

О. В. Коломієць (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВИПАДКОВИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

We consider the application of Krylov–Bogolyubov–Mitropol'skii asymptotic method and Runge–Kutta methods when investigating oscillating solutions of second-order quasilinear differential equations with random deviations of an argument. For certain equations, we obtain approximate numerical solutions and characteristics of random oscillations.

Розглядається застосування асимптотичного методу Крилова – Боголюбова – Митропольського та методів Рунге – Кутта до дослідження колиливих розв'язків квазілінійних диференціальних рівнянь другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу. Для конкретних рівнянь знайдено наближені числові розв'язки та характеристики випадкових коливань.

Вступ. Системи з випадковими відхиленнями аргументу становлять значний науковий і практичний інтерес. Крім аналітичного дослідження, також великого значення набувають питання можливості їх наближеного розв'язування за допомогою електронних обчислювальних машин. Особливо важливими є дослідження умов виникнення у цих системах випадкових коливань та знаходження їхніх числових характеристик. У даній роботі ці питання розглянуті стосовно диференціальних рівнянь другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу. Наведено приклад конкретного рівняння, розв'язаного на ЕОМ. Результати подані у графічному вигляді.

Постановка задачі. Предметом дослідження є квазілінійна система, що описується диференціально-різницевою рівнянням другого порядку з випадковими відхиленнями аргументу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + k_2 \frac{dx(t - \Delta_1(t))}{dt} + k_3 x(t) + k_4 x(t - \Delta_1(t)) = \\ = \varepsilon f\left(x(t), x(t - \Delta_2(t)), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t - \Delta_2(t))}{dt}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 — деякі сталі коефіцієнти, ε — малий додатний параметр, $f(x, y, u, v)$ — нелінійна функція, що має достатню кількість похідних по всіх змінних, $\Delta_1(t)$ і $\Delta_2(t)$ — відхилення аргументів, що є стаціонарними випадковими процесами. Розглядаємо випадок малих флуктуацій відхилення навколо сталих величин

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \Delta_{10} + \sqrt{\varepsilon} \rho_1 \xi(t, \mu), \\ \Delta_2(t) &= \Delta_{20} + \sqrt{\varepsilon} \rho_2 \xi(t, \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\Delta_{i0} \equiv M \Delta_i$, ρ_i , $i = 1, 2$, — додатні постійні величини, $\xi(t, \mu)$ — стаціонарний випадковий процес, що перетворюється при $\mu \rightarrow 0$ в стандартний білий шум $\dot{w}(t)$ з характеристиками $M \dot{w}(t) = 0$, $M \dot{w}(t) \dot{w}(t + \tau) = \delta(\tau)$ (тут символ M позначає математичне сподівання, $\delta(\tau)$ — дельта-функція Дірака). У роботі [1] показано, що до рівняння (1) можна застосувати асимптотичні методи Крилова – Боголюбова – Митропольського [2].

Породжуюче рівняння. При $\varepsilon = 0$ рівняння (1) перетворюється в лінійне диференціально-різницеве рівняння з сталим запізненням

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + k_2 \frac{dx(t - \Delta_{10})}{dt} + k_3 x(t) + k_4 x(t - \Delta_{10}) = 0. \quad (3)$$

Дослідимо випадки, коли це рівняння має коливний розв'язок. Для цього розглянемо його характеристичне рівняння

$$H(\lambda) \equiv \lambda^2 + k_1\lambda + k_2\lambda e^{-\Delta_{10}\lambda} + k_3 + k_4e^{-\Delta_{10}\lambda} = 0 \quad (4)$$

і визначимо, у яких випадках воно має лише пару чисто уявних коренів $\lambda = \pm i\omega$. Розв'язуючи систему рівнянь для визначення ω

$$H_1(\omega) \equiv -\omega^2 + k_2\omega \sin \omega\Delta_{10} + k_3 + k_4 \cos \omega\Delta_{10} = 0, \quad (5)$$

$$H_2(\omega) \equiv k_1\omega + k_2\omega \cos \omega\Delta_{10} - k_4 \sin \omega\Delta_{10} = 0,$$

