УДК 517.5

О. В. Поляков (Днепропетр. ун-т)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫМИ СПЛАЙНАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ *

We find the exact value of best (α, β)-approximation of a class of functions, which are differentiable with a weight on $[-1, 1]$, by generalized Chebyshev splines.

Знайдено точне значення найкращого (α, β)-наближення класу диференційовних з вагою на $[-1, 1]$ функцій узагальненими чебишовськими сплайнами.

Пусть $L_p = L_p[-1, 1]$, $1 \le p \le \infty$, — пространство всех суммируемых в p-й степени $(1 \le p < \infty)$ и существенно ограниченных $(p = \infty)$ на $[-1, 1]$ вещественнозначных функций f с конечной нормой $\|f\|_p$.

Для $f \in L_1$ и чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ положим

$$f_{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}, \qquad \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f = \alpha \operatorname{sgn} f_+ - \beta \operatorname{sgn} f_-,$$

$$|f(x)|_{\alpha,\beta} = f(x) \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f(x)$$

и

$$\|f\|_{1;\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} |f(x)|_{\alpha,\beta}\, dx.$$

Если $f \in L_1$, и $H \subset L_1$, то величину

$$E(f; H)_{1;\alpha,\beta} = \inf\{\|f-u\|_{1;\alpha,\beta} \colon u \in H\}$$

назовем наилучшим (α, β)-приближением функции f множеством H в пространстве L_1. При $\alpha = \beta = 1$ мы получаем обычное наилучшее L_1-приближение функции f множеством H, которое обозначаем через $E(f; H)_1$.

Для $f \in L_1$ положим

$$H^{\pm}(f) = \{u \in H \colon \pm u(x) \le \pm f(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in [-1, 1]\}.$$

Величина

$$E^{\pm}(f; H)_1 = \inf\{\|f-u\|_1 \colon u \in H^{\pm}\}$$

называется наилучшим L_1-приближением снизу $(+)$ или сверху $(-)$ функции f множеством H.

В. Ф. Бабенко [1] (см. также [2]) показал, что если H — конечномерное подпространство пространства L_1, то

$$\lim_{\beta \to \infty} E(f; H)_{1;1,\beta} = E^{+}(f; H)_1,$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} E(f; H)_{1;\alpha,1} = E^{-}(f; H)_1.$$

Пусть функции $w_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, строго положительны на $[-1, 1]$ и для каждого $k = 1, \dots, n$ функция $w_k(x)$ $n-k$ раз непрерывно дифференцируема.

---

* Работа финансово поддержана Международным научным фондом, Грант U-92000, и Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий.

© О. В. ПОЛЯКОВ, 1997

Образуем следующую систему функций [3] :

$$
\begin{aligned}
u_0(t) &= 1, \\
u_1(t) &= \int\limits_{-1}^{t} w_1(\xi_1)\,d\xi_1, \\
u_2(t) &= \int\limits_{-1}^{t} w_1(\xi_1) \int\limits_{-1}^{\xi_1} w_2(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n(t) &= \int\limits_{-1}^{t} w_1(\xi_1) \int\limits_{-1}^{\xi_1} w_2(\xi_2) \ldots \int\limits_{-1}^{\xi_{n-1}} w_n(\xi_n)\,d\xi_n \ldots d\xi_1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Очевидно, если $w_k(t) \equiv 1$, то $u_k(t) = (t+1)^k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Определим функции

$$
\varphi_n(t,x) = \begin{cases} \int\limits_{x}^{t} w_1(\xi_1) \int\limits_{x}^{\xi_1} w_2(\xi_2) \ldots \int\limits_{x}^{\xi_{n-1}} w_n(\xi_n)\,d\xi_n \ldots d\xi_1, & x \le t \le 1; \\ 0, & -1 \le t < x, \end{cases}
\tag{2}
$$

$$
\varphi_n^*(t,x) = \begin{cases} \int\limits_{x}^{t} w_n(\xi_n) \int\limits_{x}^{\xi_n} w_{n-1}(\xi_{n-1}) \ldots \int\limits_{x}^{\xi_2} w_1(\xi_1)\,d\xi_1 \ldots d\xi_n, & x \le t \le 1; \\ 0, & -1 \le t < x. \end{cases}
\tag{3}
$$

