УДК 517.5

А. А. Лигун, А. А. Шумейко (Днепродзерж. индустр. ин-т)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПЛОЩАДИ *

For disks with equal radii, under condition of minimization of the area of figure bounded by a given curve, we investigate a problem on asymptotically optimal location and connected combination of these disks.

Досліджується задача про асимптотично оптимальне розташування кіл однакового радіуса при мінімізації площини фігури, обмеженої даною кривою, та зв'язного об'єднання цих кіл.

Пусть дана гладкая замкнутая без самопересечений кривая $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$. Для определенности в дальнейшем будем считать, что она задана в естественной параметризации. Пусть число r меньше, чем наименьший радиус кривизны кривой $\Gamma(t)$. Объединение $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ из n кругов радиуса r будем называть допустимым для кривой $\Gamma(t)$ и числа r, если выполняются следующие условия:

1) $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ — односвязное множество;

2) $\mathcal{U}_n(r, \Gamma) \bigcap \Gamma(0) \neq \varnothing$; $\quad \mathcal{U}_n(r, \Gamma) \bigcap \Gamma(T) \neq \varnothing$;

3) $\mathring{\mathcal{U}}_n(r, \Gamma) \bigcap \Gamma(t) = \varnothing$,

где, как обычно, $\mathring{\mathcal{U}}_n(r, \Gamma)$ — внутренность области $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$;

4) при любых достаточно малых ε пересечение эквидистанты

$$(x(t) + \varepsilon y'(t), y(t) - \varepsilon x'(t)), \qquad t \in [0, T],$$

и множества $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ пусто.

Для любого допустимого множества $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ через $s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r, \Gamma))$ обозначим площадь фигуры, ограниченной множеством $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ и кривой $\Gamma(t)$.

При фиксированных r и s число $n^\circ = n^\circ(s, r, \Gamma)$ будем называть s-оптимальным для кривой Γ, если при данном s для любого допустимого множества $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ из неравенства $s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r, \Gamma)) \leq s$ следует, что $n \geq n^\circ$. Соответствующий ему допустимый набор кругов $\mathcal{U}_{n^\circ}(r, \Gamma)$ будем называть s-оптимальным для кривой Γ.

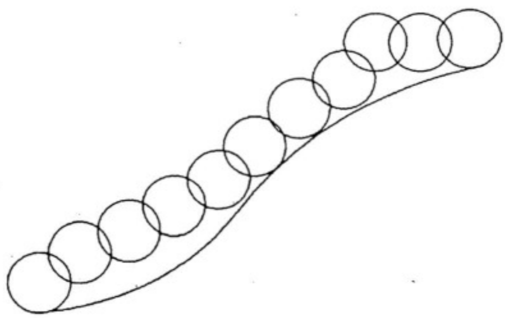

Рис. 1. Допустимое множество $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$

Инфинитную последовательность допустимых наборов кругов $\{ \mathcal{U}_{n^*}(r, \Gamma) \}$,

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, Грант NU-92000 & SPU-041039.

$n^* = n^*(r, \Gamma)$, будем называть асимптотически s-оптимальной для кривой Γ и числа r, если при $s \to 0$ выполняется асимптотическое равенство $n^* = n^\circ(1 + o(1))$.

Следующая задача является двойственной к рассмотренной выше.

При заданных n и r допустимый набор $\mathcal{U}_n^\circ(r, \Gamma)$ будем называть n-оптимальным для кривой Γ, если для любого допустимого набора $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ выполняется неравенство $s(\Gamma, \mathcal{U}_n^\circ(r, \Gamma)) \le s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r, \Gamma))$. Последовательность наборов $\{\mathcal{U}_n^*(r, \Gamma)\}$ будем называть асимптотически n-оптимальной для заданных r и Γ, если при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_n^*(r, \Gamma)) \le s(\Gamma, \mathcal{U}_n^\circ(r, \Gamma))\,(1 + o(1)).$$

В инженерной практике при фрезерной обработке возникает задача минимизации площади фигуры, заключенной между обрабатываемым контуром и линией формообразования, получаемой движением фрезы. Эта задача близка к классической задаче о квадратурной формуле: заданы функция и аппарат приближения, например сплайн, и требуется минимизировать площадь фигуры, заключенной между аппаратом приближения и данной функцией.

