УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЙМОВІРНІСТЬ ПЕРЕБУВАННЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В ТРУБЧАСТИХ ОБЛАСТЯХ НА ВЕЛИКОМУ ПРОМІЖКУ ЧАСУ

Various representations of asymptotics are given for the probability of containment of the Wiener process in a curvilinear strip on expanding time intervals.

Доводяться різноманітні зображення асимптотик для ймовірності перебування вінерівського процесу в криволінійній смузі на розширюваних часових інтервалах.

Нехай дано дві функції $g_1(t), g_2(t)$: $g_1(t) < g_2(t)$, $g_1(0) < 0 < g_2(0)$. Позначимо відрізок $[g_1(t), g_2(t)] := D_t$.

У даній статті вивчається асимптотика ймовірності $P_T = P(w(t) \in D_t,\ 0 \le t \le T)$, $T \to \infty$.

Метод дослідження асимптотики P_T базується на заміні міри та застосуванні рівнянь з частинними похідними. В [1] за допомогою заміни міри отримані результати для випадку симетричної смуги, тобто коли $-g_1(t) = g_2(t)$.

Надалі буде потрібна наступна теорема з [2]. Нехай маємо два дифузійні процеси $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, які визначаються за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\xi_i(t) = a_i(t, \xi_i(t))\,dt + b(t, \xi_i(t))\,dw(t),$$
$$t \in [0, T], \quad \xi_i(0) = x, \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Теорема 1 [2, с. 508]. *Якщо коефіцієнти рівнянь* (1) *задовольняють умови:*
А. існує таке K, що:

1) $$|a_1(t,x) - a_1(t,y)| + |a_2(t,x) - a_2(t,y)| \le K|x - y|;$$

2) $$a_1^2(t,x) + a_2^2(t,x) + b^2(t,x) \le K(1 + x^2);$$

В. існує така неперервна функція $\lambda(t,x)$, що $a_2(t,x) - a_1(t,x) = \lambda(t,x)b(t,x)$, то міра P_{ξ_2} є неперервною відносно міри P_{ξ_1} та

$$\frac{dP_{\xi_2}}{dP_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot, w)) = M\left\{\exp\left(\int_0^T \lambda(s, \xi_1(s))\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(s, \xi_1(s))\,ds\right) \Big/ F_{\xi_1}\right\},$$

де $F_{\xi_1} = \sigma(\xi_1(s),\ 0 \le s \le T)$.

Позначимо

$$\tau = \inf\{t : w(t) \notin D_t\}, \quad P_T = P(\tau > T),$$

$$\rho(t) = \frac{g_1 + g_2(t)}{2}, \quad g(t) = \frac{g_2 - g_1(t)}{2},$$

$$\Theta(T) = \frac{\pi^2}{8}\int_0^T g^{-2}(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^T \dot\rho^2(y)\,dy - \frac{1}{2}\ln\frac{g(T)}{g(0)} + \dot\rho(0)\rho(0) - \frac{\rho^2(0)\dot g(0)}{2g(0)},$$

$$[x]^+ = \begin{cases} x, & \text{коли } x \ge 0, \\ 0, & \text{коли } x \le 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Якщо* $g_i(t)$, $i = 1, 2$, *мають другі похідні, визначені на кожному фіксованому проміжку* $[0, T]$, *то справедливі співвідношення*

$$\frac{8}{3\pi}\exp\left(-|\dot\rho(T)|g(T) - \frac{1}{2}[\dot g(T)]^+ g(T) - \int_0^T\left(|\ddot\rho(y)| + \frac{1}{2}[-\ddot g(y)]^+\right)g(y)\,dy\right) \le$$

$$\le P_T \exp\{\Theta(T)\} \le$$

$$\le \frac{4}{\pi}\exp\left(|\dot\rho(T)|g(T) + \frac{1}{2}[-\dot g(T)]^+ g(T) - \int_0^T\left(|\ddot\rho(y)| + \frac{1}{2}[\ddot g(y)]^+\right)g(y)\,dy\right).$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(t, x) = (x - \rho(t))/g(t)$. Ця функція трансформує криволінійну смугу

$$D = \{(t, x):\ g_1(t) \le x \le g_2(t),\ 0 \le t \le T\}$$

у смугу зі сталими границями $L = \{(t, x):\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$. Функція $\rho(t, y) = yg(t) + \rho(t)$, $y \in [-1, 1]$, є оберненою до функції $f(t, x)$, $x \in D_t$, $f(t, \rho(t, y)) = y$.

