УДК 512.662.5 + 515.164.174

**С. И. Максименко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# КЛАССИФИКАЦИЯ $m$-ФУНКЦИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Necessary and sufficient condition of conjugacy of $m$-functions on surfaces is established.

Встановлено необхідну та достатню умову спряжепості $m$-фупкцій на поверхнях.

Эта работа следует линии, начатой в 1986 г. в работах А. Т. Фоменко по топологической классификации гамильтоновых систем и затем продолженной в его работах совместно с С. В. Матвеевым, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, А. В. Браиловым, А. А. Ошемковым, В. В. Трофимовым, В. В. Шарко и другими [1 – 3]. Дальнейшее ее развитие подытожено в [4]. Вскоре эта теория нашла приложения и в других областях математики, например в теории Морса и теории векторных полей Морса – Смейла [4 – 9]. В данной работе рассматривается вопрос об эквивалентности $m$-функций на поверхностях.

**1. Понятие $m$-функции на поверхности.** Пусть $M$ — поверхность с краем $\partial M = M_1 \cup M_2 \cup M_0$, где $M_i$, $i = 0, 1, 2,$ — одномерные подмногообразия (отрезки и окружности), причем $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, а каждое из множеств $M_{01} = M_1 \cap M_0$ и $M_{02} = M_2 \cap M_0$ либо пусто, либо состоит из конечного множества точек.

**Определение 1.** *Четверка* $\xi = (M; M_0, M_1, M_2)$ *называется кобордизмом с углами.*

**Определение 2.** *Гладкая функция* $f\colon M \to [a, b]$ *называется* $m$*-функцией на кобордизме с углами* $\xi$, *если*:

1) $f$ *имеет только конечное число критических точек, все они невырождены и лежат во внутренности* $M$;

2) $M_1 = f^{-1}(a), \quad M_2 = f^{-1}(b)$;

3) *ограничение* $f|M_0$ *является функцией Морса на кобордизме* $(M_0; M_{01}, M_{02})$.

***Замечание.*** Ниже, говоря об $m$-функции на поверхности (возможно, с пустым краем), мы всегда будем иметь в виду, что определено некоторое представление этой поверхности в виде кобордизма с углами, причем для разных функций это представление может быть разным. Если при этом $f, g : M \to R$ — $m$-функции, то соответствующие кобордизмы с углами будем обозначать через

$$\xi^f = (M;\, M_0^f,\, M_1^f,\, M_2^f) \quad \text{и} \quad \xi^g = (M;\, M_0^g,\, M_1^g,\, M_2^g).$$

Для каждого подмножества $K \subset R$ положим $C_K = f^{-1}(K)$, $D_K = g^{-1}(K)$.

Пусть $f, g : M \to R$ — две $m$-функции на поверхности $M$. Будем говорить, что они эквивалентны, если существуют такие диффеоморфизмы $h : M \to M$ и $\varphi : R \to R$, причем $\varphi$ сохраняет ориентацию $R$, что выполняется соотношение $\varphi \circ f = g \circ h$.

$m$-Функции имеют следующие типы особых точек. Если $x \in \operatorname{Int} M$ — невырожденная критическая точка ограничения функции $f$ на $\operatorname{Int} M$, то определение ее индекса обычное. Если же $x \in \partial M$ — критическая точка ограничения $f|\partial M$, то ее индексом является пара $(\lambda, \varepsilon)$, где $\lambda$ — индекс точки $x$, как невырожденной критической точки $f|\partial M$, $\varepsilon = +1$, если вектор $\operatorname{grad}_x f$ направлен вне $M$, и $\varepsilon = -1$, если $\operatorname{grad}_x f$ направлен во внутрь поверхности $M$. Таким образом, существует ровно 7 типов особых точек $m$-функций — критические точки во внутренности $M$ индексов 0, 1 и 2, и критические точки ограничения $f|\partial M$ функции $f$ на край $\partial M$ индексов $(0, \pm 1)$ и $(1, \pm 1)$.

В статье [5] приведена классификация функций Морса. Используем изложенный в ней подход для классификации более широкого класса функций.

