УДК 517.537.72

М. М. Шеремета (Львів. ун-т)

ПРО ЗРОСТАННЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

We establish the relation between the increase of quantity $\mathfrak{M}(\sigma, F) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)$ and the behavior of sequences $(|a_n|)$ and (λ_n), where (λ_n) is a sequence of nonnegative numbers increasing to $+\infty$, and $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$, is the Dirichlet entire series.

Вивчено зв'язок між зростанням величини $\mathfrak{M}(\sigma, F) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)$ і поведінкою послідовностей $(|a_n|)$ та (λ_n), де (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$, — цілий ряд Діріхле.

1. Вступ. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а ряд Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно збігається в $\mathbb{C}$, тобто є цілим.

Покладемо

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n).$$

Якщо послідовність λ задовольняє умову

$$\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n), \qquad n \to \infty,$$

то за теоремою Рітта [1, с.176]

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)}{\sigma} = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Теорема Рітта узагальнювалась і доповнювалась у багатьох працях, а всі отримані ними формули, які описували зв'язок між зростанням $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ і спаданням a_n, є справедливими при відповідних умовах на швидкість зростання послідовності λ.

Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Нехай для $\Phi \in \Omega$ φ — функція, обернена до Φ', а

$$\Psi(x) = x - \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)}$$

— функція, спряжена за Ньютоном до Φ.

Б. В. Винницький поставив задачу: знайти необхідну і достатню умову на коефіцієнти і показники ряду (1) для того, щоб існували додатні сталі A і B такі, що

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le A\,\Phi(\sigma + B) \tag{2}$$

для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$; при цьому швидкість зростання послідовності λ може бути будь-якою.

Наступна теорема дає розв'язок цієї задачі.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того щоб для деяких додатних сталих A і B і для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ виконувалась нерівність (2), необхідно і досить, щоб*

© М. М. ШЕРЕМЕТА, 1999

існували додатні сталі A_1 *і* B_1 *такі, що для всіх* $x \geq 0$

$$\ln \sum_{\lambda_n \geq x} |a_n| \leq x\Psi(\varphi(A_1 x)) + B_1 x. \tag{3}$$

Для доведення теореми 1 нам потрібні деякі допоміжні результати.

2. Критерій цілості ряду Діріхле. Покладемо

$$\tau = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln n.$$

З теореми Валірона [1, с.115] випливає, що якщо $\tau = 0$ і

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \to +\infty, \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

то ряд Діріхле (1) є цілим. З іншого боку, якщо для деяких числа $K > 0$ і зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел справедлива нерівність

$$\frac{1}{\lambda_{n_k}} \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} \leq K, \qquad k \in \mathbb{N},$$

то

$$|a_{n_k}| \exp\{K\lambda_{n_k}\} \geq 1,$$

і ряд (1) не є цілим. Отже, у випадку $\tau = 0$ умова (4) є необхідною і достатньою для цілості ряду (1). Природним є питання про необхідну і достатню умову цілості ряду (1), якщо умова $\tau = 0$ не виконується. Справедливим є такий критерій.

Теорема 2. *Для того щоб ряд Діріхле (1) був цілим, необхідно і досить, щоб*

$$r_n \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|} \to \infty, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Доведення. Якщо ряд (1) є цілим, то він абсолютно збіжний в точці $s = 0$. Але відомо [1, с.118], що в цьому випадку абсциса A абсолютної збіжності обчислюється за формулою

$$A = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|}, \tag{6}$$

і оскільки $A = +\infty$, ми маємо співвідношення (5). Навпаки, якщо виконується (5), то

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_n| = \exp\{-r_n \lambda_n\} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

і, отже, ряд (1) абсолютно збіжний в точці $s = 0$, а його абсциса абсолютної збіжності за формулою (6) дорівнює $+\infty$.

3. Інтегральне зображення. Покладемо

$$T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad T(x) = \sum_{\lambda_k \geq x} a_k, \qquad 0 \leq x < +\infty.$$

Тоді $T_0 = T(0) = F(0)$, $T(x) = T_n = T(\lambda_n)$ при $\lambda_{n-1} < x \leq \lambda_n$ і за теоремою 2

$$\frac{1}{x} \ln \frac{1}{|T(x)|} = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{|T_n|} \geq \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|} \to \infty$$

при $\lambda_{n-1} < x \leq \lambda_n$ і $n \to \infty$. Тому для кожного $\sigma > 0$ при $x \geq x_0(\sigma)$ маємо нерівність $|T(x)| \le \exp\{-\sigma x\}$, тобто $T(x)\exp(\sigma x) = o(1)$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $\sigma \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Для цілого ряду Діріхле (1) справедливі зображення*

$$\int_0^\infty T(x)\, e^{sx}\, dx = \frac{F(s) - F(0)}{s}, \qquad s \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

і

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma + it)}{t^2 + \sigma^2} e^{-itx}\, dt = T(x)\, e^{\sigma x} + \sum_{\lambda_n < x} a_k e^{\sigma\lambda_k} e^{-(x-\lambda_k)\sigma} \tag{8}$$

для кожного $\sigma > 0$ *і всіх* $x \ge 0$.

