УДК 517.956.223

В. Н. Лось, Я. А. Ройтберг (Черпигов. пед. ип-т)

О ЗАДАЧЕ СОБОЛЕВА В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

In a bounded domain G with boundary ∂G which consists of components of different dimensions, we consider the elliptic boundary-value problem in complete scales of Banach spaces. Orders of boundary expressions are arbitrary, they are pseudodifferential along ∂G. We prove the theorem on complete set of isomorphisms and generalize its application. The results obtained are true for elliptic with a parameter and parabolic Sobolev problems as well as for systems with the Douglis – Nirenberg structure.

В обмеженій області G з межею ∂G, що складається з компонент різних розмірностей, розглядається еліптична гранична задача в повних шкалах банахових просторів. Порядки граничних виразів довільні, вони псевдодиференціальні вздовж ∂G. Доведено теорему про повний набір ізоморфізмів, розвинуто її застосування. Результати залишаються вірними для еліптичних з параметром і параболічних задач Соболева, а також для систем структури Дугліса – Ніренберга.

1. Понятие обобщенного решения задачи Соболева. Пусть $G \subset R^n$ — ограниченная область; $\partial G = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\overline{k}}$ — ее граница; Γ_0 — $(n-1)$-мерное компактное многообразие без края — внешняя граница G; Γ_j, $j = 1, \ldots, \overline{k}$ — i_j-мерное компактное многообразие без края; $0 \le i_j \le n-1$, расположенное внутри Γ_0; $i_j' = n - i_j$ — коразмерность Γ_j; $\Gamma_j \in C^\infty$, $j = 0, \ldots, \overline{k}$; $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \varnothing$, $j \ne k$. Задача Соболева — это граничная задача в G, для которой граничные условия задаются линейными граничными выражениями на многообразиях $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{\overline{k}}$.

Задача Соболева в классах гладких функций изучена достаточно полно (см. [1 – 3] и приведенную там библиографию). Между тем в работах Лионса – Мадженеса, Ю. М. Березанского, С.Г. Крейна, Я. А. Ройтберга эллиптические задачи изучены в полных шкалах банаховых и гильбертовых пространств, для них установлены теоремы о полном наборе изоморфизмов, нашедшие многочисленные приложения (см. [4, 5] и приведенную там библиографию). В полных шкалах банаховых пространств задача Соболева изучена в [6, 7], где предполагается, что граничные выражения на Γ_j, $j = 1, \ldots, \overline{k}$, образуют системы Дирихле, и что порядки граничных выражений на Γ_0 ниже порядка уравнения. В данной работе освобождаемся от этих ограничений. Кроме того, все выражения вдоль Γ_k, $k = 0, \ldots, \overline{k}$, вообще говоря, псевдодифференциальны.

Рассмотрим задачу

$$L(x, D)\,u = f \quad \text{в } G; \quad \operatorname{ord} L = 2m, \tag{1}$$

$$B_{j0}(x, D)u|_{\Gamma_0} = \varphi_{j0}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \operatorname{ord} B_{j0} = q_{j0}, \tag{2}$$

$$B_{jk}(x, D)u|_{\Gamma_k} = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, m_k, \quad k = 1, \ldots, \overline{k}, \quad \operatorname{ord} B_{jk} = q_{jk}. \tag{3}$$

Пусть

$$\begin{gathered} r = \max\{2m, q_{10}+1, \ldots, q_{m0}+1\}, \\ q_k = q_{1k} \ge q_{2k} \ge \ldots \ge q_{m_k,k}, \quad k = 1, \ldots, \overline{k}. \end{gathered} \tag{4}$$

Предполагается, что задача (1), (2) — эллиптическая в $\overline{G}$, т. е. что выражение L правильно эллиптично в $\overline{G}$, а выражения $\{B_{j0}\}$ удовлетворяют на Γ_0 условиям Лопатинского (см., например, [2 – 7]). Предполагается также, что условия (3) определяют на Γ_k для каждого $k = 1, \ldots, \bar{k}$ эллиптическую по Дуглису – Ниренбергу систему (см. ниже, п. 4).

Введем в окрестности

$$G_{0\delta} = \{x \in G\colon \operatorname{dist}(x, \Gamma_0) < \delta\} \quad (\delta > 0 \text{ — достаточно мало})$$

локальные координаты $(x', x_n) = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ так, что $(x', 0)$ — локальные координаты на Γ_0, а $x_n = \operatorname{dist}(x, \Gamma_0)$. Выражение $L(x, D)$ представим в виде

$$L(x, D) = \sum_{k=0}^{2m} L_k(x, D') D_\nu^k, \tag{5}$$

а выражения $D_\nu^{j-1} L(x, D)|_{\Gamma_0}$ — в виде

$$D_\nu^{j-1} L(x, D)|_{\Gamma_0} = \sum_{k=0}^{2m+j-1} L_{kj}(x', D') D_\nu^k, \quad j = 1, \ldots, r - 2m. \tag{6}$$

Здесь $L_k(x, D')$ и $L_{kj}(x', D')$ — тангенциальные дифференциальные (или псевдодифференциальные) выражения порядков $2m - k$ и $2m - k + j$ соответственно, а $D_\nu = i\partial/\partial\nu$, ν — нормаль к Γ_0. Аналогично введем в окрестности

$$G_{k\delta} = \{x \in G\colon \operatorname{dist}(x, \Gamma_k) < \delta\}, \quad k = 1, \ldots, \bar{k},$$