В данной статье методами классической теории приближений решается задача, возникшая из инженерной практики.

Без труда устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathcal{U}_n^*(r, \Gamma)\}$ *— последовательность асимптотически n-оптимальных наборов кругов и* $\{\mathcal{U}_{n^*}(r, \Gamma)\}$ *— последовательность асимптотически s-оптимальных наборов кругов. Тогда при* $s \to 0$

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_{n^*}^*(r, \Gamma)) = s(1 + o(1))$$

и при $n \to \infty$ $n^* = n(1 + o(1))$.

Т. е., если последовательность наборов кругов асимптотически оптимальна в одном смысле, то она будет асимптотически оптимальна и в другом смысле.

В связи с этим мы будем решать одну из поставленных задач — задачу определения наборов $\{\mathcal{U}_n^*(r, \Gamma)\}$, n-оптимальных для кривой Γ.

Прежде чем мы сформулируем основные результаты статьи, определим некоторые необходимые в дальнейшем понятия.

Как уже отмечалось ранее, мы рассматриваем кривые $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, заданные в естественной параметризации.

Пусть $k(t) = x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)$ — кривизна кривой $\Gamma(t)$ в точке t и $\Phi(t) = \sqrt[3]{1 - rk(t)}$. Через

$$\omega(z, t) = \sup\{|z(t') - z(t'')| \,\big|\, |t' - t''| \le t,\ t', t'' \in [0, T]\}$$

обозначим, как обычно, модуль непрерывности функции z в точке t и положим $\omega_n = \omega(\Phi, 1/n)$.

Теорема 2. *Пусть гладкая замкнутая без самопересечений кривая* $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, *заданная в естественной параметризации, такова, что* $x, y \in C^4_{[0,T]}$ *и* $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ *— произвольный набор функций из* $L^\infty_{\infty[0,T]}$ *таких, что*

$$\| |\Phi_n| - |\Phi| \|_\infty \le \omega_n^\eta, \tag{1}$$

где $\eta \in (0, 1/8)$. *Выберем набор точек* $\{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$ *из условий*

$$\int_0^{t^*_{i,n}} (|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta})\,dt = \frac{i}{n}\int_0^T (|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta})\,dt, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

а центры окружностей $(X_{i,n}, Y_{i,n})$ *выберем, исходя из равенств*

$$(X_{i,n}, Y_{i,n}) = (x(t^*_{i,n}) - r y'(t^*_{i,n}), y(t^*_{i,n}) + r x'(t^*_{i,n})), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

и обозначим через $\mathcal{U}^*_n(r, \Gamma)$ *объединение всех кругов радиуса* r *с центрами* $(X_{i,n}, Y_{i,n})$. *Тогда при* $n \to \infty$ *последовательность* $\{\mathcal{U}^*_n(r, \Gamma)\}_{n=1}^{\infty}$ *будет асимптотически* n*-оптимальной для кривой* Γ *и при этом будет выполняться соотношение*

$$s(\Gamma, \mathcal{U}^*_n(r, \Gamma)) = \frac{1}{3rn^2}\left(\int_0^T \Phi(t)\,dt\right)^3 (1 + o(1)). \tag{3}$$

Доказательство теоремы 2 опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\mathcal{L}$ — дуга окружности радиуса R с центром в начале координат, концы которой лежат на радиус-векторах с углами наклона $\alpha/2$ и $-\alpha/2$ к оси OX, где

$$\alpha < 4\arcsin\frac{r}{R-r}, \qquad r < 2R,$$

и три пересекающихся круга радиуса r расположены так, что два крайние из них касаются этой дуги на концах и пересечение внутренности объединения этих кругов с дугой $\mathcal{L}$ пусто (рис. 2).

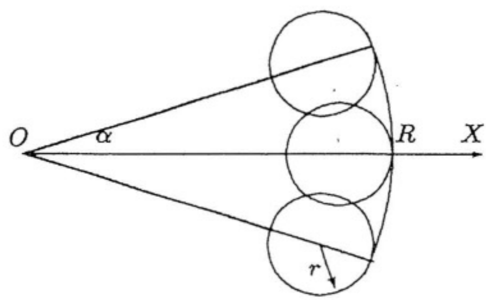

Рис. 2.

