УДК 519.21

Н. В. Москальцова, канд. физ.-мат. наук,
В. М. Шуренков, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЕЩЕ ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ К ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

We obtain sufficient conditions that should be imposed on a function f in order that, for ergodic Markov chains, the sum

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

be asymptotically normal.

Одержані деякі умови для функції f, достатні для асимптотичної нормальності суми

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

для ергодичних ланцюгів Маркова.

В настоящей работе продолжаются исследования результатов, полученных в [1, 2]. Рассматривается однородная цепь Маркова X_n в некотором измеримом фазовом пространстве $(E, \mathfrak{A})$ со счетно порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{A}$. Будем считать цепь X_n эргодической в смысле [3], т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(x, A) = \pi(A)$$

для всех $x \in E$, $A \in \mathfrak{A}$. Здесь π — стационарная вероятностная мера цепи, $Q^k(x, A)$ — вероятность перехода цепи за k шагов.

Далее нам будут полезны некоторые понятия, введенные в работе [1]. Напомним, что:

– класс $\mathfrak{A}$-измеримых множеств $\mathcal{E}$, замкнутый относительно конечного объединения своих множеств и содержащий все $\mathfrak{A}$-измеримые подмножества своих элементов, называется мизерным;

– класс $\mathcal{E}$ называется полным, если некоторая счетная последовательность его множеств покрывает все пространство E;

– $\mathfrak{A}$-измеримая функция f называется $\mathcal{E}$-финитной, если $\{f \neq 0\} \in \mathcal{E}$;

– неотрицательное ядро $W(x,A)$, $x \in E$, $A \in \mathfrak{A}$, называется $\mathcal{E}$-ограниченным, если $\sup\limits_{x\in E} W(x, D) < \infty$ для всех $D \in \mathcal{E}$.

Сохраним обозначения для оператора

$$R_t f = \sum_{n\geq 0} t^n Q^n f$$

и $\langle \pi, f \rangle = \int \pi(dx) f(x)$. Введем классы функций K и $\overline{K}$. Класс K содержит все ограниченные $\mathfrak{A}$-измеримые функции f, для которых существует и конечен равномерный по $x \in E$ предел $\lim\limits_{t\uparrow 1} R_t f(x)$. Классу $\overline{K}$ принадлежат все ограниченные $\mathfrak{A}$-измеримые функции f, для которых выполнены следующие условия:

1) $\lim\limits_{t\uparrow 1} R_t f(x)$ существует и конечен для всех $x \in E$.

2) $\sup_{0 \le t < 1} \sup_{x \in E} \left| R_t f(x) \right| < \infty.$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $U: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ ограниченных $\mathfrak{A}$-измеримых функций.

Обозначим через S_n сумму $\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$. Анализируя доказательство центральной предельной теоремы ([2], теорема 1), видим, что для асимптотической нормальности случайной последовательности $(1/\sqrt{n})S_n$ требовалось только, чтобы существовал и был конечен равномерный по $x \in E$ предел $\lim_{t \uparrow 1} R_t f(x)$. Поэтому с учетом сделанного выше замечания случайная величина $(1/\sqrt{n})S_n$ асимптотически нормальна для всех функций f из класса K.

Введем класс L операторов, перестановочных с оператором Q переходной вероятности: $L = \{U : UQ = QU\}$.

Символом T_n обозначим сумму $\sum_{k=0}^{n-1} Uf(X_k)$, $U \in L$, а $f \in K$.

Отметим, что функция $Uf \in K$, так как

$$\lim_{t \uparrow 1} R_t Uf(x) = U \lim_{t \uparrow 1} R_t f(x) = UWf(x) = WUf(x)$$

равномерно по $x \in E$.

Таким образом, если f — $\mathcal{E}$-финитная ограниченная функция и $\langle \pi, f \rangle = 0$, то $Uf \in K$, а значит, $(1/\sqrt{n})T_n$ — асимптотически нормальная последовательность, причем функция Uf не обязательно должна быть $\mathcal{E}$-финитной. Можно заметить, что простейшим примером такого оператора U служит любая степень оператора переходной вероятности, т. е. $U = Q^m$, $Uf = Q^m f$.

В работе [2] показано, что существуют такие мизерный полный класс $\mathcal{E}$ и неотрицательное $\mathcal{E}$-ограниченное ядро W, что если функция f ограничена, $\mathcal{E}$-финитна и $\langle \pi, f \rangle = 0$, то $\lim_{t \uparrow 1} R_t f(x) = Wf(x)$ для всех $x \in E$, в частности, $f \in \overline{K}$.

Пусть теперь функция $f \in \overline{K}$, а линейный ограниченный оператор $U \in L$ является, кроме того, слабо непрерывным в $\mathbb{B}$.