Доведення. Для кожного $s \in \mathbb{C}$ маємо

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n - T_{n+1}\right)\exp(s\lambda_n) = T_0 + \sum_{j=1}^{\infty} T_j\left(e^{s\lambda_j} - e^{s\lambda_{j-1}}\right) =$$

$$= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n s \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} e^{sx}\, dx = F(0) + s\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} T(x)\, e^{sx}\, dx =$$

$$= F(0) + s\int_0^\infty T(x)\, e^{sx}\, dx,$$

тобто справедлива рівність (7).

Доведемо рівність (8). Маємо

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma+it)}{t^2+\sigma^2} e^{-itx}\, dt = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{(\sigma+it)\lambda_k} \frac{e^{-itx}}{t^2+\sigma^2}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{\sigma\lambda_k} \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\lambda_n - x)t}}{t^2+\sigma^2}\, dt. \tag{9}$$

Якщо $x \ne \lambda_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda_n > x$, то

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\lambda_n - x)t}}{t^2+\sigma^2}\, dt = \frac{\sigma}{\pi} 2\pi i \operatorname*{res}_{t = i\sigma} \frac{e^{i(\lambda_n - x)t}}{t^2+\sigma^2} = e^{-\sigma(\lambda_n - x)}.$$

Якщо ж $x \ne \lambda_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda_n < x$, то

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\lambda_n - x)t}}{\sigma^2+t^2}\, dt = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(x-\lambda_n)t}}{t^2+\sigma^2}\, dt = e^{-\sigma(x-\lambda_n)}.$$

Тому якщо $x \ne \lambda_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$, то з рівності (9) одержуємо

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma+it)}{t^2+\sigma^2} e^{-itx}\, dt =$$

$$= \sum_{\lambda_k > x} a_k\, e^{\sigma\lambda_k} e^{-\sigma(\lambda_k - x)} + \sum_{\lambda_k < x} a_k\, e^{\sigma\lambda_k} e^{-\sigma(x-\lambda_k)} =$$

$$= T(x)\, e^{sx} + \sum_{\lambda_k < x} a_k\, e^{\sigma\lambda_k} e^{-\sigma(x-\lambda_k)}.$$

Отже, рівність (8) в цьому випадку доведено.

Нехай тепер $x=\lambda_n$ при деякому n. Тоді

$$\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\sigma+it)}{t^2+\sigma^2}e^{-itx}\,dt = \sum_{\lambda_k<\lambda_n} a_k e^{\sigma\lambda_k}\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\lambda_k-\lambda_n)t}}{t^2+\sigma^2}dt +$$

$$+ a_n e^{\sigma\lambda_n}\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\sigma^2} + \sum_{\lambda_k>\lambda_n} a_k e^{\sigma\lambda_k}\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\lambda_k-\lambda_n)t}}{t^2+\sigma^2}dt =$$

$$= \sum_{\lambda_k<\lambda_n} a_k e^{\sigma\lambda_k} e^{-\sigma(\lambda_k-\lambda_n)} + a_n e^{\sigma\lambda_n} + \sum_{\lambda_k>\lambda_n} a_k e^{\sigma\lambda_k} =$$

$$= \sum_{\lambda_k<\lambda_n} a_k e^{\sigma\lambda_k} e^{-\sigma(\lambda_k-\lambda_n)} + T(\lambda_n)e^{\sigma\lambda_n},$$

тобто і в цьому випадку рівність (6) доведено.

4. Зростання функцій, спряжених за Юнгом. Припустимо тепер, що на $(0,+\infty)$ задана відмінна від $+\infty$ функція P (вона може набувати значення $-\infty$, але $\not\equiv -\infty$). Функція $Q(x)=\sup\{P(t)+xt:\ t>0\}$ називається спряженою з P за Юнгом.

Теорема 4. *Нехай $\Phi\in\Omega$. Для того щоб $Q(x)\le\Phi(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб $P(t)\le -t\Psi(\varphi(t))$ для всіх $t>0$.*

Доведення. Якщо $Q(x)\le\Phi(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, то $P(t)\le Q(x)-xt\le$ $\le\Phi(x)-xt$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, $t>0$. Звідси при $x=\varphi(t)$ маємо

$$P(t)\le\Phi(\varphi(t))-t\varphi(t) = -t\left(\varphi(t)-\frac{\Phi(\varphi(t))}{\Phi'(\varphi(t))}\right) = -t\Psi(\varphi(t))$$

для всіх $t>0$.