Лемма 1. *Для того чтобы площадь фигуры, ограниченной* $\mathcal{L}$ *и объединением этих кругов, была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы центр среднего круга лежал в точке* $(R - r, 0)$; *при этом наименьшая величина площади* S *будет вычисляться следующим образом:*

$$S = 2\left[(\alpha/4)(R^2 - r^2) - r(R-r)\left(\sin(\alpha/4)\sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \sin^2(\alpha/4)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R-r}{2r}\sin(\alpha/2)\right) - r^2 \arcsin\left(\frac{R-r}{r}\sin(\alpha/4)\right)\right];$$

или в точке $(R + r, 0)$, *и тогда наименьшая величина площади будет вычисляться так:*

$$S = 2\left[r(R+r)\left(\sin(\alpha/4)\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \sin^2(\alpha/4)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R+r}{2r}\sin(\alpha/2)\right) - (\alpha/4)(R^2-r^2) - r^2 \arcsin\left(\frac{R+r}{r}\sin(\alpha/4)\right)\right].$$

Доказательство. Пусть вначале круги размещены так, что длины радиус-векторов центров этих кругов меньше R (рис. 2).

Через φ обозначим угол между осью OX и радиус-вектором средней окружности. Ясно, что площадь фигуры, ограниченной дугой $\mathcal{L}$ и объединением этих кругов, будет функцией от φ:

$$S(\varphi) = R^2\frac{\alpha+2\varphi}{4} - r(R-r)\left(\sin\frac{\alpha+2\varphi}{4}\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha+2\varphi}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R-r}{2r}\sin\frac{\alpha+2\varphi}{2}\right) - r^2\left(\frac{\alpha+2\varphi}{4} + \arcsin\left(\frac{R-r}{r}\sin\frac{\alpha+2\varphi}{4}\right)\right) +$$

$$+ R^2\frac{\alpha-2\varphi}{4} - r(R-r)\left(\sin\frac{\alpha-2\varphi}{4}\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha-2\varphi}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R-r}{2r}\sin\frac{\alpha-2\varphi}{2}\right) - r^2\left(\frac{\alpha-2\varphi}{4} + \arcsin\left(\frac{R-r}{r}\sin\frac{\alpha-2\varphi}{4}\right)\right).$$

Чтобы объединение кругов было односвязной областью, угол φ должен лежать в промежутке $[-\psi, \psi]$, где $\psi = \arcsin(r/(R-r))$. Заметим, что на этом промежутке функция $S(\varphi)$ четная, а ее вторая производная $S''(\varphi)$ для всех $\varphi \in [-\psi, \psi]$ положительна, т. е. $S_{\min} = S(0)$, что и требовалось доказать.

Случай, когда длины радиус-векторов центров кругов больше R (рис. 3) рассматривается аналогично.

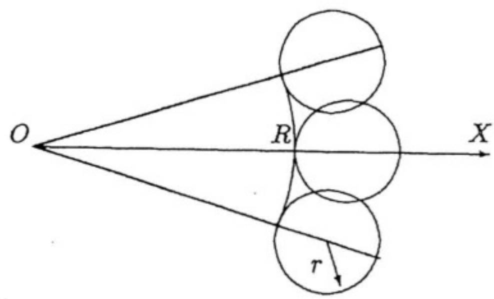

Рис. 3

Пусть $\mathcal{L}$ — дуга окружности радиуса R с центром в начале координат, концы которой лежат на радиус-векторах с углами наклона 0 и α к оси OX, где

$$\alpha < 2n\arcsin\frac{r}{R-r}, \qquad r < 2R,$$

и $n+1$ пересекающихся кругов расположены так, что пересечение внутренностей объединения этих кругов с дугой $\mathcal{L}$ пусто. Две крайние окружности касаются этой дуги на концах, и радиус-векторы их центров имеют длину меньше R.