знаходимо [3]

$$\omega = \frac{1}{\Delta_{10}} \arccos \frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k^2 + k_4^2}, \quad (6)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 + \sqrt{(k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 - 4(k_3^2 - k_4^2)}},$$

причому періодичний розв'язок рівняння (3) можливий при виконанні однієї з двох наступних груп умов:

$$k_3^2 - k_4^2 < 0,$$

$$k = \frac{1}{\Delta_{10}} \arccos \frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k^2 + k_4^2}; \quad (7)$$

$$k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 > 0, \quad (k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 \geq 4(k_3^2 - k_4^2),$$

$$k = \frac{1}{\Delta_{10}} \arccos \frac{k_4k^2 - k_1k_2k - k_3k_4}{k_2k^2 + k_4^2};$$

частота коливань у цьому випадку

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + 2k_3 + \sqrt{(k_2^2 - k_1^2 + 2k_3)^2 - 4(k_3^2 - k_4^2)}}. \quad (6')$$

Отже, при виконанні умов (7) розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$x(t) = a \cos(\omega t + \theta), \quad (8)$$

де a і θ — довільні сталі величини.

Розв'язок загального рівняння у першому наближенні. Як показано у роботі [1], розв'язок рівняння (1) шукаємо за допомогою асимптотичного методу Крилова – Боголюбова – Митропольського у першому наближенні

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \theta(t)); \quad (9)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = \varepsilon A_1(a(t), \xi(t, \mu), \varepsilon), \quad (10)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \varepsilon B_1(a(t), \xi(t, \mu), \varepsilon).$$

Коефіцієнти у правій частині рівнянь (10) відшукуються таким чином, щоб вираз (9) з функціями $a(t)$ та $\theta(t)$, визначеними з системи (10), задовольняв рівняння (1).

Після виконання стандартних для асимптотичного методу перетворень

(підстановка виразів (9), (10) у рівняння (1), розклад правої частини у ряд Фур'є та прирівнювання коефіцієнтів при однакових гармоніках) отримуємо вирази для коефіцієнтів A_1 та B_1 . Система рівнянь (10) набирає вигляду

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} A_{12}(a) \xi(t, \mu), \quad (11)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} B_{12}(a) \xi(t, \mu);$$

$$A_{11} = \frac{H_2'(\omega)r_1(a) + H_1'(\omega)q_1(a)}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)},$$

$$A_{12} =$$

$$= \frac{H_2'(\omega)(k_4 \sin \omega \Delta_{10} - k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10}) - H_1'(\omega)(k_4 \cos \omega \Delta_{10} + k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10})}{H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega)} a \omega \rho_1, \quad (12)$$

$$B_{11} = \frac{H_1'(\omega)r_1(a) - H_2'(\omega)q_1(a)}{a(H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))},$$

$$B_{12} =$$

$$= \frac{H_2'(\omega)(k_2 \omega \sin \omega \Delta_{10} + k_4 \cos \omega \Delta_{10}) - H_1'(\omega)(k_2 \omega \cos \omega \Delta_{10} - k_4 \sin \omega \Delta_{10})}{a(H_1'^2(\omega) + H_2'^2(\omega))} \omega \rho_1,$$

де $r_1(a)$ і $q_1(a)$ — коефіцієнти розкладу функції

$$f(a \cos \psi, a \cos(\psi - \omega \Delta_{20}), -a \omega \sin \psi, -a \omega \sin(\psi - \omega \Delta_{20})),$$

$$\psi(t) = \omega t + \theta(t)$$

в ряд Фур'є; $H_1'^2(\omega)$ і $H_2'^2(\omega)$ — похідні лівих частин рівнянь (5).