локальные координаты $(t, y) = (t_1, \ldots, t_{i_k}, y_1, \ldots, y_{i'_k})$ так, чтобы $(t, 0) = (t_1, \ldots, t_{i_k}, 0)$ были локальными координатами на Γ_k, а $(0, y) = (0, y_1, \ldots, y_{i'_k})$ — координатами в шаре $|y| < \delta$. Запишем выражения (2), (3) в виде

$$B_{j0}(x, D) = \sum_{l=1}^{q_{j0}+1} B_{jl}(x, D') D_\nu^{l-1}, \tag{7}$$

$$j = 1, \ldots, m; \quad x \in \Gamma_0; \quad \operatorname{ord} B_{jl} \le q_{j0} - l + 1,$$

$$B_{jk}(x, D) = \sum_{|\beta| \le q_{jk}} T_{kj\beta}(t, D_t) D_y^\beta, \tag{8}$$

$$D_y^\beta = D_{y_1}^{\beta_1} \ldots D_{y_{i'_k}}^{\beta_{i'_k}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_{i'_k}, \quad k = 1, \ldots, \bar{k},$$

$$(t, 0) \in \Gamma_k; \quad j = 1, \ldots, m_k; \quad \operatorname{ord} T_{kj\beta} \le q_{jk} - |\beta|;$$

коэффициенты дифференциальных выражений L и B_{jk}, $k = 0, \ldots, \bar{k}$; $j = 1, \ldots, m_k$; $m_0 = m$, предполагаем, для простоты, бесконечно гладкими соответственно в $\overline{G}$ и Γ_k. С помощью интегрирования по частям из (5) получим

$$(Lu, v) = (u, L^+ v) - i \sum_{j=1}^{2m} \langle D_\nu^{j-1} u, M_j(x, D) v \rangle_{\Gamma_0}, \quad u, v \in C^\infty(\overline{G}), \tag{9}$$

$$M_j v = \sum_{k=j}^{2m} D_\nu^{k-j} L_k^+(x, D') v, \quad \operatorname{ord} M_j = 2m - j.$$

Здесь и ниже символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают скалярные произведения (или их расширения) соответственно в $L_2(G)$ и $L_2(\Gamma_k)$; L^+ и L_k^+ — выражения, формально сопряженные соответственно к L и L_k.

Отождествим элемент $u\in C^\infty(\overline{G})$ с вектором

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_r, \left(u_{k\beta}\colon k=1,\ldots,\overline{k},\, |\beta|\le q_k\right)\right),$$
$$u_0 = u|_{\overline{G}},\quad u_j = D_\nu^{j-1}u|_{\Gamma_0},\quad j=1,\ldots,r,\quad u_{k\beta} = D_y^\beta u|_{\Gamma_k}, \tag{10}$$

а элемент $f\in C^\infty(\overline{G})$ с вектором

$$f = (f_0,\ldots,f_{r-2m}),\quad f_0 = f|_{\overline{G}},\quad f_j = D_\nu^{j-1}f|_{\Gamma_0},\quad 1\le j\le r-2m. \tag{11}$$

Поскольку $u\in C^\infty(\overline{G})$ является решением уравнения (1), если

$$(Lu,v) = (f,v),\quad v\in C^\infty(\overline{G}),$$

и

$$D_\nu^{j-1}Lu|_{\Gamma_0} = D_\nu^{j-1}f|_{\Gamma_0},\quad j=1,\ldots,r-2m,$$

то из (9) и (6) следует, что вектор (10) $u\in C^\infty(\overline{G})$ является решением уравнения (1), если

$$(u_0, L^+v) - i\sum_{j=1}^{2m}\langle u_j, M_j v\rangle = (f_0, v),\qquad v\in C^\infty(\overline{G}), \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+j-1} L_{kj}(x',D')u_{k+1} = f_j,\qquad 1\le j\le r-2m. \tag{13}$$

Аналогично из (7), (8) следует, что вектор (10) $u\in C^\infty(\overline{G})$ удовлетворяет равенствам (2), (3), если соответственно

$$B_{j0}u|_{\Gamma_0} \equiv \sum_{l=1}^{q_{j0}+1} B_{jl}(x,D')u_l = \varphi_j,\qquad j=1,\ldots,m, \tag{14}$$

$$B_{jk}u|_{\Gamma_k} \equiv \sum_{|\beta|\le q_{jk}} T_{kj\beta}(x,D_t)u_{k\beta} = \varphi_{jk},\qquad k=1,\ldots,\overline{k},\quad j=1,\ldots,m_k. \tag{15}$$

Таким образом, элемент $u\in C^\infty(\overline{G})$ является решением задачи (1) – (3), если выполнены соотношения (12) – (15).

Эти рассмотрения приводят к понятию обобщенного решения задачи (1) – (3). Пусть u, f — векторы (10), (11), где u_0, f_0 — обобщенные функции в $\overline{G}$, а $\{u_j, f_l\}$ и $u_{k\beta}$ — обобщенные функции соответственно в Γ_0 и Γ_k. Тогда вектор u назовем обобщенным решением задачи (1) – (3), если выполнены соотношения (12) – (15). Соотношения (12) – (15) задают отображение

$$\mathfrak{A}:\, u\mapsto F = (f,\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{\overline{k}}),\qquad f = (f_0,\ldots,f_{r-2m}), \tag{16}$$

тесно связанное с задачей (1) – (3). Для изучения этого отображения и более точного определения обобщенного решения следует ввести соответствующие функциональные пространства.

2. Функциональные пространства. Пусть $p, p' \in (1, \infty)$, $1/p + 1/p' = 1$, $s \in R$. Через $H^{s,p}(R^n)$ обозначим пространство бесселевых потенциалов — множество всех $f \in S'(R^n)$ с нормой

$$\left\| f, R^n \right\|_{s,p} = \left\| F^{-1} \langle\langle \xi \rangle\rangle^s F f \right\|_{L_p(R^n)}, \quad \langle\langle \xi \rangle\rangle = \left(1 + |\xi|^2\right)^{1/2}.$$

Пространства $H^{s,p}(R^n)$ и $H^{-s,p'}(R^n)$ взаимно сопряжены относительно расширения скалярного произведения в $L_2(R^n)$ [5, 8].

