УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко (Чернівец. ун-т)

СУКУПНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ І КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНО КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

We show that if X is a topological space, Y satisfies the second axiom of countability, and Z is a metrizable space, then, for every mapping $f\colon X \times Y \to Z$ which is horizontally quasicontinuous and continuous with respect to the second variable, a set of points $x \in X$ such that f is continuous at every point from $\{x\} \times Y$ is residual in X. We also generalized one Martin's result on quasicontinuity of separate quasicontinuous mappings.

Показано, що якщо X — топологічний простір, Y задовольняє другу аксіому зліченності і Z — метризовний простір, то для кожного відображення $f\colon X \times Y \to Z$, яке горизонтально квазінеперервне і неперервне відносно другої змінної, множина таких точок $x \in X$, що f неперервне в кожній точці з $\{x\} \times Y$, є залишковою в X. Крім того, узагальнено один результат Мартіна про квазінеперервність нарізно квазінеперервних відображень.

1. Поняття квазінеперервності, розвиваючи ідеї Гана [1], ввів Кемпістий [2] у зв'язку з дослідженням множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій f. Зокрема, при вивченні сукупної неперервності нарізно неперервних функцій від n змінних $f(x_1, \ldots, x_n)$ корисними є теореми про сукупну неперервність функцій $f(x, y)$, які квазінеперервні відносно x і неперервні відносно y, адже в цьому випадку функція $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, як правило, буде квазінеперервною відносно сукупності змінних $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Відповідна ідеологія розробляється в [3–5]. Між тим в роботі Бегеля [6] також наявна квазінеперервність певного типу під назвою „умова (А)", яка застосовується до дослідження сукупної неперервності функцій трьох дійсних змінних. Переосмислюючи цю умову для загального випадку топологічних просторів, ми одержуємо поняття, назване нами горизонтальною квазінеперервністю. А саме: відображення $f\colon X \times Y \to Z$, де X, Y і Z — топологічні простори, називається горизонтально квазінеперервним у точці $(x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(x_0, y_0)$ в Z, для кожного околу U точки x_0 в X і для кожного околу V точки y_0 в Y існують точка $(x_1, y_1) \in \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Якщо ця умова виконується в кожній точці з (x, y), то f називається горизонтально квазінеперервною.

Позначимо символом $K_hC(X, Y, Z)(K_hK(X, Y, Z))$ сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і неперервні (квазінеперервні) відносно другої змінної. В роботі [7] ми, розвиваючи підхід Бегеля з [6], одержали теорему про наявність точок сукупної квазінеперервності відображень з класу K_hC на неперервних кривих $L\colon y = g(x), x \in X$, звідки, зокрема, можна одержати результат про наявність точок сукупної неперервності відображень з класу K_hC на горизонталях $y = \text{const}$ точніший, ніж відповідний в [3]. Якщо скористатися теоремою Банаха про категорію [8, с. 87–90] в редакції з [9, с. 206], то одержимо такий результат.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z — метризовний простір і $f \in K_hC(X, Y, Z)$. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X\colon (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X.*

В цій роботі ми, модифікуючи метод з [4], одержуємо наступний результат, який узагальнює результати з [3, 4, 10].

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y задовольняє другу аксіо-*

му зліченності, Z *— метризовний простір і* $f \in K_hC(X, Y, Z)$. *Тоді множина* $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ *залишкова в* X.

Крім того, ми покращуємо результат Мартіна [11] про сукупну квазінеперервність нарізно квазінеперервних відображень.

Теорема 3. *Нехай* X *— берівський простір,* Y *задовольняє другу аксіому зліченності і* Z *— цілком регулярний простір. Якщо відображення* $f \in K_hK(X, Y, Z)$, *то* f *квазінеперервне.*

Попередні дослідження на цю тему викладені в [12], де подається, зокрема, повне доведення теореми 1 (див. також [9, с. 204]).

Зауважимо, що теореми 1 і 2 будуть змістовними лише у тому випадку, коли простір X є другої категорії в собі.

2. Для відображення $f: X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Позначимо через $\overline{C}C(X, Y, Z)$ сукупність всіх відображень $f: X \times Y \to Z$, для яких $f^x: X \to Z$ неперервне для кожного $x \in X$ і неперервне для всіх y з деякої всюди щільної в Y множини, що залежить від f.

В доведенні теореми 2 ми будемо спиратися на теорему 1, теорему Банаха про категорію і наступний результат [9, с. 199], що уточнює теорему Кальбрі–Труаліка з [10] і формулюється так: якщо X — топологічний простір, Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний і $f \in \overline{C}C(X, Y, Z)$, то множина $C_Y(f)$ залишкова в X.