Чтобы доказать центральную предельную теорему для последовательности $(1/\sqrt{n})S_n$ при этих условиях на функцию f, согласно теореме из [3] (гл. 3, § 2) достаточно, как и раньше, показать, что для некоторого множества $D \in \mathfrak{A}$ выполнены следующие условия:

$$\overline{\lim_{t \uparrow 1}} (1-t)^2 \sum_{n \ge 1} t^n \int_D \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n^2 < \infty, \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{t \uparrow 1}} (1-t) \left| \sum_{n \ge 1} t^n \int_A \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n \right| < \infty \tag{2}$$

для всех $A \in \mathfrak{A} D$. Здесь $\mathbb{P}_x$ — символ условного среднего при условии, что $X_0 = x$. Имеем

$$\overline{\lim_{t \uparrow 1}} (1-t) \left| \sum_{n \ge 1} t^n \int_A \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n \right| \le \overline{\lim_{t \uparrow 1}} (1-t) \left| \sum_{n \ge 1} t^n \int_E \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n \right| \le$$

$$\leq \sup_{0\leq t<1} \sup_{x\in E} \left| R_t f(x) \right| < \infty.$$

Перейдем к доказательству справедливости условия (1). Для этого рассмотрим второй момент суммы S_n:

$$\mathbb{P}_x S_n^2 = \mathbb{P}_x \sum_{k=0}^{n-1} f^2(X_k) + 2\,\mathbb{P}_x \sum_{0\leq k<l<n} f(X_k) f(X_l). \tag{3}$$

В силу эргодичности X_n имеем

$$(1-t)^2 \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{k=0}^{n-1} Q^k f^2(x) = (1-t)tR_t f^2(x) \underset{t\uparrow 1}{\to} \langle \pi, f^2 \rangle,$$

кроме того, $(1-t)R_t f^2(x) \leq \text{const}$.

Так как $\left| R_t f(x) \right| \leq \text{const}$ равномерно по x, t, то и $\mathbb{P}_x \mid f(X_k) R_t f(X_k) \mid \leq$ $\leq \text{const}$ с учетом ограниченности функции f.

Принимая во внимание то, что

$$\lim_{t\uparrow 1} (1-t)^2 \sum_{n\geq 1} t^n \mathbb{P}_x S_n^2 = -\langle \pi, f^2 \rangle + 2 \lim_{t\uparrow 1} (1-t) \sum_{k\geq 0} t^k \mathbb{P}_x f(X_k) R_t f(X_k),$$

с учетом сделанных замечаний имеем

$$\lim_{t\uparrow 1} (1-t)^2 \sum_{n\geq 1} t^n \int_D \pi(dx) \mathbb{P}_x S_n^2 \leq \lim_{t\uparrow 1} \int_E \pi(dx) (1-t)^2 \sum_{n\geq 1} t^n \mathbb{P}_x S_n^2 \leq$$

$$\leq -\langle \pi, f^2 \rangle + 2 \lim_{t\uparrow 1} \int_E \pi(dx) (1-t) \sum_{k\geq 0} t^k \mathbb{P}_x |f(X_k) R_t f(X_k)| < \infty.$$

Т. е. из того, что $f\in \overline{K}$, следует справедливость центральной предельной теоремы для $(1/\sqrt{n}) S_n$.

Так как оператор U предполагается слабо непрерывным, а именно: $Uf_n \to Uf$ слабо, если $f_n \to f$ так же слабо, то из условия $f \in \overline{K}$ следует, что и $Uf\in \overline{K}$, а поэтому центральная предельная теорема справедлива и для последовательности $(1/\sqrt{n}) T_n$. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\mathcal{E}$-финитная функция f ограничена, $\langle \pi, f \rangle = 0$ и линейный оператор $U: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ из класса L ограничен, то случайная последовательность $(1/\sqrt{n}) \sum_{k=0}^{n-1} U f(X_k)$ асимптотически симметрично нормальна.*

Теорема 2. *Если $\mathcal{E}$-финитная функция f ограничена, $\langle \pi, f \rangle = 0$ и линейный оператор $U: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ из класса L ограничен и слабо непрерывен, то случайная последовательность $(1/\sqrt{n}) \sum_{k=0}^{n-1} U f(X_k)$ асимптотически симметрично нормальна.*

Замечание. По-видимому, эти результаты можно получить из работы [4] (§ 7.4).

1. *Москальцова Н. В, Шуренков В. М.* Про потенціали ергодичних ланцюгів Маркова // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 446 – 449.
2. *Москальцова Н. В, Шуренков В. М.* Центральная предельная теорема для специальных классов функций от эргодических цепей // Там же. – № 8. – С. 1092 – 1094.
3. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
4. *Нуммелин Э.* Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. – М.: Мир, 1989. – 207 с.

Получено 15.06.93