Идея классификации состоит в том, что каждой $m$-функции каноническим образом сопоставляется некоторый граф с дополнительной информацией (обозначениями), который называется *молекулой*. Название аргументируется тем, что для ее построения вводятся более простые графы, называемые *элементарными частицами*, из них строятся так называемые *атомы*, из которых, в свою очередь, составлена молекула. Элементарные частицы описывают поведение $m$-функции в окрестности критической точки, атомы — поведение функции на одном критическом уровне, а молекула отвечает уже за всю $m$-функцию. Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Две $m$-функции $f$ и $g$, определенные на компактной поверхности $M$, эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им молекулы изоморфны.*

**2. Вспомогательные утверждения.** Пусть $f$ — $m$-функция на поверхности $M$ и $\xi = (M; M_0, M_1, M_2)$ — представление $M$ в виде кобордизма с углами. Пусть далее $K \in M_0$ — компактное подмножество и $W$ — открытая в $M$ окрестность множества $K$, не содержащая особых точек $m$-функции $f$. Пусть еще $\Omega$ — произвольное градиентно-подобное векторное поле функции $f$.

**Лемма 1.** *Существует такое градиентно-подобное векторное поле $\Sigma$ функции $f$, которое совпадает с $\Omega$ на $M \setminus W$ и является касательным к краю $\partial M$ в точках множества $K$.*

*Доказательство.* Для доказательства используется стандартная техника — строится некоторое открытое покрытие $\{W_i\}$ многообразия $M$, и на каждом его элементе $W_i$ определяется градиентно-подобное векторное поле $\Sigma_i$ функции $f|W_i$, касательное к краю в точках множества $K \cap W_i$. Склеивая эти поля с помощью разбиения единицы, мы получаем искомое поле $\Sigma$. Оно будет касательным к краю в точках множества $K$, как линейная комбинация касательных к краю полей.

*Следствие* **1.** *Пусть $f$ — такая $m$-функция на кобордизме $\xi$, что ее ограничение на край $f|\partial M$ не имеет критических точек. Тогда на $M$ существует градиентно-подобное векторное поле функции $f$, касательное к краю во всех точках множества $M_0$.*

**Предложение 1.** *Две $m$-функции $f$, $g$ на поверхности $M$, не имеющие особых точек, эквивалентны.*

*Доказательство.* Используя следствие 1, построим градиентно-подобные векторные поля функций $f$ и $g$ соответственно, касательные к $M_0^f$ и $M_0^g$. Теперь предложение 1 вытекает из рассуждений, аналогичных использованным в теореме 3.4 из [10].

**3. Особые точки $m$-функций на поверхностях и их элементарные частицы.** В определении элементарных частиц мы следуем работе [5].

Пусть $f$ — $m$-функция, определенная на открытом подмножестве $U$ некоторого полупространства в $R^2$ и имеющая в $U$ единственную особую точку $p$. Предположим еще, что в данных локальных координатах функция имеет каноническое представление, доставляемое либо леммой Морса [11], либо аналогичной леммой для невырожденных критических точек [12] (лемма 3.1). Лемма 3.1 [12] дает возможность выбирать каноническую окрестность особой точки $m$-функции на крае.

Элементарная частица особой точки — это граф, изоморфный критическому уровню в окрестности этой точки, на ребрах которого определены две инволюции $\tau$ и $\nu$. Они могут быть и тождественными отображениями. Два ребра графа принадлежат одной орбите инволюции $\tau$ (инволюции $\nu$), если они принадлежат замыканию одной и той же компоненты докритического (послекритического) множества $m$-функции в окрестности особой точки. Дадим теперь точные определения.

Элементарной частицей критической точки индекса 1 называется дерево $T$, состоящее из 4-х ребер с единственной общей вершиной и парой инволюций $\tau$ и $\nu$ этого дерева, которые не имеют неподвижных ребер и совпадений между собой, т. е. для каждого ребра $a \in E(T)$ имеем $\tau(a) \neq a \neq \nu(a)$.

Элементарной частицей критической точки индекса $(0, -1)$ (индекса $(1, 1)$) называется дерево, состоящее из двух ребер с общей вершиной, на котором определены две инволюции $\tau$ и $\nu$, причем инволюция $\tau$ (инволюция $\nu$) переставляет ребра местами, а инволюция $\nu$ $(\tau)$ — тождественна.