Лемма 2. *Для того чтобы площадь $S_n(r, \mathcal{L})$ фигуры, ограниченной $\mathcal{L}$ и объединением этих кругов, была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы центры этих кругов определялись равенствами*

$$(X_i, Y_i) = (R-r)\left(\cos\frac{i\alpha}{n}, \sin\frac{i\alpha}{n}\right), \tag{4}$$

при этом минимальная площадь равна

$$n\left[\frac{\alpha}{2n}(R^2-r^2) - r(R-r)\left(\sin(\alpha/2n)\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\sin^2(\alpha/2n)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R-r}{2r}\sin(\alpha/n)\right) - r^2\arcsin\left(\frac{R-r}{r}\sin(\alpha/2n)\right)\right].$$

Если радиус-векторы имеют длину больше R, то для того чтобы площадь фигуры, ограниченной $\mathcal{L}$ и объединением этих кругов, была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы центры этих кругов определялись равенствами

$$(X_i, Y_i) = (R+r)\left(\cos\frac{i\alpha}{n}, \sin\frac{i\alpha}{n}\right), \tag{5}$$

при этом минимальная площадь будет равна

$$n\left[r(R+r)\left(\sin(\alpha/2n)\sqrt{1-\left(\frac{R+r}{r}\right)^2\sin^2(\alpha/2n)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R+r}{2r}\sin(\alpha/n)\right) - \frac{\alpha}{2n}(R^2-r^2) - r^2\arcsin\left(\frac{R+r}{r}\sin(\alpha/2n)\right)\right].$$

Доказательство. Рассмотрим вначале первый случай. Прежде всего отметим, что если какой-то из кругов не касается дуги $\mathcal{L}$, то площадь, ограниченная объединением кругов и дугой, только уменьшится, если этот круг подвинуть ближе к $\mathcal{L}$. Таким образом, оптимальный набор кругов будет из множества наборов кругов, каждый из которых касается дуги $\mathcal{L}$.

Для случая $n=2$ эта лемма совпадает с предыдущей. Пусть для случая n кругов утверждение леммы будет справедливым. Покажем, что утверждение леммы справедливо и для $n+1$ кругов.

Итак, пусть дан набор $n+1$ пересекающихся кругов, расположенных так, что каждый из них касается дуги $\mathcal{L}$, и пересечение внутренности объединения этих кругов с дугой $\mathcal{L}$ пусто, причем не все центры этих кругов удовлетворяют условиям (4) (или (5)). Выберем три любых пересекающихся круга, среди которых хотя бы один не удовлетворяет этим условиям. Для того чтобы площадь фигуры, ограниченной объединением этой тройки кругов и дугой $\mathcal{L}$, была минимальной, по предыдущей лемме следует, что расстояния (по дуге $\mathcal{L}$) от точки касания среднего круга до точек касания соседних кругов должны быть одинаковыми. А так как из предположения имеем, что для набора n кругов оптимальным будет такое расположение, что расстояние между точками касания соседних кругов будет одинаковым, то и для случая $n+1$ кругов лемма справедлива.

Пусть $\mathcal{L}$ — дуга окружности радиуса R с центральным углом α, где

$$\alpha < 2\arcsin\frac{r}{R-r}, \qquad r < 2R,$$

и два пересекающихся круга расположены так, что касаются этой дуги на концах и пересечение внутренности объединения этих кругов с дугой $\mathcal{L}$ пусто.

Используя формулу Тейлора, легко показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Если радиус-векторы центров кругов имеют длины меньше R, то при $\alpha \to 0$ площадь, ограниченная объединением этих кругов и дугой $\mathcal{L}$, будет равна*

$$S(r, \mathcal{L}) = \frac{\alpha^3}{3} r(R-r)\left(\frac{R}{r}\right)^2 + O(\alpha^4),$$

если же длины радиус-векторов больше R, то имеем

$$S(r, \mathcal{L}) = \frac{\alpha^3}{3} r(R+r)\left(\frac{R}{r}\right)^2 + O(\alpha^4).$$

Отсюда и из леммы 2 сразу вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Если выполняется условие леммы 2 и радиус-векторы кругов имеют длины меньше R, то при $n \to \infty$ справедливо равенство*

$$S_n(r, \mathcal{L}) = \frac{r(R-r)\alpha^3}{4!n^2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

в противном случае имеем

$$S_n(r, \mathcal{L}) = \frac{r(R+r)\alpha^3}{4!n^2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Под хаусдорфовым расстоянием между кривыми Γ_1 и Γ_2 будем понимать величину [3]

$$\mathcal{R}(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min\{\varepsilon: \Gamma_1 \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_2),\ \Gamma_2 \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma_1)\},$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{M \in \Gamma} K_\varepsilon(M)$ — ε-коридор кривой Γ, а $K_\varepsilon(M)$ — шар радиуса ε с центром в точке M.

