n}(x) \hat{\otimes} \nu_n, \varphi^{(m)}\rangle.$$

Кроме того, там же установлена формула

$$P^{\nu\gamma,\alpha}_m(x) = \sum_{n=0}^{m} C^n_m P^{\gamma,\alpha}_{m-n}(x) \hat{\otimes} \nu_n. \tag{3}$$

Используя эти соотношения, имеем

$$(\nu(D_\chi)\varphi_M)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle \nu_n, D_\chi^{\otimes n}\rangle \sum_{m=0}^{M}\langle P_m^{\gamma,\mathrm{id}}(x), \varphi^{(m)}\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{M}\frac{m!}{(m-n)!}\langle P_{m-n}^{\gamma,\mathrm{id}}(x)\hat{\otimes}\nu_n, \varphi^{(m)}\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{M}\left\langle \sum_{n=0}^{m} C_m^n P_{m-n}^{\gamma,\mathrm{id}}(x)\hat{\otimes}\nu_n, \varphi^{(m)}\right\rangle = \sum_{m=0}^{M}\langle P_m^{\nu\gamma,\mathrm{id}}(x), \varphi^{(m)}\rangle =: \tilde{\varphi}_M(x).$$

Отсюда видно, что существует $\tilde{\varphi} \in (\mathcal{H}_p)^\beta_{q,\nu\gamma,\mathrm{id}}$ такое, что $\tilde{\varphi}_M \xrightarrow[M\to\infty]{} \tilde{\varphi}$ в топологии $(\mathcal{H}_p)^\beta_{q,\nu\gamma,\mathrm{id}}$, причем $\|\tilde{\varphi}\|_{p,q,\beta,\nu\gamma,\mathrm{id}} = \|\varphi\|_{p,q,\beta,\gamma,\mathrm{id}}$. Положим $(\nu(D_\chi)\varphi)(x) := \tilde{\varphi}(x)$. Ясно, что в этом случае $\nu(D_\chi) \in \in \mathcal{L}\left((\mathcal{H}_p)^\beta_{q,\gamma,\mathrm{id}}, (\mathcal{H}_p)^\beta_{q,\nu\gamma,\mathrm{id}}\right)$ и $(\nu(D_\chi)\varphi)(x)$ имеет вид (2) (здесь $\mathcal{L}(X, Y)$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из линейного топологического пространства X в линейное топологическое пространство Y). Лемма доказана.

Пусть $\nu(0) \neq 0$. Обозначим $\tilde{\nu}(\theta) := 1/\nu(\theta)$. Ясно, что $\tilde{\nu} \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbb{C})$, поэтому можно рассматривать оператор $\tilde{\nu}(D_\chi)$. Из леммы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. При $\nu(0) \neq 0$ *оператор* $\nu(D_\chi)$ *обратим, причем* $\nu(D_\chi)^{-1} = \tilde{\nu}(D_\chi)$.

***Замечание* 2.** Аналогичные результаты справедливы и для пространств $(\mathcal{H}_p)^\beta_{q,\gamma,\alpha}$, если вместо оператора $\nu(D_\chi)$ использовать $\nu(\alpha^{-1}(D_\chi))$, где последний оператор строится аналогично $\nu(D_\chi)$ по функции $\nu'(\theta) := := \nu(\alpha^{-1}(\theta))$.

3. Одно из классических применений обобщенных квазиаппелевых полиномов состоит в решении дифференциальных уравнений специального вида [13] (§ 20). Именно, пусть $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная в $0 \in \mathbb{C}$ функция, $\eta(0) \neq \neq 0$, $\chi = \exp$. Рассмотрим дифференциальное уравнение бесконечного, вообще говоря, порядка

$$\eta(D)y(u) = f(u), \tag{4}$$

где $u \in \mathbb{C}$, D — оператор дифференцирования. Для его решения можно применить следующий метод: $f(u)$ раскладывается в ряд $f(u) = = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{\eta,\mathrm{id}}(u)$, где $P_n^{\eta,\mathrm{id}}(u)$ — обобщенные полиномы Аппеля с производящей функцией $\eta(\theta)e^{u\theta}$, $\theta \in \mathbb{C}$. Тогда решение (4) имеет вид $y(u) = = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^n$. Аналогичный результат справедлив и при $\alpha \neq \mathrm{id}$ для уравнения

$$\eta(\alpha^{-1}(D))y(u) = f(u).$$

Изучим бесконечномерный аналог этого метода. Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение

$$\nu(D_\chi)y = f, \tag{5}$$

где $\nu \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbb{C})$, $\nu(0) \neq 0$.