Элементарной частицей критической точки индекса $(0, 1)$ (индекса $(1, -1)$) называется точка, обозначенная двумя буквами $p\tau$ (буквами $p\nu$). Обе инволюции $\tau$ и $\nu$ — тождественны (так как отсутствуют ребра).

Элементарной частицей критической точки индекса 0 (индекса 2) называется точка, обозначенная двумя буквами $c\tau$ (буквами $c\nu$). Инволюции $\tau$ и $\nu$ также тождественны.

**Определение 3.** *Пусть* $F_i = (\Gamma_i, \tau_i, \nu_i)$, $i = 1, 2,$ — *две элементарные частицы. Изоморфизм* $\varphi$ *элементарных частиц — это изоморфизм* $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ *их графов, который коммутирует с инволюциями, т. е.* $\varphi \circ \tau_0 = \tau_1 \circ \varphi$ *и* $\varphi \circ \nu_0 = \nu_1 \circ \varphi$.

**Теорема 2.** *Пусть* $p \in U$ *и* $q \in V$ — *точки открытых подмножеств полуплоскости* $R^2$; $f: U \to R$ *и* $g: V \to R$ — *такие* $m$*-функции с особыми точками* $p$ и $q$, *что* $f(p) = g(q)$; $F_p$ *и* $F_q$ — *элементарные частицы этих точек.*

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $h: U \to V$ — *такой диффеоморфизм, что* $f = g \circ h$, *то он индуцирует изоморфизм элементарных частиц* $F_p \approx F_q$.

2. *Наоборот, каждый изоморфизм между элементарными частицами* $F_p$ *и* $F_q$ *индуцирован таким диффеоморфизмом* $h: U' \to V'$ *между некоторыми окрестностями* $U' \subset U$ *и* $V' \subset V$ *точек* $p$ *и* $q$, *что* $f = g \circ h$.

*Доказательство.* Утверждение 1 вытекает из определения элементарных частиц: $h$ индуцирует изоморфизм графов частиц и отображает докритические множества в докритические, а послекритические в послекритические.

Докажем второе утверждение. Так как каждая $m$-функция в окрестности особой точки эквивалентна некоторой стандартной функции, то достаточно рассматривать автоморфизмы элементарных частиц этих стандартных функций. Для особых точек, графы которых состоят из единственной вершины (т. е. особых точек индексов $0, 2, (0, -1)$ и $(1, 1)$), утверждение теоремы очевидно. Для точек индексов $(0, 1)$ и $(1, -1)$ существует единственный нетождественный автоморфизм их частиц – автоморфизм, переставляющий ребра. Поэтому в качестве $h$ можно взять диффеоморфизм $h(x, y) = (-x, y)$.

Наконец, для критической точки индекса 1 группа автоморфизмов ее частицы изоморфна циклической группе 4-го порядка. Диффеоморфизм, индуцирующий образующую этой группы, есть поворот плоскости на $90°$: $h(x, y) = (y, -x)$. Теорема доказана.

**4. Атомы критических уровней.** Следующий шаг состоит в комбинаторном описании поведения $m$-функции, с точностью до эквивалентности, в окрестности ее критического уровня.

Пусть $A=\{F_i\}$ — конечное семейство элементарных частиц $F_i=(\Gamma_i, \tau_i, \nu_i)$. Они соответствуют критическим точкам $m$-функции одного критического уровня. Чтобы построить этот уровень, необходимо отождествить некоторые висячие вершины графов этих частиц.

**Определение 4.** *Атомом $A$ называется конечное семейство элементарных частиц $\{F_i\}$, на объединении всех ребер которых определена инволюция $\sigma$ (т. е. разбиение множества ребер на не более чем двухэлементные подмножества).*

Пусть $A$ — атом. Отождествим с помощью инволюции $\sigma$ пары соответствующих висячих вершин графов элементарных частиц. В результате получим граф, вершинами которого являются центральные вершины графов элементарных частиц, и висячие вершины графов частиц неподвижны под действием инволюции. Полученный граф обозначим через $K(A)$.