Числові методи розв'язування рівнянь для знаходження амплітуди та фази коливань. Метод Рунге – Кутта четвертого порядку. Розглянемо рівняння для амплітуди та фази коливань (11). Враховуючи умову, накладену на випадковий процес $\xi(t, \mu)$, в границі при $\mu \rightarrow 0$ замість рівнянь (11) можна розглядати відповідні їм звичайні стохастичні диференціальні рівняння

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} A_{12}(a) \dot{w}, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_{11}(a) + \sqrt{\varepsilon} B_{12}(a) \dot{w}.$$

Тепер для наближеного числового розв'язування таких рівнянь застосуємо один з методів Рунге – Кутта [4], які легко адаптуються до стохастичних диференціальних рівнянь [5]. Найкраще співвідношення між точністю обчислень і алгоритмічною ефективністю забезпечує метод Рунге – Кутта четвертого порядку, оскільки для методів вищого порядку складність обчислень зростає швидше, ніж точність отримуваних результатів. Тому скористаємось цим методом.

Без обмеження загальності, розглянемо систему рівнянь (13) на відріжку часу $t \in [0, T]$. Нехай вінерівський процес $w(t)$ має дисперсію $D_w(\tau) = \tau$. Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на N рівних частин точками $t_i = i\Delta t$, $\Delta t = T/N$, $i = \overline{0, N-1}$. Покладемо

$$a_0 \equiv a(0), \quad a_i \equiv a(t_i); \quad \theta_0 \equiv \theta(0), \quad \theta_i \equiv \theta(t_i). \quad (14)$$

Тоді значення амплітуди та фази обчислюємо за формулами

$$a_{i+1} = a_i + \frac{\varepsilon(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)}{6} + \sqrt{\varepsilon} A_{12}(a_i) \Delta w_i, \quad (15)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\varepsilon(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)}{6} + \sqrt{\varepsilon} B_{12}(a_i) \Delta w_i;$$

$$p_1 = A_{11}(a_i) \Delta t, \quad q_1 = B_{11}(a_i) \Delta t,$$

$$p_2 = A_{11}\left(a_i + \frac{p_1}{2}\right) \Delta t, \quad q_2 = B_{11}\left(a_i + \frac{q_1}{2}\right) \Delta t, \quad (16)$$

$$p_3 = A_{11}\left(a_i + \frac{p_2}{2}\right) \Delta t, \quad q_3 = B_{11}\left(a_i + \frac{q_2}{2}\right) \Delta t,$$

$$p_4 = A_{11}(a_i + p_3) \Delta t, \quad q_4 = B_{11}(a_i + q_3) \Delta t;$$

$$i = \overline{0, N-1}.$$

Тут Δw_i — прирости вінерівського процесу $w(t)$ на відрізках $[t_i, t_{i+1}]$, які є нормально розподіленими незалежними випадковими числами з математичним сподіванням $M \Delta w_i = 0$ і дисперсією $M(\Delta w_i)^2 = \Delta t$. За початкове значення a_0 можна взяти найбільш імовірну амплітуду стаціонарних випадкових коливань, знайдену за допомогою методу рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова [1]. Початкове значення фази коливань можна знайти аналогічно, або покласти $\theta_0 = 0$.

Маючи наближені числові значення для амплітуди і фази випадкових коливань у точках t_i відрізка $[0, T]$, можемо обчислити наближені значення переміщення $x(t)$ у цих точках, виходячи з формули (9), тобто

$$x_i = a_i \cos(\omega t_i + \theta_i). \quad (17)$$

Зауважимо, що одержані таким чином числові результати залежать від набору (псевдо-) випадкових чисел, і тому є лише зразком однієї з можливих реалізацій випадкових процесів, що описують амплітуду, фазу та переміщення випадкових коливань. Проте ці результати дають уявлення про характер перебігу коливань, а також можуть бути використані для наближеного знаходження їхніх числових характеристик (таких, як середнє значення, дисперсія та інші) за методами математичної статистики, причому тим точніше, чим більше точок розбиття відрізка використовувалось при обчисленнях.

Проілюструємо все викладене вище на прикладі рівняння типу Ван-дер-Поля з випадковими відхиленнями аргументу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k_1 x(t) + k_2 x(t - \Delta_{10} - \sqrt{\varepsilon} \rho_1 \xi(t, \mu)) = \\ = \varepsilon (1 - x^2(t)) \frac{dx(t - \Delta_{20} - \sqrt{\varepsilon} \rho_2 \xi(t, \mu))}{dt}, \end{aligned} \quad (18)$$

в якому значення і властивості всіх коефіцієнтів такі ж, як і у рівнянні (1).