Следующее утверждение обобщает доказанный в [8] результат на случай $\beta \neq 1$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in (\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$, $\beta \in [0,1]$. *Тогда уравнение* (5) *корректно разрешимо, причем если*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\gamma,\mathrm{id}}, f_n \rangle, \quad f_n \in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},$$

то решение имеет вид

$$y(\cdot) = (\tilde{\nu}(D_\chi)f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\tilde{\nu}\gamma,\mathrm{id}}(\cdot), f_n \rangle \in (\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\tilde{\nu}\gamma,\mathrm{id}},$$

где $\tilde{\nu}(\theta) = 1/\nu(\theta)$.

Если дополнительно p *и* q *таковы, что существует* $p_0 \in \mathbb{N}$, $p_0 < p$ *такое, что* $\| i_{p,p_0} \|_{HS} < \infty$ *и* $\frac{e}{\rho} \| i_{p,p_0} \|_{HS} < 2^{q/2}$, *где* i_{p,p_0} *— оператор вложения* $\mathcal{H}_p$ *в* $\mathcal{H}_{p_0}$, $\| \cdot \|_{HS}$ *— норма Гильберта–Шмидта,* ρ *таково, что* $\sup_{|\theta|_{p_0} = \rho} |\nu(\theta)| < \infty$ *и* $\sup_{|\theta|_{p_0} = \rho} |1/\nu(\theta)| < \infty$, $\beta = 1$, *то* $y \in (\mathcal{H}_p)^1_{q-1,\gamma,\mathrm{id}}$. *В частности, если* $f \in (N)^1$, *то* $y \in (N)^1$ ($(N)^1 \equiv (N)^1_{\gamma,\alpha}$, *см.* [8]).

Если $\beta = 1$, $\tilde{\nu}$ *— полином и* $p'_{\tilde{\nu}} := \max\{p \in \mathbb{N} \colon \tilde{\nu}_n \in \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}\}$, $\tilde{\nu}_n$ *из разложения* $\tilde{\nu}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \tilde{\nu}_n, \theta^{\otimes n} \rangle$, *то при* $p \geq p'_{\tilde{\nu}}$ *и* $f \in (\mathcal{H}_p)^1_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ *решение* (5) $y \in (\mathcal{H}_p)^1_{q,\gamma,\mathrm{id}}$.

Первое утверждение непосредственно следует из леммы 1; остальные доказаны в [8].

***Замечание* 3.** Аналогичное утверждение справедливо в случае $\alpha \neq \mathrm{id}$ для уравнений

$$\nu(\alpha^{-1}(D_\chi))\, y = f,$$

надо лишь заменить $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\mathrm{id}}$ на $(\mathcal{H}_p)^{\beta}_{q,\gamma,\alpha}$ и т. д.

4. Если функция $\chi(\langle x, \theta \rangle)$, $x \in N'$, $\theta \in N_{\mathbb{C}}$, при фиксированном θ является обобщенным характером некоторой L_1-гипергруппы (см., например, [6]), то оператор обобщенного сдвига должен действовать на χ по закону $T_y^{\chi} \chi(\langle x, \theta \rangle) = \chi(\langle x, \theta \rangle) \chi(\langle y, \theta \rangle)$, $x, y \in N'$. Раскладывая $\chi(\langle x, \theta \rangle)$ в ряд Тейлора по степеням θ, получаем (формально) равенство

$$T_y^{\chi} \chi(\langle x, \theta \rangle) = T_y^{\chi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle P_n^{1,\mathrm{id}}(x), \theta^{\otimes n} \rangle =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle P_n^{1,\mathrm{id}}(x), \theta^{\otimes n} \rangle \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle P_m^{1,\mathrm{id}}(y), \theta^{\otimes m} \rangle \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{1,\mathrm{id}}(x) \hat{\otimes} P_{n-m}^{1,\mathrm{id}}(y), \theta^{\otimes n} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\chi(\langle y, \cdot \rangle),\mathrm{id}}(x), \theta^{\otimes n} \rangle.$$

Поэтому естественно принять следующее определение.

Определение 2. *Пусть* χ *и* α *удовлетворяют наложенным выше условиям,* $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{1,\alpha}, \varphi^{(n)} \rangle$ *принадлежит* $(\mathcal{H}_p)_{q,1,\alpha}^{\beta}$. *Определим оператор обобщенного сдвига* $T_y^{\chi,\alpha} \in \mathcal{L}\left((\mathcal{H}_p)_{q,1,\alpha}^{\beta}, (\mathcal{H}_p)_{q,\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}^{\beta}\right)$, $y \in N'_{\mathbb{C}}$, *формулой*

$$(T_y^{\chi,\alpha}\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x), \varphi^{(n)} \rangle, \tag{6}$$

т. е. действие $T_y^{\chi,\alpha}$ *сводится к замене ядер* $P_n^{1,\alpha}$ *на* $P_n^{\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}$.