Пусть D_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, обозначает дифференциальный оператор

$$
(D_j(g))(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{w_j(t)}\right),
\tag{4}
$$

а D_j^*, $j = 0, 1, \ldots, n$, обозначает дифференциальный оператор

$$
(D_j^*(g))(t) = \frac{1}{w_j(t)} \frac{d}{dt}(g(x,t)).
\tag{5}
$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие утверждения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$
\int\limits_{-1}^{1} f(x)(D_j g)(x)\,dx = \left.\frac{f(x)g(x)}{w_j(x)}\right|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} g(x)(D_j^* f)(x)\,dx.
$$

Лемма 2 [3, с. 446]. *Справедливо равенство*

$$
\varphi_n(t,x) + (-1)^n \varphi_n^*(x,t) = \Omega_n(t,x),
$$

где

$$
\Omega_n(t,x) = \int\limits_{x}^{t} w_1(\xi_1) \int\limits_{x}^{\xi_1} w_2(\xi_2) \ldots \int\limits_{x}^{\xi_{n-1}} w_n(\xi_n)\,d\xi_n \ldots d\xi_1
$$

для всех t *и* x *в* $[-1, 1]$.

Лемма 3. *Если*

$$g(t) = \int_{-1}^{1} \varphi_n(t, x) h(x)\, dx,$$

то

$$(D_n \dots D_1 D_0 g)(t) = h(t),$$

и если

$$g(t) = \int_{-1}^{1} \varphi_n^*(t, x) h(x)\, dx,$$

то

$$(D_0^* D_{n-1}^* \dots D_n^* g)(t) = h(t).$$

Пусть $\bar{x} = \{x_i\}_{i=1}^N \subset [-1, 1]$. Через $\mathcal{N}_{N,r}(\bar{x})$ обозначим подпространство обобщенных сплайнов с узлами в точках x_i, $i = 1, \dots, N$, т. е. совокупность функций вида

$$s(t) = \sum_{i=0}^{r} b_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_r(t, x_i), \tag{6}$$

где $b_0, \dots, b_r$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$, функции $u_i(t)$ определены равенством (1), а функция $\varphi_r(t, x)$ — соотношением (2). Через Π_r будем обозначать подпространство u-многочленов, т. е. обобщенных полиномов вида

$$p(t) = \sum_{i=0}^{r} b_i u_i(t).$$

Заметим, что в случае $w_k(t) \equiv 1$, $k = 1, \dots, r$, мы получаем известное в теории аппроксимации подпространство $\mathcal{S}_{N,r}(\bar{x})$ полиномиальных сплайнов порядка r с N узлами.

Для удобства в дальнейшем введем операторы

$$(L_j g)(t) = (D_j \dots D_1 D_0 g)(t), \qquad (L_{r-j}^* g)(t) = (D_j^* \dots D_{r-1}^* D_r^* g)(t).$$

Через $W_1^{L_r}$ обозначим класс функций, представимых в виде

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \varphi_r(t, x) g(x)\, dx,$$

где

$$\| g \|_1 = \| L_r f \|_1 = \| D_r \dots D_1 D_0 f \|_1 \le 1.$$

В частности, при $w_k(t) \equiv 1$ получаем хорошо известный класс W_1^r.

Вопросы аппроксимации обобщенными сплайнами изучались многими математиками (см., например, [3–6]). В данной работе будет вычислена величина наилучшего (α, β)-приближения класса $W_1^{L_r}$ подпространством $\mathcal{N}_{N,r}(\bar{x})$. Величина наилучшего (α, β)-приближения класса W_1^r подпространством

$S_{N,r}(\overline{x})$ вычислена в [7]. А в случае $\alpha=\beta=1$ и когда $\overline{x}$ — вектор нулей полинома Чебышева 2-го рода, этот результат получен в [8].