Аналізуючи вироджений випадок рівняння (18) при $\varepsilon = 0$, знаходимо, що коливні розв'язки можливі при виконанні однієї з таких двох груп умов:

$$k_1 + k_2 > 0, \quad \Delta_{10} = \frac{\pi 2l}{\sqrt{k_1 + k_2}}, \quad l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad (19)$$

$$\text{частота коливань } \omega = \sqrt{k_1 + k_2};$$

$$k_1 - k_2 > 0, \quad \Delta_{10} = \frac{\pi(2l+1)}{\sqrt{k_1 - k_2}}, \quad l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad (20)$$

$$\text{частота коливань } \omega = \sqrt{k_1 - k_2}.$$

Далі розглядаємо випадок середнього значення відхилення і коефіцієнтів рівняння, що задовольняють умову (19) при $l = 1$. Застосовуючи до рівняння (18) асимптотичний метод Крилова – Боголюбова – Митропольського як описано вище, одержуємо рівняння (9) та (13), у яких функції $A_{11}, A_{12}, B_{11}, B_{12}$ виражаються формулами

$$A_{11} = \gamma_1 a + \gamma_2 a^3, \quad A_{12} = \gamma_3 a, \quad (21)$$

$$B_{11} = \kappa_1 + \kappa_2 a^2, \quad B_{12} = \kappa_3,$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{-u+v}{d}, & \kappa_1 &= \frac{-(2\omega^4 \sin \alpha + 2k_2 \pi \omega^2 \cos \alpha)}{d}, \\ \gamma_2 &= \frac{3u-v}{d}, & \kappa_2 &= \frac{6\omega^4 \sin \alpha + \omega^3 \cos \alpha}{4d}, \\ \gamma_3 &= \frac{2k_2(k_1+k_2)\rho_1}{d}, & \kappa_3 &= \frac{-(2\pi\omega^2 k_2^2 \rho_1)}{d}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$u = 2k_2(k_1+k_2)\pi \sin \alpha, \quad v = 2(k_1+k_2)^2 \cos \alpha;$$

$$d = 4(k_1+k_2)^2 + 4k_2^2 \pi^2, \quad \alpha = \sqrt{k_1+k_2} \Delta_{20}.$$

Розглядаючи рівняння (18) на відрізьку $t \in [0, T]$, застосовуємо до нього отримані вище формули методу Рунге – Кутга (15), (16) та (17), використовуючи формули (21), (22).

За початкове значення a_0 у формулах (14) можна взяти найбільш імовірну амплітуду стаціонарних випадкових коливань, для обчислення якої скористаємось формулою, знайденою у роботі [1] за допомогою методу рівнянь Фоккера – Планка – Колмогорова:

$$a_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{\gamma_3^2 - \gamma_1}{\gamma_2}}. \quad (23)$$

Проаналізуємо формулу (23). У випадку, коли $k_1 = 1, k_2 = 0$, рівняння (18) перетворюється в звичайне рівняння Ван-дер-Поля. При цьому отримуємо відомий [2] граничний результат:

$$a_{\text{ст}} = 2. \quad (24)$$

Коли $k_1 + k_2 = 1$, але $k_2 \neq 0$, маємо також цікавий випадок. Розглянемо деякі можливі випадки поведінки $a_{\text{ст}}(\rho_1)$ як функції інтенсивності ρ_1 збурюючого випадкового процесу.

1. Якщо $\Delta_{20} = \pi$, то значення $a_{\text{ст}}(\rho_1) > 2$ для $\rho_1 > 0$, і при $\rho_1 \rightarrow 0$ функція $a_{\text{ст}}(\rho_1) \rightarrow 2$, монотонно спадаючи. При збільшенні інтенсивності ρ_1 значення $a_{\text{ст}}$ необмежено зростає.