Через $H^{s,p}(G)$, $s \geq 0$, обозначим пространство сужений элементов из $H^{s,p}(R^n)$ с фактор-топологией, $\| u, G \|_{s,p} = \inf \left\| v, R^n \right\|_{s,p}$ — норма в $H^{s,p}(G)$ (здесь inf берется по всем $v \in H^{s,p}(R^n)$, равным u в G). Поэтому

$$H^{s,p}(G) = H^{s,p}(R^n) \,/\, H^{s,p}_{CG}(R^n), \tag{17}$$

где $H^{s,p}_{CG}(R^n) = \left\{ v \in H^{s,p}(R^n) \colon \operatorname{supp} v \subset R^n \setminus G \right\}$ — подпространство пространства $H^{s,p}(R^n)$. Через $H^{-s,p}(G)$, $s \geq 0$, обозначим пространство, сопряженное $H^{s,p'}(G)$ относительно расширения $(\cdot\,,\cdot)$ скалярного произведения в $L_2(G)$. Тогда из (17) следует [5, 8], что

$$H^{-s,p}(G) \simeq H^{-s,p}_{\overline{G}}(R^n) = \left\{ f \in H^{-s,p}(R^n) \colon \operatorname{supp} f \subset \overline{G} \right\}.$$

Поскольку при $s \geq 0$ в $H^{s,p}(R^n)$ нет элементов, сосредоточенных на Γ_k, $k = 1, \ldots, \overline{k}$, то

$$H^{s,p}(G) \simeq H^{s,p}(G \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\overline{k}}), \quad s \in R.$$

Через $B^{s,p}(\Gamma_k)$, $k = 0, \ldots, \overline{k}$, обозначим пространство Бесова, $\langle\langle \varphi, \Gamma_k \rangle\rangle_{s,p}$ — норма в нем. Пространства $B^{s,p}(\Gamma_k)$ и $B^{-s,p'}(\Gamma_k)$ взаимно сопряжены относительно расширения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_k}$ скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$.

Пусть

$$s \in R, \quad s \neq j + \frac{i'_k}{p}, \quad j = 0, \ldots, q_k, \quad k = 1, \ldots, \overline{k}, \quad q_0 = r. \tag{18}$$

Через $\widetilde{H}^{s,p}$ обозначим пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$|||u|||_{s,p} = \Big(|||u|||^p_{s,p} + \sum_{j=1}^{r} \langle\langle D_\nu^{j-1} u, \Gamma_0 \rangle\rangle^p_{s-j+1-1/p,p} + \\ + \sum_{k=1}^{\overline{k}} \sum_{|\alpha| \leq q_k} \langle\langle D_y^\alpha u, \Gamma_k \rangle\rangle^p_{s-|\alpha|-i'_k/p,p} \Big)^{1/p}. \tag{19}$$

Для $u \in C^\infty(\overline{G})$ норма (19) совпадает с нормой вектора (10) в пространстве

$$\mathfrak{H}^{s,p} = H^{s,p}(G) \times \prod_{j=1}^{r} B^{s-j+1-1/p,p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\overline{k}} \prod_{|\alpha| \leq q_k} B^{s-|\alpha|-i'_k/p,p}(\Gamma_k). \tag{20}$$

Поэтому пространство $\widetilde{H}^{s,p}$ изометрично замыканию $\mathfrak{H}^{s,p}_0$ пространства векторов $C^\infty(\overline{G})$ (10) в $\mathfrak{H}^{s,p}$, и можно отождествить $\widetilde{H}^{s,p}$ с $\mathfrak{H}^{s,p}_0$.

Следовательно, $\widetilde{H}^{s,p}$ совпадает с подпространством $\mathfrak{H}^{s,p}_0$ пространства векторов

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_r, \{u_{\alpha k}\colon k = 1, \ldots, \bar{k};\ |\alpha| \le q_k\}\right) \in \mathfrak{H}^{s,p}. \tag{21}$$

При этом $u \in \mathfrak{H}^{s,p}$ принадлежит $\mathfrak{H}_0^{s,p} \simeq \tilde{H}^{s,p}$ в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} u_j &= D_\nu^{j-1} u_0 \,|_{\Gamma_0} \quad (\forall j\colon s - j + 1 - 1/p > 0), \\ u_{\alpha k} &= D_y^{\alpha} u_0 \,|_{\Gamma_k} \quad (\forall \alpha, k\colon s - |\alpha| - i'_k / p > 0) \end{aligned} \tag{22}$$

(ср. [5, 9]); если $s < 1/p$, то $\mathfrak{H}_0^{s,p} = \mathfrak{H}^{s,p} = \tilde{H}^{s,p}$.

Таким образом, пространство $\tilde{H}^{s,p}$ состоит из векторов (21), удовлетворяющих условиям (22). Через $\tilde{H}^{s,p,(r)}$ [5] обозначим пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$|||u|||_{s,p,(r)} = \Big(\|u\|_{s,p}^p + \sum_{j=1}^{r} \langle\langle D_\nu^{j-1} u, \Gamma_0 \rangle\rangle_{s-j+1-1/p,p}^p \Big)^{1/p}. \tag{23}$$

Пространство $\tilde{H}^{s,p,(r)}$ состоит из векторов

$$(u_1, \ldots, u_r) = H^{s,p}(G) \times \prod_{j=1}^{r} B^{s-j+1-1/p,p}(\Gamma_0)$$

таких, что $u_j = D_\nu^{j-1} u_0 \,|_{\Gamma_0}$ $\forall j\colon s - j + 1 - 1/p > 0$. Если вектор (21) принадлежит $\tilde{H}^{s,p}$, то $(u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$. Наоборот, каждый вектор $(u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$ можно продолжить до элемента $\tilde{H}^{s,p}$.