Через $\Gamma_{N,r}^{(\alpha,\beta)}$ будем обозначать класс функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(-1)=f(1)=0$;

2) $(L_{r-j}^{*}f)(-1)=(L_{r-j}^{*}f)(1)=0, \quad j=1,\ldots,r$;

3) $(L_r^{*}f)(t)$ принимает только два значения α или $-\beta$ и имеет на $[-1,1]$ не более $N+r$ перемен знака.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого вектора* $\overline{x}=\{x_i\}_{i=1}^{N}\subset[-1,1]$ *во множестве* $\Gamma_{N,r}^{(\alpha,\beta)}$ *существует функция* $S^{(\alpha,\beta)}(t)$ *такая, что* $S^{(\alpha,\beta)}(x_i)=0$.

Вопросы существования полиномиальных совершенных и обобщенных сплайнов с заданными нулями изучались во многих работах (см., например, [6] и библиографию к ней). Бабенко В. Ф. в [9] предложил другой метод доказательства существования полиномиальных сплайнов с заданными нулями. При доказательстве теоремы 1 будем ипользовать рассуждения работы [9].

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольную функцию $F(t)$ такую, что

$$F(-1)=F(1)=0, \quad (L_jF)(-1)=(L_jF)(1)=0, \quad j=0,\ldots,r,$$

$$(L_rF)(x_i)=0, \; i=1,\ldots,N;$$

$(L_rF)(t)$ непрерывна на $[-1,1]$ и имеет на $[-1,1]$ N перемен знака. Для функции $F(t)$ в подпространстве $\mathcal{N}_{N,r}(\overline{x})$ существует сплайн $S_0(t)$ наилучшего (α,β)-приближения. Докажем, что $F(t)-S_0(t)$ имеет на отрезке не более $N+r$ нулей.

Предположим противное. Пусть разность $F(t)-S_0(t)$ имеет на $[-1,1]$ $N+r+1$ нулей. Тогда в силу теоремы Ролля

$$\nu((L_{r-1}F)(t)-(L_{r-1}S_0)(t)) \geq N+2,$$

где $\nu(f)$ — число перемен знака функции f.

С другой стороны, на каждом интервале (x_i,x_{i+1}), $i=0,\ldots,N$, $x_0=-1$, x_{N+1}, функция $\frac{1}{w_n(t)}(L_{r-1}F)(t)$ монотонная, а $\frac{1}{w_n(t)}(L_{r-1}S_0)(t)$ — константа. Следовательно, на каждом интервале (x_i,x_{i+1}) разность $(L_{r-1}F)(t)-(L_{r-1}S_0)(t)$ может иметь не более одной перемены знака, а значит,

$$\nu((L_{r-1}F)(t)-(L_{r-1}S_0)(t)) \leq N+1.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Таким образом, получаем, что $F(t)$ почти всюду отлична от $S_0(t)$, и тогда в силу критерия элемента наилучшего (α,β)-приближения функция

$$g(t)=a\,\mathrm{sign}\,(F(t)-S_0(t))_+ - b\,\mathrm{sign}\,(F(t)-S_0(t))_-$$

ортогональна подпространству $\mathcal{N}_{N,r}(\overline{x})$, т. е. справедливо равенство

$$\int_{-1}^{1} g(t)u(t)\,dt = 0$$

для всех $u(t)\in\mathcal{N}_{N,r}(\overline{x})$.

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \int_{-1}^{1} \varphi_r^*(t, x) g(x)\, dx . \tag{7}$$

Из представления (7) имеем $(L_{r-j}^* G)(-1) = 0,\ j = 1, \ldots, r,\ G(-1) = 0$.

Из ортогональности функции g подпространству $\mathcal{N}_{N,r}(\overline{x})$ следует ее ортогональность подпространству Π_{r-1};

$$0 = \int_{-1}^{1} u_0(t) g(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (D_0^* D_1^* \ldots D_r^* G)(t)\, dt =$$

$$= (D_1^* \ldots D_r^* G)(1) - (D_1^* \ldots D_r^* G)(-1) =$$

$$= (L_{r-1}^* G)(1) - (L_{r-1}^* G)(-1) .$$

Следовательно, $(L_{r-1}^* G)(1) = (L_{r-1}^* G)(-1) = 0$.