2. Якщо $\Delta_{20} = 2\pi$, то значення $a_{\text{ст}}(\rho_1) < 2$ для $\rho_1 > 0$, і при $\rho_1 \rightarrow 0$ функція $a_{\text{ст}}(\rho_1) \rightarrow 2$, монотонно зростаючи. При збільшенні інтенсивності ρ_1 значення $a_{\text{ст}}$ спадають до тих пір, поки не досягнуть нульового значення,

тобто у цьому разі випадкові коливання зникають. Це відбувається, коли інтенсивність збурюючого процесу досягає критичного значення $\rho_{1кр}$, яке обчислюється на підставі (23) за формулою

$$\rho_{1кр} = \sqrt{\frac{2(1+k_2^2\pi^2)}{k_2^2}}. \quad (25)$$

Для значень $\rho_1 > \rho_{1кр}$ розглядати систему (18) немає сенсу.

Зауважимо, що при надто великих значеннях ρ_1 або Δ_{20} описані методи не дають задовільних результатів [6].

Приклади розв'язування рівнянь на ЕОМ. Складено програму, яка реалізує описаний вище алгоритм для рівняння (18) на персональному комп'ютері і знаходить можливі значення амплітуди, фази та переміщення на множині точок розбиття відрізка часу. Програма розроблена у середовищі Visual Basic for Applications; початкові дані та результати роботи розміщуються у робочому аркуші Microsoft Excel for Windows. Використано генератор нормально розподілених випадкових чисел з пакету Analysis ToolPak. Результати роботи наведені нижче.

Випадок 1. Нехай у рівнянні (18) коефіцієнти дорівнюють

$$k_1 = 2; \quad k_2 = -1; \quad \Delta_{10} = 2\pi; \quad \Delta_{20} = 4,5; \quad \varepsilon = 0,01. \quad (26)$$

Розглядаємо рівняння на відрізку часу $t \in [0, 10]$, який рівномірно розбиваємо на 100 рівних частин. Отримані числові результати амплітуди, фази та переміщення коливань для двох різних значень інтенсивності $\rho_1 = 6$ та $\rho_1 = 12$ подані відповідно на рис. 1, 2, 3 (цифрові результати не наведені через їхню громіздкість). Відповідні пари „графіків” мають однаковий масштаб по осях ординат, тому дають наочне уявлення про дисперсію зображених величин. Узагальнені характеристики амплітуди та фази наведені у таблиці.

$\rho_1 = 6$	$\rho_1 = 12$
<i>Амплітуда</i>	
$a_0 = a_{ст} = 1,44771584$	$a_0 = a_{ст} = 2,05050653$
$\bar{a} = Ma(t) = 1,44645206$	$\bar{a} = Ma(t) = 2,04688590$
$\sigma_a^2 = M(a - \bar{a})^2 = 0,00014753$	$\sigma_a^2 = M(a - \bar{a})^2 = 0,00171310$
<i>Фаза</i>	
$\theta_0 = 0$	$\theta_0 = 0$
$\bar{\theta} = M\theta(t) = -0,00296507$	$\bar{\theta} = M\theta(t) = -0,00648117$
$\sigma_\theta^2 = M(\theta - \bar{\theta})^2 = 0,00069475$	$\sigma_\theta^2 = M(\theta - \bar{\theta})^2 = 0,00402135$

Наведені вище числові характеристики випадкових амплітуд і фаз отримані за формулами математичної статистики, а значення $a_{ст}$ обчислені за формулою (23). Точність значень обчислених величин зростає при збільшенні кількості точок розбиття відрізка часу.

Треба зауважити, що величини, обчислені в сусідніх точках розбиття відрізка часу $t \in [0, 10]$, на „графіках” з'єднані відрізками ламаної лише для зручності сприйняття. Взагалі ж, через випадкову природу зображуваних величин таке з'єднання відрізками є умовним, а термін „графік” вживається у лапках.