Далі розглянемо процес $\xi(t) = f(t, w(t))$. Цей процес згідно з формулою Іто задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\xi(t) = -\frac{\dot\rho(t) + \dot g(t)\xi(t)}{g(t)}dt + \frac{dw}{g(t)}, \quad \xi(0) = -\frac{\rho(0)}{g(0)}.$$

Далі робимо заміну як в [3]: $t \to \lambda(t)$. Новий процес $\eta(t) = \xi(\lambda(t))$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = -\frac{\dot\rho(\lambda(t)) + \dot g(\lambda(t))}{g(\lambda(t))}\eta(t)\dot\lambda(t)\,dt + d\int_0^{\lambda(t)}\frac{dw(s)}{g(s)}.$$

Процес

$$\zeta(u) = \int_0^u \frac{dw(s)}{g(s)}$$

є гауссівським з незалежними приростами та

$$M\zeta(u) = 0, \quad D\zeta(u) = \int_0^u \frac{ds}{g^2(s)}.$$

Якщо $\lambda(t)$ вибираємо за умови

$$\int_0^{\lambda(t)} \frac{ds}{g^2(s)} = t,$$

то, зважаючи на рівність $\dot\lambda(t) = g^2(\lambda(t))$, для процесу $\eta(t)$ маємо рівняння

$$d\eta(t) = -(\dot\rho(\lambda(t)) + \dot g(\lambda(t))\eta(t))g(\lambda(t))\,dt + dw(t),$$

$$\eta(0) = -\frac{\rho(0)}{g(0)} \overset{\text{def}}{=} \eta_0.$$

Тепер, виходячи з наведеної теореми 1 про абсолютну неперервність мір, обчислюємо вираз для щільності міри P_η відносно міри P_w:

$$\alpha_T = \frac{dP_\eta}{dP_w}(w(\cdot, w)) = \exp\left\{ \int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} (\dot\rho(\lambda(t)) + \dot g(\lambda(t))w(t))g(\lambda(t))\,dw(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} (\dot\rho(\lambda(t)) + \dot g(\lambda(t))w(t))^2 g^2(\lambda(t))\,dt \right\}.$$

Тут вінерівський процес $w(t)$ такий, що $w(0) = \eta_0$. Таким чином, маємо співвідношення

$$P(w(t) \in D_t,\ t \in [0, T]) = P(\eta(t) \in L,$$

$$t \in [0, \lambda^{-1}(T)]) = MI\{|w(t)| \le 1,\ 0 \le t \le \lambda^{-1}(T)\}\alpha_T.$$

Останнє співвідношення є базовим для отримання оцінки асимптотики для P_T, $T \to \infty$.

Далі будемо шукати оцінки типу $f_1(t) \le \alpha(t) \le f_2(t)$, де функції $f_i(t)$ детерміновані. Коли це зроблено, тоді задача зводиться до оцінки ймовірності перебування вінерівського процесу $w(t)$, $w(0) = \eta_0$ у відрізку $[-1, 1]$ на проміжку часу $[0, T]$.

Для останньої ймовірності відоме представлення

$$P(|w(t)| \le 1,\ t \in [0, u]) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 u}{8}\right) \cos\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}\eta_0\right\}.$$

Цей ряд знакозмінний та абсолютні значення його членів монотонно спадають. Таким чином, маємо оцінку зверху та знизу

$$\frac{4}{\pi}\left(\exp\left(-\frac{\pi^2 u}{8}\right)\cos\frac{\pi\eta_0}{2} - \frac{1}{3}\exp\left(-\frac{9\pi^2 u}{8}\right)\cos\frac{3\pi\eta_0}{2} \right) \le$$

$$\le P(|w(t)| \le 1,\ t \in [0, u]) \le \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2 u}{8}\right)\cos\frac{\pi\eta_0}{2}.$$

Далі, застосовуючи формулу Іто (для інтегрування за частинами), для α_T маємо

$$\ln\alpha_T = -\int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} \dot\rho(t) g(\lambda(t))\,dw(t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} \dot g(\lambda(t)) g(\lambda(t))\,d\left(w^2(t) - t\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} \dot\rho^2(\lambda(t)) g^2(\lambda(t))\,dt - \int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} \dot\rho(\lambda(t))\dot g(\lambda(t)) g^2(\lambda(t)) w(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda^{-1}(T)} \dot g^2(\lambda(t)) g^2(\lambda(t)) w^2(t)\,dt.$$

Після заміни змінної інтегрування $y = \lambda(t)$, що дає

$$t = \lambda^{-1}(y), \quad dy = \dot\lambda(t)\,dt = g^2(\lambda(t))\,dt = g^2(y)\,dt,$$