Далее, применяя к правым частям равенств

$$0 = \int_{-1}^{1} u_k(t) g(t)\, dt$$

для всех $k = 1, \ldots, r$ лемму 1, получаем $(L_{r-j}^* G)(-1) = (L_{r-j}^* G)(1) = 0$.

В силу ортогональности функции g подпространству $\mathcal{N}_{N,r}(\overline{x})$, представления (6) и леммы 2 имеем

$$0 = \int_{-1}^{1} g(t) \left(\sum_{i=0}^{r} b_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_r(t, x_i) \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{-1}^{1} g(t) \varphi_r(t, x_i)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{-1}^{1} g(t) \left(\Omega_r(t, x_i) - (-1)^r \varphi_r^*(x_i, t) \right) dt = (-1)^r \sum_{i=1}^{N} a_i G(x_i) . \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{N} a_i G(x_i) = 0 .$$

Это означает, что векторы $(a_1, \ldots, a_N)$ и $(G(x_1), \ldots, G(x_N))$ ортогональны, и в силу произвольности вектора $(a_1, \ldots, a_N)$ получаем $G(x_1) = G(x_2) \ldots$ $\ldots G(x_N) = 0$.

Положим $S^{(\alpha,\beta)}(t) = G(t)$. Очевидно, $S^{(\alpha,\beta)}(t) \in \Gamma_{N,r}^{(\alpha,\beta)}$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$E(W_1^{L_r}; \mathcal{N}_{N,r}(\overline{x}))_{1;\alpha,\beta} = \max \{ \| S^{(\alpha,\beta)} \|_\infty ; \| S^{(\beta,\alpha)} \|_\infty \},$$

где $S^{(\alpha,\beta)} \in \Gamma_{N,r}^{(\alpha,\beta)}$, $S^{(\beta,\alpha)} \in \Gamma_{N,r}^{(\beta,\alpha)}$ *такие, что* $S^{(\alpha,\beta)}(x_k) = S^{(\beta,\alpha)}(x_k) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы двойственности для наилучших (α, β)-приближений имеем

$$E(W_1^{L_r}; \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x}))_{1;\alpha,\beta} = \sup\{E(f; \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x}))_{1;\alpha,\beta}:\ f \in W_1^{L_r}\} =$$

$$= \sup\left\{\sup\left\{\int_{-1}^{1} f(t)h(x)\,dt:\ \ h \perp \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x}),\ \|h\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1\right\}:\ \ f \in W_1^{L_r}\right\},$$

Положим

$$g(t) = \int_{-1}^{1} \varphi_r^*(t,x)h(x)\,dx\,.$$

Тогда с учетом леммы 1

$$E(W_1^{L_r}; \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x}))_{1;\alpha,\beta} = \sup\left\{\sup\left\{\int_{-1}^{1} f(t)(L_r^* g)(t)\,dt:\right.\right.$$

$$\left.\left.(L_r^* g) \perp \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x}),\ \|L_r^* g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1\right\}:\ \ f \in W_1^{L_r}\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sup\left\{\int_{-1}^{1} (L_r f)(t)g(t)\ dt:\ \ \|L_r f\|_1 \le 1\right\}:\ \ g \in W^{L_r^*}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}},\right.$$

$$\left.(L_{r-j}\,g)(-1) = (L_{r-j}\,g)(1) = 0,\ j = 1,\dots,r,\ \ g(-1) = g(1) = 0\right\} =$$

$$= \sup\{\|g\|_\infty:\ \ g \in W^{L_r^*}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}},\ \ g(-1) = g(1) = 0,$$

$$(L_{r-j}\,g)(-1) = (L_{r-j}\,g)(1) = 0,\ j = 1,\dots,r,\ \ L_r^* g \perp \mathcal{N}_{N,r}(\bar{x})\}. \tag{9}$$