Из теоремы 1 с учетом замечания 3 следует

$$(T_y^{\chi,\alpha}\varphi)(x) = (\chi(\langle y, D_\chi\rangle)\varphi)(x),$$

$x \in N'$, $y \in N'_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in (\mathcal{H}_p)_{q,1,\alpha}^{\beta}$. Действительно, при $\alpha = \mathrm{id}$ это утверждение очевидно, в общем случае следует лишь заметить, что $\chi(\langle y, D_\chi\rangle) \equiv \chi(\langle y, \alpha(\alpha^{-1}(D_\chi))\rangle)$. Таким образом, определение 2 корректно, и, более того, *оператор обобщенного сдвига* $T_y^{\chi,\alpha}$ *не зависит от* α, поэтому *его можно обозначить* T_y^{χ}.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что $\chi(\langle \cdot, \alpha(\theta)\rangle) \in (\mathcal{H}_p)_{q,1,\alpha}^{\beta}$ при $\beta < 1$, поэтому из (6) получаем $T_y^{\chi}\chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle) = \chi(\langle x, \alpha(\theta)\rangle)\chi(\langle y, \alpha(\theta)\rangle)$ — основное свойство оператора обобщенного сдвига.

В следующем утверждении установлено, что T_y^{χ} — линейный непрерывный оператор, действующий из $(\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}$ в $(\mathcal{H}_p)_{q,\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}^{\beta}$, γ и α такие, как выше.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in (\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}$ *разложена в ряд по обобщенным квазиаппелевым полиномам с ядрами* $P_n^{\gamma,\alpha}(x) \in N'^{\hat{\otimes} n}_{\mathbb{C}}$. *Тогда действие* T_y^{χ} *сводится к замене этих ядер на* $P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x) \in N'^{\hat{\otimes} n}_{\mathbb{C}}$, *т. е. если*

$$\varphi(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\gamma,\alpha}(\cdot), \varphi^{(n)} \rangle, \quad \varphi^{(n)} \in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \tag{7}$$

то

$$(T_y^{\chi}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x), \varphi^{(n)} \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{\gamma,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_{n-m}^{1,\alpha}(y), \varphi^{(n)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{1,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_{n-m}^{\gamma,\alpha}(y), \varphi^{(n)} \right\rangle = (T_x^{\chi}\varphi)(y). \tag{8}$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении с использованием формул (3) и (6).

Пример **1.** Пусть $\chi = \exp$. Тогда, в силу (8) и (3), для φ вида (7) имеем

$$(T_y^{\exp}\varphi)(x) = T_y^{\exp}\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma,\alpha}(x), \varphi^{(n)}\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{\gamma,\alpha}(x)\hat{\otimes} P_{n-m}^{1,\alpha}(y), \varphi^{(n)}\right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma,\alpha}(x+y), \varphi^{(n)}\rangle = \varphi(x+y),$$

т. е. $T_y^{\exp}$ является оператором сдвига аргумента, что соответствует классической ситуации.

Изучим свойства оператора T_y^{χ}. Для того чтобы избежать путаницы, договоримся писать $T_y^{\chi,x}$ вместо T_y^{χ}, если *необходимо подчеркнуть, что* T_y^{χ} *действует по переменной* x.

Теорема 2. *Оператор обобщенного сдвига* T_y^{χ} *имеет следующие свойства*:

T_1) $T_y^{\chi} \in \mathcal{L}\left((\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}, (\mathcal{H}_p)_{q,\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}^{\beta}\right)$;

T_2) $T_0^{\chi} = I$ — *единичный оператор*;

T_3) (*ассоциативность*) $T_z^{\chi,y}(T_y^{\chi}\varphi)(x) = T_y^{\chi,x}(T_z^{\chi}\varphi)(x)$, $x, y, z \in N'_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in (\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}$;

T_4) (*коммутативность*) $T_z^{\chi,x}(T_y^{\chi}\varphi)(x) = T_y^{\chi,x}(T_z^{\chi}\varphi)(x)$, $x, y, z \in N'_{\mathbb{C}}$, $\varphi \in (\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}$;

T_5) $(T_y^{\chi}\varphi)(x) = (T_x^{\chi}\varphi)(y)$.

Доказательство. Свойства T_1 и T_5 следуют из леммы 2; T_2 — из (6) и условия $\chi(0) = 1$. Докажем свойство T_3. Пусть φ имеет вид (7). Из (8) следует, что

$$T_z^{\chi,y}(T_y^{\chi}\varphi)(x) = T_z^{\chi,y}\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x), \varphi^{(n)}\rangle =$$

$$= T_z^{\chi,y}\sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle x,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(y), \varphi^{(n)}\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle x,\alpha(\cdot)\rangle)\chi(\langle z,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(y), \varphi^{(n)}\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle)\chi(\langle z,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x), \varphi^{(n)}\rangle.$$

Аналогично получаем

$$T_y^{\chi,x}(T_z^{\chi}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle z,\alpha(\cdot)\rangle)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x), \varphi^{(n)}\rangle = T_z^{\chi,y}(T_y^{\chi}\varphi)(x).$$

Свойство T_3 доказано. Свойство T_4 доказывается с помощью (8) аналогично свойству T_3.