***Доведення теореми* 2.** Спочатку припустимо, що простір X берівський. Зафіксуємо метрику на Z, яка породжує його топологію. Відстань між точками z' і z'' відносно цієї метрики позначимо через $|z' - z''|$. Оскільки Y задовольняє другу аксіому зліченності, то він сепарабельний. Нехай $Y_0 = \{y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n, \ldots\}$ — деяка всюди щільна в Y множина. Для кожного номера n покладемо $X_n = C_{y_n}(f)$. Оскільки множина $C(f)$ точок сукупної неперервності відображення f є типу G_δ, адже Z — метризовний простір, то і множина $C_y(f)$ для $y \in Y$, а значить, і всі множини X_n є типу G_δ. Згідно з теоремою 1 множини X_n будуть залишковими в X, тобто їх доповнення в X є першої категорії. Оскільки X — берівський простір, то всі X_n будуть всюди щільними в X. Далі, з беровості X випливає, що і перетин $X_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ є всюди щільною в X множиною типу G_δ, адже всі X_n є такими ж. Зокрема, X_0 є залишковою в X, що, втім, відразу випливає із залишковості X_n.

Розглянемо звуження $g = f_{|X_0 \times Y}$. Легко бачити, що $g \in \overline{C}C(X, Y, Z)$. За уточненою теоремою Калбрі–Труалліка множина $A = C_Y(g)$ є залишковою в X_0. Оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить, і в X, то $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A — залишкова в X. Залишилось показати, що $A \times Y \subseteq C(f)$, адже тоді $A \subseteq C_Y(f)$ і множина $C_Y(f)$ буде залишковою разом з A.

Нехай $(x_0, y_0) \in A \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки $(x_0, y_0) \in C(g)$, тому що $x_0 \in A = C_Y(g)$, то існують відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно в просторах X і Y такі, що для кожного $x \in U \cap X_0$ і для кожного $y \in V$ виконується нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$. Виберемо довільну точку (x, y) з $U \times V$. Зауважимо, що U є околом точки x в X, а V є околом точки y в Y, оскільки U і V відкриті. З горизонтальної неперервності функції f у точці (x, y) випливає, що існують відкрита непорожня множина U_1 в X і точка $y_1 \in V$ такі, що $U_1 \subseteq U$ і $|f(u, y_1) - f(x, y)| < \varepsilon/2$ для кожного $u \in U_1$. Скориставшись тим, що множина X_0 всюди щільна в X, виберемо точку x_1 з $U_1 \cap X_0$. Тоді $(x_1, y_1) \in U \times V$, отже, $|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$. У такому разі $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, звідки випливає, що $(x_0, y_0) \in C(f)$.

Нехай тепер X — довільний топологічний простір. Згідно з теоремою Банаха про категорію X можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $X_{\mathrm{I}} \cup X_{\mathrm{II}} \cup \Gamma$, де X_{I} — відкрита в X множина першої категорії, X_{I} — відкрита в X множина, яка є берівським простором в індукованій з X топології і Γ — замкнена ніде не щільна в X множина, що є межею множини X_{II}. Нехай $f_0 = f_{|X_{\mathrm{II}} \times Y}$. Зрозуміло, що $f_0 \in K_h C(X_{\mathrm{II}}, Y, Z)$. Оскільки X_{II} — берівський простір, то за доведеним вище множина $C_Y(f_0)$ залишкова в X_{II}, а значить, і в X, адже $X_{\mathrm{II}} = X \setminus (X_{\mathrm{I}} \cup \Gamma)$ залишкова в X. Але з відкритості X_{II} легко вивести, що $C_Y(f_0) \subseteq C_Y(f)$. Тому і множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.

3. ***Доведення теореми* 3.** Нехай Z — числова пряма $\mathbf{R}$, що розглядається зі своєю природною топологією, породженою абсолютною величиною $x \to |x|$. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і покажемо, що функція $f\colon X \times Y \to Z$ квазінеперервна в цій точці за сукупністю змінних. Розглянемо $\varepsilon > 0$ і відкриті околи U та V відповідно точок x_0 в X та y_0 в Y. Для цього нам потрібно знайти таку непорожню відкриту множину G в $X \times Y$, що $G \subseteq U \times V$ і $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$ для кожного $p \in G$.

Оскільки функція f горизонтально квазінеперервна в точці p_0, то існують точка $(x_1, y_1) \in U \times V$ і відкритий окіл U_1 точки x_1 в X такі, що $U_1 \subseteq U$ і $|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon/3$ для кожного $p \in U_1 \times \{y_1\}$. Відкритий підпростір V простору Y також задовольняє другу аксіому зліченності. Тому можна вибрати послідовність непорожніх відкритих в Y підмножин V_n, які утворюють базу топології підпростору V. Для кожного натурального n розглянемо множини

$$A_n = \left\{ x \in U_1 \colon (\forall y \in V_n)\left(|f(x, y) - f(x, y_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \right) \right\}.$$

Покажемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U_1$. Нехай $x \in U_1$. Оскільки функція f^x квазінеперервна в точці y_1 і V є околом y_1, то існують точка $b \in V$ і відкрита множина B в Y такі, що $b \in B \subseteq V$ і $|f(x, y) - f(x, y_1)| < \varepsilon/3$ для всіх $y \in B$. Взявши тепер такий елемент бази V_n, для якого $b \in V_n \subseteq B$, ми одержимо $|f(x, y) - f(x, y_1)| < \varepsilon/3$ для всіх $y \in V_n$, тобто $x \in A_n$, що й доводить потрібну рівність. Оскільки простір X берівський, то множина U_1 є другої категорії в X, отже, існує такий номер m, що множина A_m десь щільна в X. Покладемо $U_2 = U_1 \cap \operatorname{int} \overline{A_m}$. Зрозуміло, що U_2 — відкрита і непорожня, причому $U_2 \subseteq U_1 \cap \overline{A_m}$. Розглянемо непорожню відкриту в $X \times Y$ множину $G = U_2 \times V_m$ і довільну точку $p = (x, y) \in G$. З горизонтальної квазінеперервності функції f у точці p випливає, що існують точка $(x_2, y_2) \in G$ і окіл U_3 точки x_2 в X такі, що $U_3 \subseteq U_2$ і $|f(u, y_2) - f(x, y)| < \varepsilon/3$ для кожного $u \in U_3$. Оскільки $\overline{A_m} \supseteq U_2$, то $A_m \cap U_3 \neq \varnothing$. Виберемо точку $x_3 \in A_m \cap U_3$. Тоді $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x_3, y_2)| + |f(x_3, y_2) - f(x_3, y_1)| + |f(x_3, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, що й доводить теорему у випадку $Z = \mathbf{R}$.

Нехай тепер Z — довільний цілком регулярний простір і $f \in K_h K(X, Y, Z)$. Припустимо, що f не є квазінеперервним в якійсь точці $p_0 \in X \in Y$. Тоді існують відкритий окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і відкритий окіл O точки p_0 в добутку $X \times Y$ такі, що $f(H)$ не міститься у W для кожної непорожньої відкритої підмножини $H \subseteq O$. Оскільки Z цілком регулярний, то існує така неперервна функція $\varphi : Z \to [0, 1]$, що $\varphi(z_0) = 0$ і $\varphi(z) = 1$ при $z \notin W$. Покладемо $g = \varphi \circ f$. Зрозуміло, що $g \in K_h K(X, Y, Z)$, отже, за доведеним вище g квазінеперервна. Але це не так, тому що для довільної непорожньої відкритої множини $H \subseteq O$ існує точка $p \in H$, для якої $z = f(p) \notin W$, отже, $|g(p) - g(p_0)| = |\varphi(z) - \varphi(z_0)| = 1$, звідки випливає, що g не є квазінеперервною в точці p_0. Одержана суперечність завершує доведення теореми.

Аналогічно до горизонтальної квазінеперервності можна ввести поняття вертикальної квазінеперервності. Горизонтально і вертикально квазінеперервні функції вже не обов'язково повинні бути квазінеперервними. Це показує наступний приклад.

Нехай

$$A_n = \left\{ \frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} \right\},$$

де $n \in \mathbf{N}$, $A_0 = \varnothing$ і $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Визначимо функцію $f: [0, 1]^2 \to \mathbf{R}$ так: $f(x, y) = 1$, якщо $x \in A_{2m-1}$ і $y \in [0, 1] \setminus B_{2m-2}$, де $m \in \mathbf{N}$, або $y \in A_{2m-1}$ і $x \in [0, 1] \setminus B_{2m-1}$, де $m \in \mathbf{N}$, або якщо x і y не двійково раціональні; $f(x, y) = 0$, якщо $x \in A_{2m}$ і $y \in [0, 1] \setminus B_{2m-1}$, де $m \in \mathbf{N}$, або $y \in A_{2m}$ і $x \in [0, 1] \setminus B_{2m}$, де $m \in \mathbf{N}$.

Легко бачити, що так визначена функція буде горизонтально і вертикально квазінеперервною. В кожному прямокутнику, який міститься в $[0, 1]^2$, є точки зі значенням функції 0 і точки зі значенням 1. Це означає, що функція не є квазінеперервною.

1. *Hahn H.* Uber Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig ist // Math. Z. – 1919. – **4**. – S. 306–319.
2. *Kempisty S.* Sur les fonctions quasicontinues // Fund. math. – 1932. – **19**. – P. 184–197.
3 *Breckenridge J. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191–203.
4. *Маслюченко В. К.* Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць за ред. С. Д. Івасишина. – Чернівці, 1990. – С. 143–159.
5. *Troallic J.-P.* Quasi-continuité, continuité separée et topoligie extrémale // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **110**, № 3. – P. 819–827.
6. *Bögel K.* Über partiell diferenzierbare Funktionen // Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490–498.
7. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Про неперервність нарізно неперервних відображень на кривих // Мат. студ. – 1998. – **9**, № 2. – С. 205–210.
8. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
9. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Собчук О. В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 192–246.
10. *Calbrix J., Troallic J.-P.* Aplications separement continues // C. r. Acad. sci. A. – 1979. – **288**. – P. 647–648.
11. *Martin N. F. G.* Quasi-continuons functions on product spaces // Duke Math. J. – 1961. – P. 39–44.
12. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. – Чернівці, 1996. – 15 с. – Деп в УкрІНТЕІ, № 98-Укр 96.

Одержано 12.10.98,
після доопрацювання — 25.01.99