На графе каждой элементарной частицы определены две инволюции $\tau$ и $\nu$, их можно считать заданными в окрестности каждой вершины графа $K(A)$. Пусть $b$ — произвольное ребро $b$ графа $K(A)$ и $Z$ — вершина этого ребра. Назовем $\tau$-*образом* ребра $b$ в вершине $Z$ выходящее из нее ребро, на которое отображается $b$ при инволюции $\tau$ окрестности этой точки. Аналогично определяется $\nu$-*образ* этого ребра.

Будем говорить, что два ребра $a$ и $b$ графа $K(A)$ принадлежат одной $\tau$-последовательности, если их можно соединить простым путем $b_0, b_1, \ldots, b_n$, составленным из ребер этого графа, который имеет следующие свойства: для всех $i=1, \ldots, n$ ребро $b_{i+1}$ является $\tau$-образом ребра $b_i$ в их общей вершине.

Очевидно, что при этом множество всех ребер графа $K(A)$ распадается на непересекающиеся подмножества, являющиеся простыми путями или циклами. Назовем эти подмножества соответственно $\tau$-путями и $\tau$-циклами. Аналогично определяются $\nu$-пути и $\nu$-циклы. Кроме этого будем считать, что каждая элементарная частица особой точки индекса 0 (индекса 2) задает $\nu$-цикл ($\tau$-цикл), а каждая элементарная частица особой точки индекса $(0, -1)$ (индекса $(1, 1)$) — $\nu$-путь ($\tau$-путь); $\tau$- и $\nu$-пути и циклы атома определяют до- и послекритические уровни критического уровня, соответствующего данному атому.

Атом называется *ориентированным*, если каждому $\tau$- и $\nu$-пути и циклу приписана определенная ориентация.

**Определение 5.** *Изоморфизмом между атомами $A=\{F_i, \sigma\}$ и $B=\{G_i, \sigma'\}$ называется биекция $\psi$ между их элементарными частицами, которая задает изоморфизмы $\varphi_i: F_i \to G_i$, удовлетворяющие равенству*

$$\varphi_i \circ \sigma = \sigma' \circ \varphi_i.$$

**Теорема 3.** *Пусть $f, g: M \to [-1, 1]$ — две $m$-функции на поверхности $M$, каждая из которых имеет только одно критическое значение 0; $A$ и $B$ — атомы их критических уровней.*

*Тогда*:

1. *Каждый диффеоморфизм $h: M \to M$ такой, что $f=g\circ h$, индуцирует изоморфизм атомов критических уровней $A \approx B$.*

2. *Наоборот, каждый изоморфизм $\varphi$ между атомами критических уровней $A$ и $B$ индуцирован таким диффеоморфизмом $h: M \to M$, что $f=g\circ h$.*

***Доказательство.*** Утверждение 1 очевидно. Докажем второе утверждение. Пусть $x_i(y_i)$ — критические точки функции $f(g)$, соответствующие им элементарные частицы обозначим через $F_i(G_i)$ так, чтобы $\varphi(F_i)=G_i$. Доказательство состоит из серии шагов.

1 *шаг.* Так как $\varphi$ — изоморфизм, то найдутся такие попарно непересекаю-

щиеся открытые окрестности $U_i(V_i)$ точек $x_i(y_i)$ и такие диффеоморфизмы $h_i\colon U_i \to V_i$, что $f=g \circ h_i$ на $U_i$. Положив $h=h_i$ на $U_i$, мы частично определим $h$ на объединении $U_i$.

2 *шаг.* В каждом множестве $V_i$ выберем замкнутую окрестность $V_i'$ точки $y_i$. Пусть еще $V_0$ — открытая окрестность множества $M_0^g$. Обозначим $V = \bigcup_i V_i$ и $V' = \bigcup_i V_i'$. Построим градиентно-подобное векторное поле $\Omega^g$ функции $g$, которое 1) совпадает с полем градиента $\operatorname{grad} g$ на множестве $V' \cup (M\setminus V)$; 2) касательное к краю во всех точках множества $M_0^g \setminus V'$.