Аналогично определяется пространство $\tilde{H}^{s,p,(r-2m)}$. Для исключенных значений s пространства $\tilde{H}^{s,p}$ и $\tilde{H}^{s,p,(r)}$ и нормы (18), (22) определяются с помощью комплексной интерполяции.

Теорема 1 (ср. [5–7, 9]). *Для каждого $s \in R$ и $p \in (1, \infty)$ замыкание $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{s,p}$ отображения*

$$u \to \Big(Lu\,|_{\overline{G}},\ \big(D_\nu^{j-1} Lu\,|_{\Gamma_0} \;\big|\; j\colon 1 \le j \le r - 2m\big),\ B_{10}u\,|_{\Gamma_0}, \ldots, B_{m0}u\,|_{\Gamma_0},$$

$$\big(B_{jk}u\,|_{\Gamma_k}\colon k = 1, \ldots, \bar{k};\ j = 1, \ldots, m_k\big)\Big), \quad u \in C^\infty(\overline{G}),$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\tilde{H}^{s,p} \to K^{s,p} :=$$

$$:= \tilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)} \times \prod_{j=1}^{m} B^{s-q_{j0}-1/p,p}(\Gamma_0) \times \prod_{k=1}^{\bar{k}} \prod_{j=1}^{m_k} B^{s-q_{jk}-i'_k/p,p}(\Gamma_k). \tag{24}$$

Если $s_1 \le s$, $p_1 \le p$, то оператор $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_{s_1,p_1}$ является расширением по непрерывности оператора $\mathfrak{A}_{s,p}$.

Определение. *Элемент $u \in \tilde{H}^{s,p}$, для которого*

$$\mathfrak{A}_{s,p}\, u = F = (f, \varphi_{10}, \ldots, \varphi_{m0}, \{\varphi_{jk}\}) \in K^{s,p}$$

называется обобщенным решением задачи (1) – (3).

С помощью предельного перехода легко убедиться, что *элемент $u \in \tilde{H}^{s,p}$ является обобщенным решением задачи* (1) – (3) *в том и только в том случае,* *когда выполнены соотношения* (12) – (15). Отметим также, что если элемент (21) $u \in \tilde{H}^{s,p}$ является обобщенным решением задачи (1) – (3), то

$$\tilde{u} = (u_0, \ldots, u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$$

является обобщенным решением задачи (1), (2), т. е. удовлетворяет равенствам (12) – (14). Поэтому, разрешив эллиптическую задачу (1), (2), найдем первые $r+1$ компонент решения (21) задачи (1) – (3). Условия (3) (или (15)) позволят найти остальные компоненты решения $u \in \tilde{H}^{s,p}$ задачи (1) – (3).

3. Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптической задачи (1), (2). Рассмотрим эллиптическую в $\overline{G}$ задачу (1), (2). Справедливы следующие утверждения [5, 9, 10] :

1. *Для каждого* $s \in R$ *и* $p \in (1, \infty)$ *замыкание* $A_{s,p}$ *отображения*

$$u \to \left(Lu|_{\overline{G}},\ B_1 u|_{\Gamma_0}, \ldots, B_m u|_{\Gamma_0} \right), \quad u \in C^\infty(\overline{G})$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\tilde{H}^{s,p,(r)} \to \tilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)} \times \prod_{j=1}^{m} B^{s-q_{j0}-1/p,p}(\Gamma_0) =: K^{s-2m,p,(r-2m)}.$$

2. *Элемент* $\tilde{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$, *для которого* $A_{s,p}\,\tilde{u} = (f, \varphi) \in K^{s-2m,p,(r-2m)}$, *называется обобщенным решением задачи* (1), (2). *При этом* $A_{s,p}\,\tilde{u} = (f, \varphi)$ *в том и только в том случае, когда выполнены равенства* (12) – (14).

3. *Оператор* $A_{s,p}$ *нетеров; ядро* $\mathfrak{N}$ *и коядро* $\mathfrak{N}^*$ *конечномерны, не зависят от* s *и* p *и состоят из бесконечно гладких элементов*:

$$\mathfrak{N} = \{u \in C^\infty(\overline{G}) : Au = 0\},$$

$$\mathfrak{N}^* = \left\{ V = (v_0, \{v_k : 1 \le k \le r-2m\}, \{v_j : 1 \le j \le m\}) \right\} \subset$$

$$\subset C^\infty(\overline{G}) \times \left(C^\infty(\Gamma_0)\right)^{r-2m} \times \left(C^\infty(\Gamma_0)\right)^m.$$

Задача

$$A_{s,p}\,\tilde{u} = (f, \varphi) \in K^{s-2m,p,(r-2m)}, \quad f = (f_0, f_1, \ldots, f_{r-2m}), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

разрешима в $\tilde{H}^{s,p,(r)}$ *в том и только том случае, когда*

$$[(f, \varphi), V] =: (f_0, v_0) + \sum_{1 \le j \le r-2m} \langle f_j, v_j \rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k, v_k \rangle = 0 \quad \forall\, V \in \mathfrak{N}^*. \quad (25)$$

4. *Сужение* $A_1 = A_{1\,s,p}$ *оператора* $A_{s,p}$ *на подпространство* $P\tilde{H}^{s,p,(r)} = \{ (u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)} : (u_0, \mathfrak{N}) = 0 \}$ *пространства* $\tilde{H}^{s,p,(r)}$ *устанавливает изоморфизм*

$$A_1 = P\,\tilde{H}^{s,p,(r)} \to Q^+ K^{s-2m,p,(r-2m)}. \quad (26)$$

Здесь $Q^+ K^{s-2m,p,(r-2m)}$ — *подпространство* $K^{s-2m,p,(r-2m)}$, *состоящее из всех* (f, φ), *удовлетворяющих соотношениям* (25).