Навпаки, якщо $P(t)\le -t\Psi(\varphi(t))$ для всіх $t>0$, то

$$Q(t)\le\sup\{-t\Psi(\varphi(t))+xt:\ t>0\} =$$

$$=\sup\{-\Phi'(y)\Psi(y)+x\Phi'(y):\ y\in\mathbb{R}\} =$$

$$=\sup\{-y\Phi'(y)+\Phi(y)+x\Phi'(y):\ y\in\mathbb{R}\} =$$

$$=\sup\{(x-y)\Phi'(y)+\Phi(y):\ y\in\mathbb{R}\} = \Phi(x),$$

оскільки при $y=x$ вираз у фігурних дужках дорівнює $\Phi(x)$ і

$$\Phi(x)-\Phi(y) = \int\limits_y^x\Phi'(t)\,dt \ge (x-y)\Phi'(y),$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$ і $y\in\mathbb{R}$. Теорему 4 доведено.

5. Доведення теореми 1. Досить довести, що якщо коефіцієнти ряду (1) є додатними, то для того щоб $\ln F(\sigma)\le A\,\Phi(\sigma+B)$ для всіх $\sigma\in\mathbb{R}$ при деяких додатних сталих A і B, необхідно і досить, щоб

$$\ln T(x)\le -x\Psi(\varphi(A_1x))+B_1x \tag{10}$$

для всіх $x>0$, де A_1 і B_1 — додатні сталі.

Якщо $a_n>0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то $T(x)>0$, $x>0$, і з (7) випливає

$$F(\sigma) = F(0) + \sigma \int\limits_0^{\infty} T(x)\, e^{\sigma x}\, dx = F(0) + \sigma \int\limits_0^{\infty} T(x)\, e^{(\sigma+\varepsilon)x}\, e^{-\varepsilon x}\, dx \le$$

$$\le F(0) + \sigma\mu(\sigma+\varepsilon) \int\limits_0^{\infty} e^{-\varepsilon x}\, dx = F(0) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mu(\sigma+\varepsilon), \tag{11}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, а

$$\mu(\sigma) = \sup\{T(x)e^{\sigma x} \colon x \ge 0\}.$$

А з (8) маємо

$$T(x)\, e^{\sigma x} < \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sigma+it)}{t^2+\sigma^2} e^{-itx}\, dt \le \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(\sigma+it)|}{t^2+\sigma^2} dt \le$$

$$\le \frac{\sigma}{\pi} F(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sigma^2} = F(\sigma)$$

для всіх $x \ge 0$ і $\sigma \in \mathbb{R}$. Тому

$$\mu(\sigma) \le F(\sigma), \qquad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Якщо тепер $\ln F(\sigma) \le A\,\Phi(\sigma + B)$, то з (12) випливає $\ln\mu(\sigma) \le A\Phi(\sigma+B)$, і за теоремою 4 з $A\Phi(\sigma+B)$ замість $\Phi(\sigma)$ для всіх $x > 0$ справедлива нерівність

$$\ln T(x) \le -\, x\left\{\Psi\left(\varphi\left(\frac{x}{A}\right)\right) - B\right\},$$

тобто маємо (10) з $A_1 = \dfrac{1}{A}$ і $B_1 = B$.

Навпаки, якщо виконується (10), то за теоремою 4 справджується нерівність $\ln\mu(\sigma) \le \dfrac{1}{A_1}\Phi\big(\sigma + B_1\big)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ і завдяки (11)

$$\ln F(\sigma) \le \ln^+\left\{F(0) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mu(\sigma+\varepsilon)\right\} \le \ln^+ F(0) + \ln^+\frac{\sigma}{\varepsilon} + \ln\mu(\sigma+\varepsilon) + \ln 2 \le$$

$$\le \ln^+ F(0) + \ln^+\frac{\sigma}{\varepsilon} + \ln 2 + \frac{1}{A_1}\Phi(\sigma + B_1 + \varepsilon).$$

Оскільки $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$, звідси випливає існування сталих $A > 0$ і $B > 0$ таких, що $\ln F(\sigma) \le A\,\Phi(\sigma+B)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$.

Теорему 1 доведено.

З теореми 1 випливає справедливість такої теореми.

Теорема 5. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб для кожного* $\varepsilon > 0$ *існувала стала* $A(\varepsilon) > 0$ *така, що*

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Phi((1+\varepsilon)\sigma) + A(\varepsilon)$$

для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$ *існувала стала* $A_1(\varepsilon)$ *така, що*

$$\ln \sum_{\lambda_n \le x} |a_n| \le -\frac{x}{1+\varepsilon}\Psi\left(\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)\right) + A_1(\varepsilon)x.$$

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Одержано 17.04.97