3 *шаг.* Положим $U_i' = h^{-1}(V_i')$ и выберем замкнутую окрестность $U_i''$ замыкания этого множества, которая содержится в $U_i$. Перенесем поле $\Omega^g$ на $U_i$ с помощью диффеоморфизмов $h_i$ и обозначим полученное поле через $\Omega_0^f$. Пусть еще $U_0$ — некоторая окрестность множества $M_0^f$. Обозначим $U = \bigcup_i U_i$, $U' = \bigcup_i U_i'$ и $U'' = \bigcup_i U_i''$. Построим теперь на $M$ градиентно-подобное векторное поле $\Omega^f$, которое 1) совпадает с полем градиента $\operatorname{grad} f$ на множестве $U' \cup (M\setminus U)$; 2) совпадает с $\Omega_0^f$ на $U''$; 3) касается края во всех точках множества $M_0^g \setminus V'$.

4 *шаг.* Гладко распространим $h$ с окрестностей критических точек на критические уровни: $f^{-1}(0) \to g^{-1}(0)$.

5 *шаг.* Продолжим $h$ на окрестности критических уровней с помощью траекторий полей $\Omega^f$ и $\Omega^g$. Пусть $b$ — произвольная компонента множества $C_0 \setminus U'$, т. е. часть ребра критического уровня. Через каждую ее точку проходит единственная траектория поля $\Omega^f$, которая пересекает каждый достаточно близкий к критическому уровень в единственной точке. Зададим отображение $h$ на достаточно малой окрестности $N$ множества $b$ следующим образом. Пусть $x \in N$ и траектория поля $\Omega^f$, проходящая через $x$, пересекает $C_0$ в точке $z$. Определим $h(x)$ как точку, которая лежит на пересечении уровня $g^{-1}(f(x))$ с траекторией поля $\Omega^g$, проходящей через точку $h(z) \in D_0$. Очевидно, что полученное отображение совпадает с $h$ на $U''$. Таким образом, $h$ определен на некоторой окрестности критического уровня. Аналогичным образом он продолжается на всю поверхность, в силу того, что на оставшейся части нет особых точек, и векторные поля там касательные к краю. Условие $f=g \circ h$ выполняется по построению. Теорема доказана.

**5. Молекулы.** Последний шаг классификации состоит в том, чтобы описать поведение $m$-функции на всей поверхности.

**Определение 6.** *Молекулой называется пара* $(A, \rho)$, *где* $A = \{A_i,\ n = 1, \ldots, n\}$ *— конечное упорядоченное семейство ориентированных атомов, а* $\rho$ *— инъективное отображение, объединения* $\nu$*-путей и циклов всех атомов в множество* $\tau$*-путей и циклов этих атомов, удовлетворяющие условиям:*

1) $\rho$ *сохраняет тип маршрута, т. е. образ* $\nu$*-пути (цикла) есть* $\nu$*-путь (цикл);*

2) $\rho$ *повышает уровень атома, т. е. образом каждого* $\nu$*-маршрута* $i$*-го атома является* $\tau$*-маршрут атома со строго большим номером, чем* $i$;

3) *для каждого* $\nu$*-маршрута* $N$ *ориентации маршрутов* $N$ *и* $\rho(N)$ *должны быть такими, чтобы как относительные циклы пары* $(M, \partial M)$ *эти маршруты были гомологичными.*

**Определение 7.** *Пусть* $K = (\{A_i\}, \rho)$ *и* $L = (\{B_i\}, \rho')$ — *две молекулы. Изоморфизм* $\varphi\colon K \to L$ *между ними — это семейство изоморфизмов* $\varphi_i\colon A_i \to \to B_i$ *между атомами одинаковых уровней, удовлетворяющее условию* $\varphi_i \circ \rho = = \rho' \circ \varphi_i$ *(подразумевается, что для каждого* $\nu$*-маршрута* $N$ *молекулы* $K$ $\tau$*-маршруты* $\varphi_i \circ \rho(N)$ *и* $\rho' \circ \varphi_i(N)$ *должны совпадать не только как множества, но и как ориентированные циклы).*

**Теорема 4.** *Пусть* $f, g : M \to [0, n+1]$ — *две* $m$*-функции на поверхности* $M$, $K$ *и* $L$ — *молекулы их критических уровней.*

*Тогда*:

1. *Каждый диффеоморфизм* $h\colon M \to M$ *такой, что* $f = g \circ h$, *индуцирует изоморфизм молекул* $K \approx L$.

2. *Наоборот, каждый изоморфизм* $\varphi$ *между молекулами* $K$ *и* $L$ *индуцирован таким диффеоморфизмом* $h\colon M \to M$, *что* $f = g \circ h$.