4. Предположения о граничных выражениях на Γ_k, $k=1,\ldots,\bar{k}$. Пусть

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_r, \{u_{\alpha k} \mid k=1,\ldots,\bar{k};\ |\alpha| \le q_k\}\right) \in \tilde{H}^{s,p}$$

— обобщенное решение задачи (1) – (3). Тогда элементы $\{u_{\alpha k}\}$ удовлетворяют равенствам (15). Пусть для каждого $k=\{1,\ldots,\bar{k}\}$

$$\tilde{T}_{kj\beta}(t, D_t) = \begin{cases} T_{kj\beta}(t, D_t), & \text{если} \quad |\beta| \le q_{jk}, \\ 0, & \text{если} \quad q_{jk} < |\beta| \le q_k \end{cases}$$

(числа q_k определены формулой (4)). Тогда равенства (15) можно записать в виде

$$B_{jk} u|_{\Gamma_k} \equiv \sum_{|\beta| \le q_k} \tilde{T}_{kj\beta}(t, D_t)\, u_{k\beta} = \varphi_{jk}, \quad j=1,\ldots,m_k; \quad k=1,\ldots,\bar{k}, \tag{27}$$

или, кратко,

$$T_k(t, D_t)\, U_k = \varphi_k, \quad T_k = (\tilde{T}_{kj\beta})_{\substack{j=1,\ldots,m_k \\ |\beta| \le q_k}}; \quad \varphi_k = (\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{m_k k}). \tag{27'}$$

Матрица $\left(\tilde{T}_{kj\beta}(t, D_t)\right)$ для каждого k имеет структуру Дуглиса – Ниренберга: если строке с номером j поставить в соответствие число $s_j = q_{jk} - q_k$, а столбцу с номером β — число $t_\beta = q_k - |\beta|$, то получим, что $\operatorname{ord} \tilde{T}_{kj\beta} \le s_j + t_\beta$, если $s_j + t_\beta \ge 0$, и $\tilde{T}_{kj\beta} = 0$, если $s_j + t_\beta < 0$. Предположим, что для каждого $k \in \{1,\ldots,\bar{k}\}$ система (27) эллиптическая на Γ_k по Дуглису – Ниренбергу: система квадратная и

$$\det\left(\tilde{T}^0_{kj\beta}(t, \sigma)\right) \ne 0, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i_k}) \ne 0, \quad t \in \Gamma_k,$$

$\tilde{T}^0_{kj\beta}$ — главный символ выражения $\tilde{T}_{kj\beta}(t, D_t)$. В этом случае будем кратко говорить, что условия (3) удовлетворяют условию Дуглиса – Ниренберга. Для каждого $s \in R$ и $p \in (1, \infty)$ отображение

$$T_k = T_{k,s,p} : U \mapsto T_k U :$$
$$B^{T+s,p}(\Gamma_k) := \prod_{j=1}^{m_k} B^{t_j+s,p}(\Gamma_k) \to \prod_{j=1}^{m_k} B^{s-s_j,p}(\Gamma_k) =: B^{s-S,p}(\Gamma_k) \tag{28}$$

непрерывно.

Ясно, что эллиптической по Дуглису – Ниренбергу будет система

$$\sum_{j=1}^{m_k} \tilde{T}^+_{k\beta j} v_{kj} = \psi_{\beta k}, \tag{29}$$

или

$$T_k^+ V = T_{k,s,p'} V = \psi_k, \tag{29'}$$

формально сопряженная системе (27). Поэтому [9] для каждого $s \in R$, $p' \in (1, \infty)$ и $k=1,\ldots,\bar{k}$ отображение

$$T_k^+ = T^+_{k,s,p'} : V \mapsto T_k^+ V : \prod_{j=1}^{m_k} B^{t'_j+s,p'}(\Gamma_k) \to \prod_{j=1}^{m_k} B^{s-s'_j,p'}(\Gamma_k), \tag{30}$$

$$s'_j = t_1 - t_j, \quad t'_j = t_1 + s_j,$$

непрерывно. При этом

$$(T_k U, V)_{\Gamma_k} = (u, T_k^+ V)_{\Gamma_k}, \quad U \in B^{T+s,p}(\Gamma_k), \quad V \in B^{-s+S,p'}(\Gamma_k) \tag{31}$$

(здесь $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_k}$ — расширение скалярного произведения в $(L_2(\Gamma_k))^{m_k}$). Из эллиптичности системы (27) следует [10] нетеровость оператора T_k: область значений $\mathfrak{R}(T_k)$ замкнута в $B^{s-S,p}(\Gamma_k)$, ядро $\mathfrak{N}_k$ и коядро $\mathfrak{N}_k^*$ конечномерны. Уравнение $T_k U = \varphi_k \in B^{s-S,p}(\Gamma_k)$ имеет решение $U \in B^{T+s,p}(\Gamma_k)$ в том и только в том случае, когда

$$(\varphi_k, V)_{\Gamma_k} = 0 \quad \forall V \in \mathfrak{N}_k^*; \quad k = 1, \ldots, \bar{k}. \tag{32}$$

При этом ядро $\mathfrak{N}_k$ и коядро $\mathfrak{N}_k^*$ не зависят от s и p и состоят из бесконечно гладких элементов:

$$\mathfrak{N}_k \subset \left(C^\infty(\Gamma_k)\right)^{m_k}, \quad \mathfrak{N}_k^* \subset \left(C^\infty(\Gamma_k)\right)^{m_k}.$$