будемо мати

$$\ln \alpha_T = -\dot{\rho}(\lambda(t))g(\lambda(t))w(t)\Big|_0^{\lambda^{-1}(T)} + \int_0^T \left(g(y)\ddot{\rho}(y) + \dot{\rho}(y)\dot{g}(y)\right) w\left(\lambda^{-1}(y)\right) dy +$$

$$+ \ln\frac{g(T)}{g(0)} - \frac{1}{2} g(\lambda(t))\dot{g}(\lambda(t))w^2(t)\Big|_0^{\lambda^{-1}(T)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^T \left(\ddot{g}(y)g(y) + \dot{g}^2(y)\right) w^2\left(\lambda^{-1}(y)\right) dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \dot{\rho}^2(y)\,dy - \int_0^T \dot{\rho}(y)\dot{g}(y)w\left(\lambda^{-1}(y)\right)dy - \frac{1}{2}\int_0^T \dot{g}^2(y)w^2\left(\lambda^{-1}(y)\right)dy =$$

$$= -\dot{\rho}(0)\rho(0) + \frac{\rho^2(0)\dot{g}(0)}{2g(0)} + \frac{1}{2}\ln\frac{g(T)}{g(0)} - \dot{\rho}(T)g(T)w\left(\lambda^{-1}(T)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}g(T)\dot{g}(T)w^2\left(\lambda^{-1}(T)\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \ddot{g}(y)g(y)w^2\left(\lambda^{-1}(y)\right)dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^T \ddot{\rho}(y)g(y)w\left(\lambda^{-1}(y)\right)dy - \frac{1}{2}\int_0^T \dot{\rho}^2(y)\,dy.$$

Нарешті, маючи на увазі означення функції $[\cdot]^+$ та те, що α_T оцінюється на траєкторіях вінерівського процесу, абсолютні значення яких не перевищують одиниці, з останнього випливає доведення теореми.

З доведеної теореми отримуємо грубу асимптотику ймовірності перебування: $\ln P_T$ при $T \to \infty$.

***Наслідок* 1.** Якщо виконуються умови:

1) $$-\ln g(t) + \int_0^T g^{-2}(t)\,dt + \int_0^T \dot{\rho}^2(t)\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty;$$

2) $$\frac{|\dot{\rho}(T)| + |\dot{g}(T)|g(T) + \int_0^T (|\ddot{\rho}(t)| + |\ddot{g}(t)|)g(t)\,dt}{-\frac{1}{2}\ln g(T) + \frac{\pi^2}{8}\int_0^T g^{-2}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \dot{\rho}^2(t)\,dt} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

то

$$\ln P_T = -\left(-\frac{1}{2}\ln g(T) + \frac{\pi^2}{8}\int_0^T g^{-2}(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \dot{\rho}^2(t)\,dt\right)(1 + o(1)), \qquad T \to \infty.$$

Доведення випливає безпосередньо з теореми та умов наслідку 1. Розглянемо ще один підхід до визначення як точного значення, так і асимптотики P_T.

Позначимо

$$\beta(t) = +\frac{1}{2}\int_0^T \dot{\rho}^2(y)\,dy - \frac{1}{2}\ln\frac{g(T)}{g(0)} + \dot{\rho}(0)\rho(0) - \frac{\rho^2(0)\dot{g}(0)}{2g(0)}.$$

***Наслідок* 2.** *В умовах теореми справедлива рівність*

$$P_T = \exp\{-\beta(T)\}\dot{u}(0, \eta_0),$$

де $u(s, x)$ *— розв'язок початково-граничної задачі*

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\ddot{\rho}(\lambda(s))g^3(\lambda(s))x + \frac{1}{2}\ddot{g}(\lambda(s))g^3(\lambda(s))g^3(\lambda(s))x^2\right)u,$$

$$u(s,-1) = u(t,+1) = 0,$$

$$u\left(\lambda^{-1}(T), x\right) = \exp\left(-\dot{\rho}(T)g^3(T)x - \frac{1}{2}\dot{g}(T)g^3(T)x^2\right),$$

$$0 \le s \le \lambda^{-1}(T); \quad x \in [-1,+1].$$

Доведення. Проаналізуємо кінець доведення попередньої теореми. Там одержано формулу

$$P_T \exp\{\beta(T)\} = M\Bigg(\exp\Bigg\{-\dot{\rho}(\lambda(T))g^3(\lambda(T))w(T) - \frac{1}{2}\dot{\rho}(\lambda(T))g^3(\lambda(T))w^2(T) + $$
$$+\int_0^{\lambda^{-1}(T)}\left(\left(\ddot{\rho}(t)g^3(\lambda(t))\right)w(t) + \frac{1}{2}\ddot{g}(\lambda(t))g^3(\lambda(t))w^2(t)\right)dt\Bigg\}I\left(\tau > \lambda^{-1}(T)\right)/w(0) = \eta_0\Bigg). \tag{2}$$