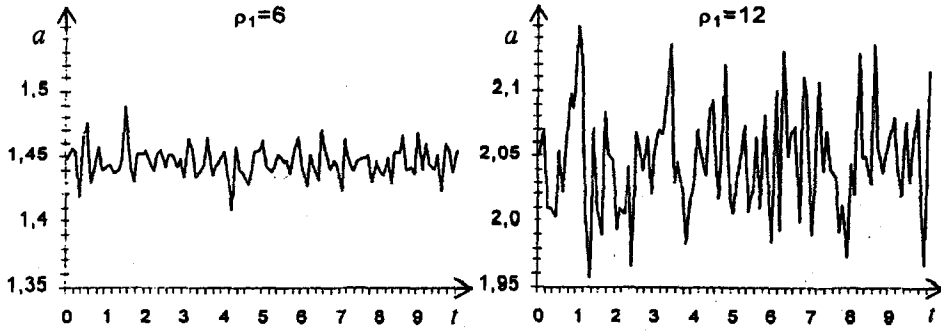


Рис. 1

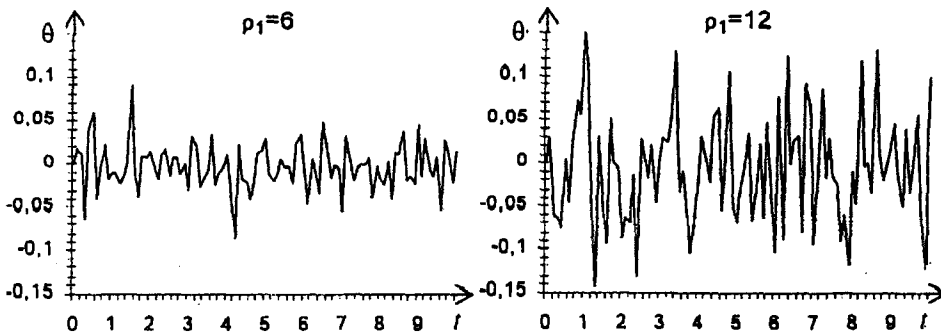


Рис. 2

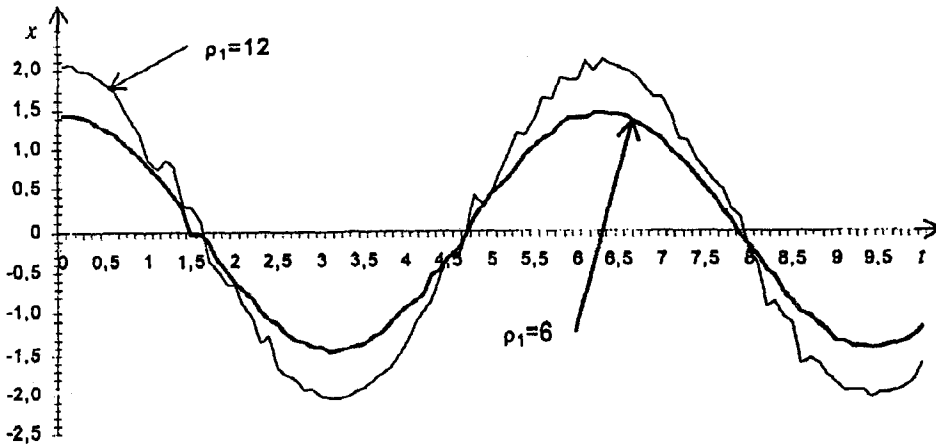


Рис. 3

Як бачимо, обчислені середні значення амплітуди та фази коливань незначно відрізняються від початкових значень відповідних величин, що підтверджує наявність у системі випадкових коливань, близьких до періодичних. Цей факт найбільш наочно демонструє „графік” залежності переміщення x від часу. Крім того, з наведених результатів видно, що дисперсія отриманих величин зростає при збільшенні інтенсивності збурюючого випадкового процесу.