Пусть кривая $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, заданная в естественной параметризации, и $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, T]$ с шагом $h_{i+1/2} = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Если $\Gamma_i = \Gamma(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\Gamma_{i+1/2} = \Gamma(t_{i+1/2}) = \Gamma((t_{i+1} + t_i)/2)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то через $\gamma(\Gamma, \Delta_n, t)$ обозначим кривую, которая для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ совпадает с дугой окружности, проходящей через точки Γ_i, $\Gamma_{i+1/2}$, Γ_{i+1}.

Лемма 5. *Пусть кривая $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, заданная в естественной параметризации, такова, что $x, y \in C^3_{[0,T]}$, тогда равномерно по i при $n \to \infty$*

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = 3^{-5/2} \max_{0 \le i \le n-1} \left(|F_{i+1/2}| h^3_{i+1/2} + o(h^3_{i+1/2})\right),$$

где $F(t) = k'(t) = x'(t)y'''(t) - x'''(t)y'(t)$.

Доказательство. Пусть $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Не нарушая общности, можно считать $t_i = -h$, $t_{i+1} = h$. Используя формулу Тейлора в окрестности нуля, можно показать, что окружность $\gamma(\Gamma, \Delta_n)$ на этом участке имеет центр с координатами

$$X = x_0 - \frac{1}{q_0}\left(y_0' + \frac{h^2}{12}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''') + \frac{1}{6}h^2 y_0'''\right) + o(h^3),$$

$$Y = y_0 + \frac{1}{q_0}\left(x_0' + \frac{h^2}{12}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''') + \frac{1}{6}h^2 x_0'''\right) + o(h^3),$$

и радиус

$$R = \frac{1}{q_0}\sqrt{1 + \frac{h^2}{2}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''')} + o(h^3),$$

где

$$q_0 = k_0 + \frac{1}{12}h^2 F_0 - \frac{1}{4}h^2(x_0'' y_0''' - x_0''' y_0'')$$

и $z_0 = z(0)$.

Кроме того, если $\varepsilon^2(t) = (x(t) - X)^2 + (y(t) - Y)^2 - R^2$, то для $\tau \in [-h, h]$ имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6q_0}k_0 F_0(h^2 - \tau^2)\tau + o(h^3) = \frac{1}{6}F_0(h^2 - \tau^2)\tau + o(h^3).$$

Таким образом, если $\xi = 2(t - t_{i+1/2})/h_{i+1/2}$, то для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ равномерно по i получаем

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{6}F_{i+1/2}(1 - \xi^2)\xi h_{i+1/2}^3 + o(h_{i+1/2}^3).$$

Из того, что

$$\max_{|\xi| \le 1} |\xi(1 - \xi^2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

следует, что равномерно по i будет выполняться соотношение

$$\varepsilon_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \varepsilon_i(t) = \frac{1}{9\sqrt{3}}F_{i+1/2}h_{i+1/2}^3 + o(h_{i+1/2}^3),$$

и поэтому

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = 3^{-5/2} \max_{0 \le i \le n-1} (|F_{i+1/2}| h_{i+1/2}^3 + o(h_{i+1/2}^3)).$$

Заметим, что для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ равномерно по i справедливо равенство

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{|k_{i+1/2}|} + O(h_{i+1/2}^2); \tag{6}$$

для угла, стягивающего i-ю дугу окружности, будет выполняться соотношение

$$\alpha_{i+1/2} = 2h_{i+1/2}|k_{i+1/2}| + O(h_{i+1/2}^2). \tag{7}$$

Для равномерного разбиения $\delta_N = \{iT/N\}_{i=0}^N$ эти соотношения принимают вид

$$\mathcal{R}(\Gamma, \gamma(\Gamma, \delta_n)) = 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3 \max_{0 \le i \le N-1} |F_{i+1/2}| + o\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

а для $t \in [iT/N, (i+1)T/N]$ —

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{|k_{i+1/2}|} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \tag{8}$$

и

$$\alpha_{i+1/2} = 2\left(\frac{T}{N}\right)|k_{i+1/2}| + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{9}$$