Такое же утверждение справедливо для оператора T_k^+. При этом ядро $\mathfrak{N}_k^*$ оператора T_k^+ является коядром оператора T_k. Сужение T_k^1 оператора T_k на подпространство

$$P\, B^{T+s,p}(\Gamma_k) = \left\{U \in B^{T+s,p}(\Gamma_k) \colon (U, W)_{\Gamma_k} = 0 \quad \forall W \in \mathfrak{N}_k\right\}$$

пространства $B^{T+s,p}(\Gamma_k)$ осуществляет изоморфизм

$$T_k^1 : P\, B^{T+s,p}(\Gamma_k) \to Q^+ B^{s-S,p}(\Gamma_k), \quad s \in R, \quad p \in (1, \infty). \tag{33}$$

Здесь

$$Q^+ B^{-S+s,p}(\Gamma_k) = \left\{\varphi \in B^{-S+s,p}(\Gamma_k) \colon (\varphi, V)_{\Gamma_k} = 0 \quad \forall V \in \mathfrak{N}_k^*\right\}$$

— подпространство $B^{-S+s,p}(\Gamma_k)$.

5. Разрешимость задачи (1) – (3). Теорема о полном наборе изоморфизмов для задачи Соболева.

Теорема 2. *Пусть* $s \in R$, $p \in (1, \infty)$. *Для разрешимости в* $\widetilde{H}^{s,p}$ *задачи*

$$\mathfrak{A} u = F = (f, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\bar{k}}) \in K^{s,p}, \tag{34}$$

$$f = (f_0, \ldots, f_{r-2m}) \in \widetilde{H}^{s,p,(r-2m)}, \quad \varphi_0 = (\varphi_{10}, \ldots, \varphi_{m0}) \in \prod_{j=1}^{m} B^{s-q_{j0}-1/p,p}(\Gamma_0),$$

$$\varphi_k = (\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{m_k,k}) \in \prod_{j=1}^{m_k} B^{s-q_{jk}-i_k'/p,p}(\Gamma_k),$$

необходимо, а если выполнены условия согласования при $s > 1/p$ *(см. ниже* (37)), *то и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (25), (32).

Доказательство. Если элемент $u \in \widetilde{H}^{s,p}$ (21) является решением уравнения (34), то вектор $(u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ является решением в $\overline{G}$ задачи (1), (2) (см. п. 2), но тогда выполнены соотношения (25) (см. п. 3, пп. 3). Кроме того, вектор $U_k = \{ u_{\alpha k} \colon |\alpha| \le q_k\} \in B^{T+s,p}(\Gamma_k)$ удовлетворяет уравнению

$$T_k U_k = \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, \bar{k}, \tag{35}$$

и поэтому выполнены соотношения (32). *Необходимость* доказана.

Докажем *достаточность*. Пусть элемент $F \in K^{s,p}$ удовлетворяет условиям (25), (32) и пусть вначале $s < 1/p$ и выполнены соотношения (18). В этом случае пространство $\tilde{H}^{s,p}$ совпадает с прямой суммой $\mathfrak{H}^{s,p}$ (20). Разрешая задачу (1), (2), найдем элемент $\tilde{u} = A_1^{-1}(f, \varphi) = (u_0, u_1, \ldots, u_r) \in P\tilde{H}^{s,p,(r)}$ (26). Тогда $\tilde{u} + w \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$, $w \in \mathfrak{N}$, — общий вид решения задачи (1), (2). Элемент $\tilde{u} + w = (u_0 + w_0, u_1 + w_1, \ldots, u_r + w_r)$ дает первые $r+1$ компонент искомого решения $u \in \tilde{H}^{s,p}$. Остальные компоненты найдем, решая задачу (35):

$$U_k = T_k^{1^{-1}} \varphi_k \in P B^{T+s,p}(\Gamma_k), \quad k = 1, \ldots, \bar{k},$$

$U_k + W_k$, $W_k \in \mathfrak{N}_k$, — общее решение задачи (35). Вектор

$$(\tilde{u} + w, \{ U_k + W_k : k = 1, \ldots, \bar{k} \}) \in \tilde{H}^{s,p} \tag{36}$$

— общее решение уравнения (34). Таким образом, в случае $s < 1/p$ достаточность установлена, поскольку для исключенных s (18) утверждение следует с помощью интерполяционной теоремы. Пусть теперь $F \in K^{s,p}$, $s > 1/p$, удовлетворяет соотношениям (25), (32). Тогда, конечно, $F \in K^{s_1,p}$, $s_1 < 1/p$, и, по доказанному, существует решение (см. (21)) $u = (\tilde{u} + w, U_1 + W_1, \ldots, U_{\bar{k}} + W_{\bar{k}}) \in \tilde{H}^{s_1,p}$, $U_k + W_k = \{ u_{\alpha k} + w_{\alpha k} \}$ задачи (1) – (3). При этом $\tilde{u} + w \in \tilde{H}^{s,p,(r)}$, а поэтому $u_0 + w_0 \in H^{s,p}(G)$ и, следовательно, существуют следы

$$D_y^{\alpha}(u_0 + w_0)\big|_{\Gamma_k} \qquad \forall\, \alpha, k : s - |\alpha| - j_k'/p > 0.$$

Для того чтобы найденное решение $u \in \tilde{H}^{s_1,p}$ принадлежало $\tilde{H}^{s,p}$, необходимо и достаточно (см. (22)), чтобы выполнялись условия согласования

$$u_{\alpha k} + w_{\alpha k} = D_y^{\alpha}(u_0 + w_0)\big|_{\Gamma_k}, \qquad \forall\, \alpha, k : s - |\alpha| - i_k'/p > 0. \tag{37}$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства следует, что если $s < 1/p$ и $(e_{10}, \ldots, e_{t0})$ — базис в $\mathfrak{N}$, а $(e_{1k}, \ldots, e_{t_k,k})$ — базис в $\mathfrak{N}_k$, $k = 1, \ldots, \bar{k}$, то $(e_{10}, \ldots, e_{t0}, e_{11}, \ldots, e_{t_1,1}, \ldots, e_{1\bar{k}}, \ldots, e_{t_{\bar{k}},\bar{k}})$ — базис в ядре $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ оператора $\mathfrak{A}$. Такое же утверждение справедливо и для базиса в коядре оператора $\mathfrak{A}$. Поэтому

$$\operatorname{ind} \mathfrak{A} = \operatorname{ind} A + \sum_{k=1}^{\bar{k}} \operatorname{ind} T_k. \tag{38}$$