5. Применение оператора обобщенного сдвига позволяет получать при $\chi \neq \exp$ результаты, классические аналоги которых связаны с обычным сдвигом аргумента. Приведем пример такого рода.

Пример 2. Для обобщенных полиномов Аппеля ($\chi = \exp$) справедлива формула [4]

$$P_n^{\gamma,\alpha}(x+y) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{\gamma,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_{n-m}^{1,\alpha}(y) =$$

$$= \sum_{k,l,m \in \mathbb{Z}_+:\, k+l+m=n} \frac{m!}{k!\,l!\,m!} P_k^{\gamma,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_l^{\gamma,\alpha}(y) \hat{\otimes} \tilde{\gamma}_m,$$

$\tilde{\gamma}_m \in N_{\mathbb{C}}'^{\hat{\otimes} n}$ из разложения $1/\nu(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \tilde{\gamma}_m, \theta^{\otimes m} \rangle$. Пусть теперь $\chi \neq$ $\neq \exp$. Введем обозначение $T_y^{\chi} P_n^{\gamma,\alpha}(x) := P_n^{\gamma(\cdot)\chi(\langle y,\alpha(\cdot)\rangle),\alpha}(x)$ (ср. с (8)). Тогда из (3) легко следует

$$T_y^{\chi} P_n^{\gamma,\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P_m^{\gamma,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_{n-m}^{1,\alpha}(y) =$$

$$= \sum_{k,l,m \in \mathbb{Z}_+:\, k+l+m=n} \frac{m!}{k!\,l!\,m!} P_k^{\gamma,\alpha}(x) \hat{\otimes} P_l^{\gamma,\alpha}(y) \hat{\otimes} \tilde{\gamma}_m.$$

Замечание 5. В настоящей статье не рассматриваются пространства обобщенных функций и связанные с ними понятия. Отметим, однако, что оператор T_y^{χ} можно применить для построения обобщенной производящей функции $Q^{\gamma,\alpha}$-системы, биортогональной к $P^{\gamma,\alpha}$ и составляющей ортогональный базис в пространствах, дуальных к $(\mathcal{H}_p)_{q,\gamma,\alpha}^{\beta}$ (подробности о $Q^{\gamma,\alpha}$-системе см. в [8]).

Автор благодарен Ю. А. Березанскому и Г. Ф. Усу за полезные обсуждения и замечания.

1. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // Функцион. анализ и прил. – 1991. – **25**, № 2. – С. 68–70.
2. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Негауссовский анализ и гиперrруппы // Там же. – 1995. – **29**, № 3. – С. 51–55.
3. *Us G. F.* Dual Appell systems in Poissonian analysis // Meth. Funct. Anal. Topol. – 1995. – **1**, № 1. – P. 93–108.
4. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis. – Kyoto, 1955. – 43 p. – IIAS Rept № 1995-002.
5. *Albeverio S., Daletzky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L.* Non-Gaussian infinite dimensional analysis // J. Funct. Anal. – 1996. – **138**, № 2. – P 311–350.
6. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Meth. Funct. Anal. Topol. – 1996. – **2**, № 2. – P. 1–50.
7. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный негауссовский анализ и операторы обобщенного сдвига // Функцион. анализ и прил. – 1996. – **30**, № 4. – С. 61–65.
8. *Kachanovsky N. A.* Biorthogonal Appell-like systems in a Hilbert space // Meth. Funct. Anal. Topol. – 1996. – **2**, № 3, 4. – P. 36–52.
9. *Качановский Н. А.* Дуальная система Аппеля и пространства Кондратьева в анализе на пространствах Шварца // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 527–534.
10. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный анализ, связанный с оператором обобщенного сдвига // Там же. – № 3. – С. 364–409.
11. *Качановский Н. А., Ус Г. Ф.* Биортогональные системы Аппеля в анализе на дуально-ядерных пространствах // Функцион. анализ и прил. – 1998. – **32**, № 1. – С. 69–72.
12. *Berezansky Yu. M.* Construction of generalized translation operators from the system of Appell characters // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **184**, № 2. – P. 7–21.
13. *Boas R. P., Buck R. C.* Polynomial expansions of analytic functions. – Berlin: Springer, 1964. – 77 p.

Получено 28.01.98