Кроме того, если $S_{i+1/2}$ — площадь фигуры, ограниченной на i-м промежутке дугой окружности и кривой Γ, то

$$S_{i+1/2} \le \frac{\alpha_{i+1/2}}{2}\left(\left(R_{i+1/2} + \frac{|F_{i+1/2}|}{9\sqrt{3}}\left(\frac{T}{N}\right)^3\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(R_{i+1/2} - \frac{|F_{i+1/2}|}{9\sqrt{3}}\left(\frac{T}{N}\right)^3\right)^2\right) = \frac{2\alpha_{i+1/2}}{9\sqrt{3}} R_{i+1/2}\,|F_{i+1/2}|\left(\frac{T}{N}\right)^3 =$$

$$= \frac{4}{9\sqrt{3}} R_{i+1/2}\,|F_{i+1/2}|\left(\frac{T}{N}\right)^4 + O\left(\frac{1}{N^5}\right). \tag{10}$$

Доказательство *теоремы* 2. Пусть $N = [n^{3/4}] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a, $n > [T/2r] + 1$, и $\delta_N = \{iT/N\}_{i=0}^{N}$. К допустимому множеству $\mathcal{U}_n(r, \Gamma)$ добавим еще N кругов, касающихся кривой $\Gamma(t)$ в точках $\Gamma(iT/N)$. Тогда это множество можно разбить на N наборов $\mathcal{U}_{n_i}(r, \Gamma)$, допустимых для кривой $\Gamma(t)$ при $t \in [i\,T/N, (i+1)\,T/N]$.

Построим кривую $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, t)$, которая для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ совпадает с дугой окружности, проходящей через точки $\tilde{\Gamma}_i$, $\tilde{\Gamma}_{i+1/2}$, $\tilde{\Gamma}_{i+1}$, где $\tilde{\Gamma}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ и

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \doteq \left(x_i - y_i' 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3 |F_{i+1/2}|,\, y_i + x_i' 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3 |F_{i+1/2}|\right).$$

Аналогично определяются $\tilde{\Gamma}_{i+1/2}$ и $\tilde{\Gamma}_{i+1}$. На каждом промежутке $[iT/N, (i + 1)T/N]$ множество $\mathcal{U}_{n_i}(r, \Gamma)$ дополним двумя кругами, касающимися $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, t)$ в точках $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, iT/N)$ и $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, (i+1)T/N)$. Это множество обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}_{n_i}(r, \Gamma)$. Тогда множество $\tilde{\mathcal{U}}_{n_i}(r, \Gamma)$ будет допустимым как для кривой $\Gamma(t)$, так и для кривой $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, t)$.

Тогда сразу получаем

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_{n_i}(r, \Gamma)) \ge$$

$$\ge s(\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N), \tilde{\mathcal{U}}_{n_i}(r, \Gamma)) - \frac{4}{9\sqrt{3}} R_{i+1/2}\,|F_{i+1/2}|\left(\frac{T}{N}\right)^4 + O\left(\frac{1}{N^5}\right).$$

Отсюда, а также из лемм 4 и 5 следует, что равномерно по i

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_{n_i}(r, \Gamma)) \ge \frac{1}{3r(n_i+2)^2}(1 - rk_{i+1/2})\left(\frac{T}{N}\right)^3 + O\left(\frac{1}{N^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3r(n_i+2)^2}\Phi_{i+1/2}^3\left(\frac{T}{N}\right)^3 + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Тогда, учитывая выбор N, получаем

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r,\Gamma)) \geq \sum_{i=1}^{N} s(\Gamma, \mathcal{U}_{n_i}(r,\Gamma)) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{3r(n_i+2)^2} \Phi_{i+1/2}^3 \left(\frac{T}{N}\right)^3 + O\left(\frac{1}{n^{2,25}}\right).$$

Задача

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\beta_i^2} \to \inf, \quad A_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

при условии

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i \geq B$$

имеет единственное решение, и ее экстремальное значение равно $B^{-2}\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^{1/3}\right)^3$, что вместе с предыдущим позволяет записать

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r,\Gamma)) \geq \frac{1}{3(n+3N)^2 r}\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_{i+1/2} \frac{T}{N}\right)^3 + O\left(\frac{1}{n^{2,25}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3rn^2}\left(\int_0^T \Phi(t)\,dt\right)^3 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{0,25}}\right)\right),$$

что и доказывает оценку снизу.