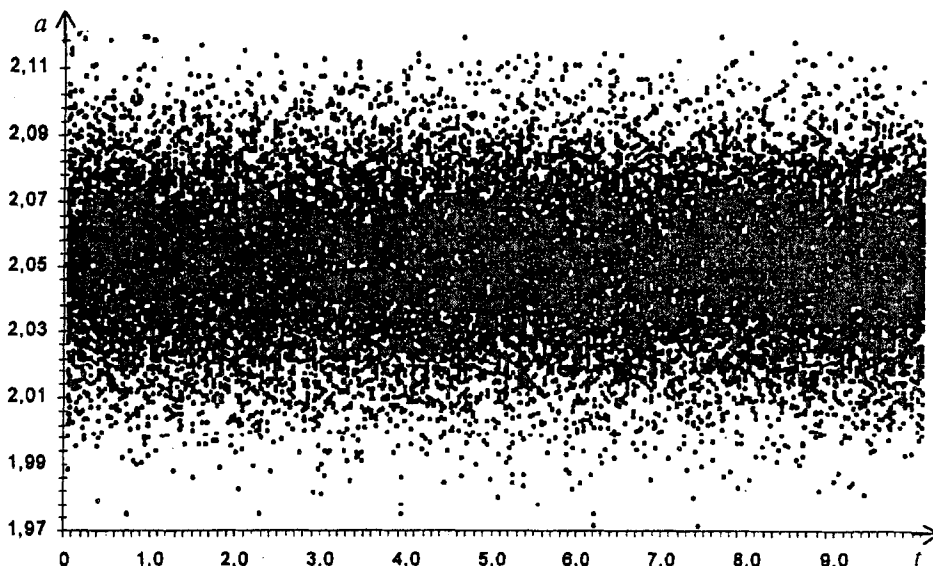


Рис. 4

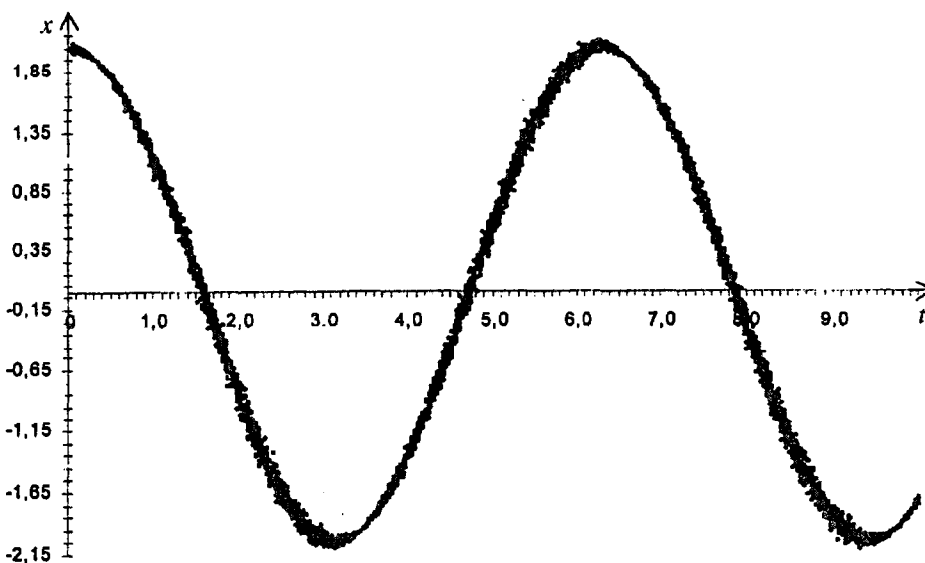


Рис. 5

Випадок 2. Розглянемо тепер рівняння (18) з коефіцієнтами

$$k_1 = 2; \quad k_2 = -1; \quad \Delta_{10} = 2\pi; \quad \Delta_{20} = 4,5; \quad \varepsilon = 0,01; \quad \rho_1 = 12 \quad (27)$$

на відріжку часу $t \in [0, 10]$, який рівномірно розбиваємо на 300 частин.

Тепер повторюємо залежні від набору (псевдо-) випадкових чисел обчислення 100 разів, отримуючи 100 реалізацій амплітуди (рис. 4) та переміщення (рис. 5) і результати наносимо у вигляді окремих точок на ті ж самі „графіки”. Отримані зображення дають змогу судити про ймовірність, з якою випадковий процес набуває відповідних значень у певні моменти часу.

Наближені числові характеристики амплітуди, усереднені за 100 обчислених реалізацій: