УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

КРИТЕРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We present a new proof of criteria of the asymptotic stability of systems of difference and differential equations on the basis of the properties of monotone operators in a semiordered space. We also obtain necessary and sufficient conditions of the asymptotic stability in the mean square of stochastic systems of differential and difference equations.

Наводиться нове доведення критеріїв асимптотичної стійкості систем різницевих і диференціальних рівнянь з використанням властивостей монотонних операторів у напівупорядкованому просторі. Отримано також необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному стохастичних систем диференціальних і різницевих рівнянь.

Пусть M — полуупорядоченное банахово конечномерное линейное пространство. Предполагается, что в пространстве M справедлива теорема Вейерштрасса, т. е. монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

1. Рассмотрим линейное разностное уравнение в пространстве M

$$x_{n+1} = Lx_n, \quad x_n \in M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где L — линейный ограниченный монотонный оператор в M, т. е. из неравенства $x \geq 0$ следует $Lx \geq 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы нулевое решение уравнения* (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо, чтобы при любом* $b > 0$, $b \in M$, *уравнение*

$$c = b + Lc \tag{2}$$

имело решение $c > 0$, $c \in M$.

Доказательство. При любом начальном значении x_0 решение неоднородного разностного уравнения

$$x_{n+1} = Lx_n + b, \quad x_n \in M, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

сходится к постоянному частному решению $x_n = c$.

При $x_0 = 0$ находим решение уравнения (3):

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} L^k b, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Последовательность x_n монотонно возрастает и $x_n \geq b > 0$. Поскольку x_n — элементы конечномерного пространства M, то из асимптотической устойчивости решения уравнения (1) вытекает существование предела

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} L^k b, \qquad c > 0. \tag{4}$$

Элемент $c \in M$ удовлетворяет уравнению (2).

Теорема 2. *Если уравнение* (2) *при некотором* $b > 0$ *имеет решение* $c > 0$, *то при любом* $b_1 > 0$ *уравнение*

$$c_1 = b_1 + Lc_1 \tag{5}$$

имеет решение $c_1 > 0$.

Доказательство. Всегда найдется $\rho > 0$ такое, что $\rho b > b_1$. Уравнение $c_2 = \rho b + Lc_2$ имеет частное решение

$$c_2 = \rho c = \sum_{k=0}^{\infty} L^k(\rho b), \qquad c_2 > 0,$$

которое мажорирует частное решение уравнения (5)

$$c_1 = \sum_{k=0}^{\infty} L^k b_1, \qquad c_1 > 0. \tag{6}$$

Из сходимости ряда (4) вытекает сходимость ряда (6).

Теорема 3. *Если уравнение* (2) *при некотором* $b > 0$ *имеет решение* $c > 0$, *то нулевое решение разностного уравнения* (1) *является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что при любом $b > 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} L^k b$ сходится. Любое начальное значение x_0 можно представить в виде $x_0 = b - a$, $b > 0$, $a > 0$. Из сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} L^k b - \sum_{k=0}^{\infty} L^k a$$

вытекает предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} L^k x_0 = 0,$$

которое доказывает справедливость теоремы.

Окончательно получаем важный результат.

Теорема 4. *Для того чтобы нулевое решение уравнения* (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $b > 0$, $b \in M$, *уравнение* (2) *имело решение* $c > 0$.

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 5. *Пусть* $x_{n,k} \in M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, l$, L_{sk}, $s, k = 1, \ldots, l$, — *монотонные операторы в* M. *Для того чтобы нулевое решение системы разностных уравнений*

$$x_{n+1,s} = \sum_{k=1}^{l} L_{sk} x_{n,k}, \qquad s = 1, \ldots, l, \tag{7}$$

было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых $b_s > 0$, $s = 1, \ldots, l$, *система уравнений*

$$c_s = b_s + \sum_{k=1}^{s} L_{sk} c_k, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{8}$$

имела решение $c_s > 0$, $s = 1, \ldots, l$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4 при использовании обозначений

$$x_n = \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \ldots \\ x_{n,l} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1l} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{l1} & L_{l2} & \ldots & L_{ll} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_l \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_l \end{pmatrix}.$$

Условие $b > 0$ равносильно системе неравенств $b_s > 0$, $s = 1, 2, \ldots, l$.

Теорема 6. *Пусть* L_k, $k = 1, \ldots, l$, *— монотонные в* M *операторы. Для того чтобы нулевое решение разностного уравнения в* M

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{l} L_k x_{n+1-k}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы при некотором $b > 0$ *уравнение*

$$c = b + \sum_{k=1}^{l} L_k c \tag{10}$$

имело решение $c > 0$.

Доказательство. Введем обозначение $x_{n,k} = x_{n+1-k}$, $k = 1, 2, \ldots, l$. При этом сведем разностное уравнение (9) к системе разностных уравнений вида (7)

$$x_{n+1,1} = \sum_{k=1}^{l} L_k x_{n,k}, \quad x_{n+1,s} = x_{n,s-1}, \quad s = 2, \ldots, l.$$

Система уравнений вида (8)

$$c_1 = b_1 + \sum_{k=1}^{l} L_k c_k, \quad c_s = b_s + c_{s-1}, \quad s = 2, \ldots, l,$$

преобразуется в уравнение вида (10)

$$c_1 = b + \sum_{k=1}^{l} L_k c_1, \quad b = b_1 + L_2 b_2 + L_3 (b_2 + b_3) + \ldots + L_l (b_2 + b_3 + \ldots + b_l).$$

При $b > 0$ всегда можно найти $b_s > 0$, $s = 1, \ldots, l$, удовлетворяющее последнему уравнению. Это доказывает справедливость теоремы 6.

2. В качестве приложений полученных результатов рассмотрим систему линейных уравнений

$$X_{n+1} = A X_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где X_n — m-мерный вектор, A — матрица размерности $m \times m$. Для того чтобы нулевое решение системы (11) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы было асимптотически устойчивым нулевое решение матричного разностного уравнения

$$D_{n+1} = A D_n A^*, \quad D_n = X_n X_n^*. \tag{12}$$

В качестве множества M рассмотрим множество симметрических матриц D размерности $m \times m$. Это множество можно сделать частично упорядоченным, если положить $D \geq 0$ при $X^* D X \geq 0$. При этом полагаем $D > 0$, если $X^* D X > 0$, $X \neq 0$, и $D_1 \geq D_2$, если $D_1 - D_2 \geq 0$.

Оператор L, определенный равенством в M

$$LD = ADA^*,$$

будет монотонным в M, так как при $D \geq 0$ имеем неравенство

$$X^* A D A^* X = (A^* X)^* D (A^* X) \geq 0 .$$

Из теоремы 4 получаем следующий известный результат [1].

Теорема 7. *Для того чтобы нулевое решение системы линейных разностных уравнений* (11) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение*

$$C = B + ACA^*, \quad B \in M, \tag{13}$$

при некоторой матрице $B > 0$ *имело решение* $C > 0$.

Теорема 8. *Пусть* $\xi_{n,s}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots, N$, *— последовательность независимых центрированных случайных величин с единичными дисперсиями*

$$\left\langle \left(\xi_{n,s}\right)^2 \right\rangle = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для того чтобы нулевое решение системы разностных уравнений со случайными коэффициентами

$$X_{n+1} = AX_n + \sum_{s=1}^{N} A_s \xi_{ns} X_n \tag{14}$$

было асимптотически устойчивым в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение

$$C = B + ACA^* + \sum_{s=1}^{N} A_s C A_s^* \tag{15}$$

при некоторой матрице $B > 0$ *имело решение* $C > 0$.

Доказательство следует из того, что матрица вторых моментов решения системы (14)

$$D_n = \left\langle X_n X_n^* \right\rangle$$

удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$D_{n+1} = AD_n A^* + \sum_{s=1}^{N} A_s D_n A_s^* .$$

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8 *для случайных величин* $\xi_{n,s}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots, N$.

Для того чтобы нулевое решение системы разностных уравнений

$$X_{n+1} = AX_n + \sum_{s=1}^{N} A_s \xi_{ns} X_{n-s} \tag{16}$$

было асимптотически устойчивым в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (15) *при некоторой матрице* $B > 0$ *имело решение* $C > 0$.

Доказательство следует из того, что матрица вторых моментов удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$D_{n+1} = AD_nA^* + \sum_{s=1}^{N} A_s D_{n-s} A_s^* .$$

3. Получим аналогичные результаты для систем линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t). \tag{17}$$

Перейдем от системы дифференциальных уравнений (17) к аппроксимирующей системе разностных уравнений

$$X_{n+1} = X_n + hAX_n + o(h^2)X_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Матричное уравнение (12) принимает вид

$$D_{n+1} = (E + hA)D_n(E + hA^*) + o(h^2)D_n,$$

а матричное уравнение (13) — вид

$$C = hB + (E + hA)C(E + hA^*) + o(h^2)C.$$

При $h \to 0$ получим известный результат А. М. Ляпунова [2].

Теорема 10. *Для того чтобы нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (17) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение*

$$AC + CA^* + B = 0$$

при некоторой матрице $B > 0$ *имело решение* $C > 0$.

4. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$dX(t) = AX(t)dt + \sum_{s=1}^{N} A_s X(t)\, dw_s(t), \qquad \dim X = m \times 1, \qquad \dim A = m \times m, \tag{18}$$

где $w_s(t)$, $s = 1, \ldots, N$, — независимые винеровские процессы с единичной дисперсией. Для искомой стохастической разностной модели при $dt = h$

$$X(t+h) = X(t) + AX(t)h + \sum_{s=1}^{N} A_s X(t)\big(w_s(t+h) - w_s(t)\big)$$

и для математического ожидания матриц вторых моментов

$$D(t) \equiv X(t)X^*(t)$$

получаем разностное уравнение

$$D(t+h) = (E + hA)D(t)(E + hA^*) + h\sum_{s=1}^{N} A_s D(t) A_s^* .$$

Отсюда и из теоремы 6 следует такая теорема.

Теорема 11. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела асимптотически устойчивое в среднем квадратичном нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы при некоторой матрице* $B > 0$ (*матрица* B *из* M) *матричное уравнение*

$$B + AC + CA^* + \sum_{s=1}^{N} A_s C A_s^* = 0 \tag{19}$$

имело решение $C > 0$.

Аналогично можно получить следующую теорему.

Теорема 12. *Для того чтобы нулевое решение системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*

$$dX(t) = AX(t)dt + \sum_{s=1}^{N} A_s X(t-\tau_s)\, dw_s(t), \qquad \tau_s \ge 0, \qquad \dim X = m \times m,$$

было асимптотически устойчивым в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы при $B > 0$ *матричное уравнение* (19) *имело решение* $C > 0$.

Аналогичные результаты с использованием аппарата функций Ляпунова были получены в работах [3, 4].

1. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.

Получено 15.11.99,
после доработки — 11.07.2000