6. Случай $\bar{k} = 1$ и $s < 2m - i'/p'$. Рассмотрим задачу (1) – (3) с $\bar{k} = 1$, $\Gamma_1 = \Gamma$, $i_1 = i$, $i_1' = i'$. В этом случае, если $f = (f_0, \ldots, f_{r-2m}) \in \tilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)}$, то $f_0 \in H^{s-2m,p}(G)$ может быть сосредоточенным на Γ. Поставим следующий вопрос: нельзя ли к f_0 прибавить элемент $f_0' \in H^{s-2m,p}(G)$, сосредоточенный на Γ, чтобы для задачи (1) – (3) с $\tilde{F} = (f_0 + f_0', f_1, \ldots, f_{r-2m}, \varphi_{10}, \ldots, \varphi_{m0}, \{\varphi_{r1}\}) \in K^{s,p}$ выполнялись условия согласования?

Ниже будет дан положительный ответ на поставленный вопрос. Отметим здесь, что f_0 и $f_0 + f_0'$ совпадают внутри G.

Теорема 3. *Пусть* $1/p < s < 2m - i'/p'$ *и выполнены условия* (25), (32). *Тогда можно к* f_0 *прибавить такой элемент* f_0', *сосредоточенный на* Γ, *чтобы условия согласования для задачи* $\mathfrak{A}\, u = \widetilde{F}$ *автоматически выполнялись, и, следовательно, эта задача разрешима в* $\widetilde{H}^{s,p}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (25), (32).

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма ([5], гл. 6). *Отличный от нуля элемент* $g \in H^{t,p}(G)$ *сосредоточен на* Γ *в том и только в том случае, когда* $t < -i'/p'$ *и существуют элементы* $w_\mu \in B^{s+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma)$ $(|\mu| \le \kappa_1 = [-t - i'/p']^-$, $[\tau]^-$ *— наибольшее целое, меньшее* τ) *такие, что*

$$g = \sum_{|\mu| \le \kappa_1} D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma))$$

(*здесь по определению меры Дирака* $\delta(\Gamma)$: $(g, v) = \sum_{|\mu| \le \kappa_1} \langle w_\mu, D_y^\mu v \rangle_\Gamma \quad \forall v \in$ $\in C^\infty(\overline{G})$). *При этом существует такая постоянная* $c > 0$, *что*

$$c^{-1} \| g \|_{s,p} \le \sum_{|\mu| \le \kappa_1} \langle\langle w_\mu, \Gamma \rangle\rangle_{s+|\mu|+i'/p',\,p} \le c \| g \|_{s,p}.$$

Пусть теперь элемент $f_0' \in H^{s-2m,p}(G)$, $s < 2m - i'/p'$, сосредоточен на Γ. Тогда согласно лемме

$$f_0' = \sum_{|\mu| \le \kappa} D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma)), \quad \kappa = [-s + 2m - i'/p']^-,$$
$$w_\mu \in B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma). \tag{39}$$

Предположим вначале, что дефект задачи (1) – (3) отсутствует. Обозначим через $R(w_\mu, x) \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$, $s < 2m - i'/p'$, решение задачи

$$L(x, D) R(w_\mu, x) = \big(D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma)), 0, \ldots, 0 \big) \in \widetilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)},$$
$$B_j R(w_\mu, x)|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{40}$$

Согласно теореме о локальном повышении гладкости ([5], § 7.2) $R(w_\mu, x) \in$ $\in C^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma)$, и, кроме того,

$$D_y^\alpha R(w_\mu, x)|_\Gamma \in B^{s-|\alpha|-i'/p,\,p}(\Gamma), \quad |\alpha| < s - i'/p. \tag{41}$$

Итак, по вектору

$$w = (w_\mu : |\mu| \le \kappa = [2m - s - i'/p']^-), \quad w_\mu \in B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma)$$

строим вектор $R = (R(w_\mu, x) : |\mu| \le \kappa)$. По вектору R строим матрицу

$$V_{\alpha\mu} = D_y^\alpha R(w_\mu, x)|_\Gamma \in B^{s-|\alpha|-i'/p,\,p}(\Gamma), \quad |\mu| \le \kappa, \alpha : s - |\alpha| - i'/p > 0.$$

Оператор $P_{\alpha\mu} : w_\mu \mapsto V_{\alpha\mu}$ непрерывно действует из $B^{s-2m+|\mu|+i'/p',\,p}(\Gamma)$ в $B^{s-|\alpha|-i'/p,\,p}(\Gamma)$. Поэтому отображение

$$P: w \mapsto V = \left(V_\alpha = \sum_{|\mu| \le \kappa} V_{\alpha\mu} : |\alpha| < s - i'/p \right) \tag{42}$$

непрерывно действует в паре пространств

$$\prod_{|\mu| \le \kappa} B^{s-2m+|\mu|+i'/p',p}(\Gamma) \to \prod_{|\alpha| \le s - i'/p} B^{s-|\alpha|-i'/p,p}(\Gamma). \tag{43}$$