Пусть $S^{(\alpha,\beta)}(t) \in \Gamma_{N,r}^{(\alpha,\beta)}$, $S^{(\beta,\alpha)}(t) \in \Gamma_{N,r}^{(\beta,\alpha)}$ такие, что

$$S^{(\alpha,\beta)}(x_k) = S^{(\beta,\alpha)}(x_k) = 0, \qquad k = 1,\dots,N.$$

Обозначим через I_k, $k = 1,\dots,N$, интервалы (x_k, x_{k+1}), где $x_0 = -1$, $x_{N+1} = 1$ и $I_k^{\pm} = \{t \in I_k:\ \pm S^{(\alpha,\beta)}(t) > 0\}$. Ясно, что $I_k = I_k^+ \cup I_k^-$.

Докажем, что справедливы неравенства

$$-S^{(\beta,\alpha)}(t) \le g(t) \le S^{(\alpha,\beta)}, \qquad t \in I_k^+. \tag{10}$$

Предположим противное. Пусть для некоторого k^* существует точка $z_0 \in I_{k^*}^+$, $z_0 \ne x_k$, $k = 1,\dots,N$, такая, что $g(x_0) > S^{(\alpha,\beta)}(z_0)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\rho(t) = S^{(\alpha,\beta)}(t) - \frac{S^{(\alpha,\beta)}(z_0)}{g(z_0)}\,g(t).$$

Функция $\rho(t)$ удовлетворяет условиям

$$\rho(-1) = \rho(1) = 0; \quad \rho(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, N; \quad \rho(z_0) = 0;$$

$$(L^*_{r-j}\rho)(-1) = (L^*_{r-j}\rho)(1) = 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

т. е. функция ρ имеет на $[-1, 1]$ $N + 2r + 1$ нулей с учетом кратностей. Следовательно, по теореме Ролля $(L^*_r\rho)(t)$ имеет не менее $N + r + 1$ нулей с учетом кратностей. С другой стороны, нетрудно заметить, что $\operatorname{sign}(L^*_r\rho) = \operatorname{sign}(L^*_r S^{(\alpha,\beta)})$ и в силу теоремы 1 получаем $\nu(L^*_r\rho) \leq N + r$. Полученное противоречие и доказывает (10).

Аналогичными рассуждениями можно доказать неравенства

$$-S^{(\alpha,\beta)}(t) \leq g(t) \leq S^{(\beta,\alpha)}, \quad t \in I^-_k. \tag{11}$$

Остается заметить, что сплайны $S^{(\alpha,\beta)}(x)$ и $-S^{(\beta,\alpha)}(x)$ удовлетворяют условиям, наложенным на функцию g в (9). Учитывая последнее замечание, а также (10) и (11), получаем утверждение теоремы.

Таким образом, как уже отмечалось выше, теоремы 1 и 2 обобщают результаты [7].

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409–416.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применения в анализе и статистике. – М.: Наука, 1976. – 568 с.
4. *Karlin S., Schumaker L.* The fundamental theorem of algebra for Tchebysheffian monosplines // J. Analyse Math. – 1967. – **5**, № 20. – P. 233–270.
5. *Schumaker L.* Uniform approximation by Tchebysheffian spline functions // J. Math. and Mech. – 1968. – **18**, № 4. – P. 369–378.
6. *Женсыкбаев А. А.* Чебышевские сплайны и их свойства // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций. – М.: Наука, 1987. – С. 164–168.
7. *Бабенко В. Ф., Поляков О. В.* О несимметричных приближениях сплайнами классов дифференцируемых функций в пространстве $L_1[-1, 1]$ // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 27–34.
8. *Шевалдина О. Я.* О приближении классов W^r_p полиномиальными сплайнами в среднем // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. – С. 113–120.
9. *Бабенко В. Ф.* О существовании совершенных сплайнов и моносплайнов с заданными нулями // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1987. – С. 6–9.

Получено 12.10.95