Перейдем к доказательству оценки сверху.

Выберем значения параметра $t_{i,n}^*$, соответствующие точкам касания кругов допустимого набора с кривой Γ, из условия теоремы, т. е.

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} (|\Phi_n(t)| + \omega_n^\eta)\,dt = \frac{A_n}{n}. \tag{11}$$

Здесь и далее

$$A_n = \int_0^T (|\Phi_n(t)| + \omega_n^\eta)\,dt, \quad A = \int_0^T |\Phi(t)|\,dt.$$

Тогда при достаточно больших n (см. условие (1)) существует число $|\chi_{i+1/2}| \leq 1$ такое, что

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} (|\Phi(t)| + \omega_n^\eta(1+\chi_{i+1/2}))\,dt = \frac{A_n}{n}.$$

По теореме о среднем существует точка $\zeta_{i+1/2} \in (t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*)$ такая, что

$$(|\Phi(\zeta_{i+1/2})| + \omega_n^\eta(1+\chi_{i+1/2}))h_{i+1/2} = \frac{A_n}{n}.$$

Далее имеем

$$A_n = \int_0^T (|\Phi_n(t)| + \omega_n^\eta)\,dt = \int_0^T (|\Phi(t)| + \omega_n^\eta(1+\chi_{i+1/2}))\,dt = A + O(\omega_n^\eta).$$

Поэтому

$$(|\Phi(\zeta_{i+1/2})| + \omega_n^\eta(1+\chi_{i+1/2}))h_{i+1/2} = \frac{A}{n}(1 + O(\omega_n^\eta)).$$

Из (11) легко видеть, что $\omega_n^\eta h_{i+1/2} \le A_n/n$, т. е. $h_{i+1/2} \le A_n/(n\omega_n^\eta)$.

Если $S^*_{i+1/2}$ — площадь фигуры, ограниченной кривой Γ и $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*, t)$, то

$$S^*_{i+1/2} \le \frac{4}{9\sqrt{3}} R_{i+1/2}\,|F_{i+1/2}|\,h^4_{i+1/2} + O(h^5_{i+1/2}),$$

т. е.

$$S^*_{i+1/2} = O\left(\frac{1}{n^4}\,\omega_n^{-4\eta}\right).$$

Учитывая (6) и (7), из леммы 1 получаем, что на i-м промежутке

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r, \Gamma, \Delta_n^*)) \le$$

$$\le \frac{r|\Phi^3_{i+1/2}|}{4!k_{i+1/2}}\,8h^3_{i+1/2}k^3_{i+1/2}\left(\frac{1}{k_{i+1/2}r}\right)^3 + S^*_{i+1/2} + O(h^4_{i+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{3r}|\Phi^3_{i+1/2}|h^3_{i+1/2} + O(h^4_{i+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{3r}(|\Phi(\zeta_{i+1/2})|\,h_{i+1/2})^3 + O(h^3_{i+1/2}\,\omega(\Phi^3, h_{i+1/2}) + h^4_{i+1/2}) =$$

$$= \frac{1}{3r}((|\Phi(\zeta_{i+1/2})| + \omega_n^\eta(1+\chi_{i+1/2}))h_{i+1/2})^3 +$$

$$+ O(h^3_{i+1/2}\,\omega(\Phi^3, h_{i+1/2}) + h^4_{i+1/2} + h^3_{i+1/2}\,\omega_n^\eta) =$$

$$= \frac{1}{3r}\left(\frac{A}{n}\right)^3(1 + O(\omega_n^\eta)).$$

Тогда для площади, ограниченной кривой Γ и $\mathcal{U}_n(r, \Gamma, \Delta_n^*)$, будет выполняться соотношение

$$s(\Gamma, \mathcal{U}_n(r, \Gamma, \Delta_n^*)) \le \frac{1}{3rn^2}A^3(1 + o(1)),$$

что и доказывает основное утверждение.

1. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 9. – С. 1283–1293.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
3. *Сендов Б.* Хаусдорфовые приближения. – София, 1979. – 372 с.

Получено 18.10.95