Функция

$$u(x) = \sum_{|\mu| \le \kappa} R(w_\mu, x)|_G \in H^{s,p}(G) \tag{44}$$

принадлежит $C^\infty(\overline{G} \setminus \Gamma)$ и удовлетворяет задаче

$$\begin{gathered} L(x, D)u(x) = 0, \quad x \in G \setminus \Gamma, \\ B_j u|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad D_y^\alpha u|_\Gamma = V_\alpha (|\alpha| \le s - i'/p), \end{gathered} \tag{45}$$

Поскольку задача (45) — эллиптическая [2, 3], и так как каждое решение ее представляется в виде (44), то множество значений отображения (42) дает все те значения $V \in \prod_{|\alpha| \le s-i'/p} B^{s-|\alpha|-i'/p,p}(\Gamma)$, для которых задача (45) разрешима; каждое решение задачи (45) порождается решением $u \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}(G)$ задачи (40) с правой частью, сосредоточенной на Γ. Пусть теперь $u' = (u_0, \ldots, u_r) \in \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ — решение задачи (1), (2). Тогда, положив $w = u - u'$, сведем рассматриваемую задачу (1)–(3) с $\overline{k} = 1$ к задаче

$$\begin{gathered} Lw = 0, \quad B_j w|_{\Gamma_0} = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ B_{r1} w|_\Gamma = \varphi_{r1} - B_{r1} u' = \psi_{r1} \in B^{s-q_1-i'/p,p}(\Gamma), \quad r = 1, \ldots, m_1, \end{gathered} \tag{46}$$

а последняя, благодаря изоморфизму (33), эквивалентна задаче вида (45). Но тогда каждое решение этой задачи порождается решением $u \in \widetilde{H}^{s,p,(r)}$ задачи (40) с правой частью, сосредоточенной на Γ, и теорема в рассматриваемом случае доказана.

Если дефект отличен от нуля, то надо в (40) элемент $g = (D_y^\mu (w_\mu \times \delta(\Gamma)), 0, \ldots, 0) \in \widetilde{H}^{s-2m,p,(r-2m)}$ заменить на элемент $Q^+ g$ из этого же пространства, ортогональный к коядру $\mathfrak{N}^*$ и за $R(w_\mu, x)$ выбрать то решение задачи (40), которое принадлежит $P\widetilde{H}^{s,p,(r)}$. Такое решение, благодаря изоморфизму (26), существует и единственно. Это позволяет провести приведенные рассуждения и в этом случае.

Приведем пример Соболева [1, с. 114]. В области $G = \{ x \in R^3 : 0 \le |x| \le 1 \}$ рассматривается задача

$$\Delta^2 u = 0 \ (\text{в } G), \quad u|_{|x|=1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=1} = 0, \quad u(0) = 1$$

(Δ — оператор Лапласа). Функция $u = (1 - |x|)^2$ является единственным решением из $H^{2,2}(G)$ рассматриваемой задачи, при этом $u \notin H^{3,2}(G)$. Легко проверить, что в $G \cup \{0\}$ имеем $\Delta^2 u = c\delta(0) \in H^{-3/2-\varepsilon,2}(G)$ (здесь $\delta(0)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке 0, $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым). Поэтому $u \in H^{-5/2-\varepsilon,2}(G)$. Чтобы получить более гладкое решение, надо требовать, чтобы выполнялось условие согласования: $u(0) = 0$. Тогда $u \equiv$ $\equiv 0$.

7. Обобщения. Применения.

1. Как уже указывалось во введении, все утверждения с теми же доказательствами остаются справедливыми, если выражения (5) – (8) псевдодифференциальны вдоль ∂G и дифференциальны в нормальных к ∂G направлениях.

2. Все утверждения остаются справедливыми для эллиптической с параметром задачи Соболева (ср. [5], гл. 9, [11]). В этом случае вместо нетеровости имеем однозначную разрешимость при больших значениях параметра.

3. Из пп. 2 вытекает разрешимость в полных банаховых шкалах параболических задач Соболева [11 – 13].

4. Все результаты с такими же доказательствами остаются справедливыми для задачи Соболева для систем, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу порядка $(T, S) = (t_1, \ldots, t_N, s_1, \ldots, s_N)$ (см. [5], гл. 10).

5. Приведем некоторые из возможных приложений полученных результатов. Теорема о полном наборе изоморфизмов позволяет построить и изучить функцию Грина для задачи Соболева (ср. [5], § 7.4), позволяет изучить локальную гладкость решений вплоть до Γ_0, Γ_k, позволяет изучить сильно вырождающиеся эллиптические задачи Соболева, позволяет изучить задачу Соболева в случае, когда правые части имеют сколь угодно большие степенные особенности вдоль многообразий различных размерностей (ср. [5], гл. 8).

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. – 255 с.
2. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1966. – **15**. – С. 346 – 382.
3. *Стернин Б. Ю.* Относительная эллиптическая теория и проблема С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 2. – С. 287 – 290.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
5. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1966. – 427 p.
6. *Ройтберг Я. А., Склярец А. В.* Задача Соболева в полной шкале банаховых пространств // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1553 – 1563.
7. *Ройтберг Я. А., Склярец А. В.* Задача Соболева в полной шкале банаховых пространств // Допов. НАН України. – 1995. – № 7. – С. 19 – 25.
8. *Grubb G.* Partial differential problems in L_p spaces // Comm. Part. Different. Equat. – 1990. – **15(3)**. – P. 289 – 340.
9. *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб. – 1971. – **86(128)**, № 2(10). – С. 246 – 267.
10. *Ройтберг Я. А.* Теоремы об изоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющиеся нормальными // Там же. – 1970. – **83(125)**, № 2(10). – С. 181 – 213.
11. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
12. *Ройтберг И. Я., Ройтберг Я. А.* Формула Грина и плотность решений общих параболических задач в функциональных пространствах на многообразиях // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 8. – С. 1437 – 1444.
13. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.

Получено 28.07.97