***Доказательство.*** Утверждение 1 вытекает из определения молекул. Докажем утверждение 2. Можем считать, что критические значения функций это в точности числа $1, 2, \ldots, n$. Зафиксируем $\delta \in (0, 1/2)$ и рассмотрим множество $C_{[i-\delta,\, i+\delta]}$. Заметим, что некоторые его компоненты не содержат критических точек (регулярные компоненты). Несложно видеть, что существует биекция между множеством таких компонент и множеством тех $\nu$-маршрутов уровней ниже $i$-го, образы которых лежат выше этого уровня. Аналогичное утверждение справедливо и для множества $D_{[i-\delta,\, i+\delta]}$. Так как $\varphi$ — изоморфизм молекул, то имеется естественная биекция между такими $\nu$-маршрутами, а значит, и между регулярными компонентами множеств $C_{[i-\delta,\, i+\delta]}$ и $D_{[i-\delta,\, i+\delta]}$. Согласно теореме 2 и предложению 1, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ существуют такие диффеоморфизмы $h_i\colon C_{[i-\delta,\, i+\delta]} \to D_{[i-\delta,\, i+\delta]}$, что $f = g \circ h_i$. Положим $h = h_i$ на $C_{[i-\delta,\, i+\delta]}$. Для продолжения $h$ на всю поверхность воспользуемся рассуждениями, аналогичными тем, которые использовались в теореме 2. Построим на $M$ градиентно-подобное векторное поле $\Omega^f$ $(\Omega^g)$ функции $f$ $(g)$, касательное к краю на небольшой окрестности дополнения $M$ к объединению множеств вида $C_{[i-\delta,\, i+\delta]}$. Заметим, что, „передвигая" множество $C_{i+\delta}$ $(D_{i+\delta})$ в множество $C_{i+1-\delta}$ $(D_{i+1-\delta})$ вдоль траекторий поля $\Omega^f$ $(\Omega^g)$, получаем диффеоморфизм между этими множествами. Обозначим его через $p_i$ $(q_i)$.

Несложно показать, что для того, чтобы диффеоморфизм $h$ можно было продолжить вдоль траекторий этих полей (как в теореме 2), достаточно, чтобы для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ и для каждой компоненты $N$ множества $C_{i+\delta}$ диффеоморфизмы $h_{i+1} \circ p_i$ и $q_i \circ h_i$ были изотопными. Но это гарантируется изоморфизмом молекул (условием совпадения ориентаций маршрутов $\varphi_i \circ \circ \rho(N)$ и $\rho' \circ \varphi_i(N)$. Теорема доказана.


1. *Фоменко А. Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 1. – С. 145 – 173.
2. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Там же. – 1990. – **45**, № 2. – С. 49 – 77.
3. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерии эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1990. – **54**. – С. 546 – 575.
4. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем. – М.: Наука, 1994. – С. 131 – 140 (Тр. Мат. ин-та РАН; Т. 205).
5. *Sharko V. V.* Classification Morse functions on surfaces // Int. Conf. Chelyabinsk S. Univ.:

Lowdimensional Topology and Combinatorial Group Theory. – 1996. – P. 10 – 13.

6. *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., Sharko V. V.* On classification of flows on manifolds. I // Meth. Function. Analisys and Topology. – 1996. – **2**. – P. 51 – 60.
7. *Шарко В. В.* Функции на поверхностях. I // Некоторые вопросы современной математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 408 – 434 (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 25).
8. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса – Смейла на двумерных многообразиях // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 8. – С. 93 – 140.
9. *Максименко С. И.* Компоненты связности пространства отображений Морса // Некоторые вопросы современной математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 135 – 153 (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 25).
10. *Милнор Дж.* Теорема об $h$-кобордизме. – М.: Мир, 1969. – 116 с.
11. *Милнор Дж.* Теория Морса. – М.: Мир, 1965. – 112 с.
12. *Yankowski A., Rubinsztein R.* Functions with non-degenerate critical points on manyfolds with boundary // Ann. Soc. Math. Polon. Ser. I. Comment. Math. – 1972. – **16**. – P. 99 – 112.

Получено 27.05.99