Тут $I(\cdot)$ — індикатор множин та $\tau = \inf\{t\colon w(t) \overline{\in} [-1,+1]\}$. Далі, як доведено в [4], єдиний розв'язок початково-граничної задачі

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(s,x)u$$

$$u(t,-1) = u(t,+1) = 0, \quad u(t,x) = \gamma(x), \quad x \in (-1,1), \quad s \in [0,t], \tag{3}$$

$u(s,x)$ неперервна в області $[0,T)\times(-1,1)$, має вигляд

$$u(s,x) = M\left(\gamma(w(t))\exp\left\{\int_s^t \alpha(z,w(z))\,dz\right\},\ I(\tau > t)/w(s) = x\right).$$

Таким чином, якщо покладемо

$$\gamma(x) = \exp\left(-\dot{\rho}(\lambda(T))g^3(\lambda(T))x - \frac{1}{2}\dot{g}(\lambda(T))g^3(\lambda(T))x^2\right),$$

$$\alpha(s,x) = \ddot{\rho}(\lambda(s))g^3(\lambda(s))x + \frac{1}{2}\ddot{g}(\lambda(s))g^3(\lambda(s))x^2,$$

то з (2) та (3) випливає доведення наслідку 2.

Далі розглянемо приклади застосування теореми. Нехай

$$g_2(t) = (a+t)^\alpha, \quad a > 0; \quad g_1(t) = -(a+t)^\alpha + t^\beta, \quad t > 0.$$

Таким чином,

$$g(t) = (a+t)^\alpha + \frac{1}{2}t^\beta, \quad \rho(t) = \frac{1}{2}t^\beta.$$

Тепер, при умові $\max(\alpha,\beta) < 1/2$, з наслідку 1 маємо

$$\ln P_T \sim -T^{1-\min(\alpha,\beta)}, \quad T \to \infty.$$

Коли $\alpha = 1/2$, тоді користуватися наслідком 1 можна лише при умові $\beta > 1/2$. При цьому $\ln P_T \sim -T^{2\beta-1}$, $T \to \infty$.

Для обчислення точної або розвинення асимптотики P_T, $T \to \infty$, використуємо наслідок 2. Нехай

$$g_2(t) = c\sqrt{t+a} + bt, \quad g_1(T) = -c\sqrt{t+a}, \quad c > 0, \quad a > 0.$$

Обчислимо параметри, необхідні для застосування наслідку 2:

$$g(t) = c\sqrt{t+a} + \frac{b}{2}t, \quad \rho(t) = \frac{b}{2}t, \quad \ddot{\rho}(t)g^3(t) = 0, \quad \ddot{g}(t)g(t) = -\frac{c}{4},$$

$$\beta(T) = \frac{b^2}{2}T - \frac{1}{2}\ln\frac{2c\sqrt{T+a}+bT}{2c\sqrt{a}} - \frac{b^2}{2\sqrt{a(T+a)}}.$$

Далі, початково-гранична задача з наслідку 2 після заміни змінних $s = \lambda^{-1}(T) - t$ має вигляд

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} - \frac{c}{8}x^2u,$$

$$u(t,-1) = u(t,+1) = 0, \quad 0 \le t \le \lambda^{-1}(T),$$

$$u(0,x) = \exp\left(-\left(bT + 2c\sqrt{T+a}\right)^3\left(bx - \left(b + \frac{1}{2\sqrt{T+a}}\right)\right)x^2\right).$$

Операторна частина цієї задачі допускає розподіл змінних. Далі за методом Фур'є маємо представлення розв'язку

$$u(t,x) = \sum_{n\ge1} k_n \exp\{-\mu_n t\} y_n(x),$$

де μ_n, $y_{n(x)}$, $n \ge 1$, — відповідно власні числа та власні функції наступної задачі Штурма–Ліувілля

$$\frac{1}{2}\ddot{X}(x) - \left(\frac{cx^2}{8} + \mu\right)X(x) = 0, \quad X(1) = X(-1) = 0,$$

$$k_n = \int_{-1}^{1} \exp\left(-\left(bT + 2c\sqrt{T+a}\right)^3\left(bx + \left(b + \frac{1}{2\sqrt{T+a}}\right)\right)x^2\right)y_n(x)\,dx.$$

Маючи на увазі, що $\eta_0 = -\rho(0)/g(0) = 0$, одержуємо для цього випадку

$$P_T = \exp(-\beta(T)) \sum_{n\ge1} k_n \exp\left(-\mu_n \int_0^T \frac{dt}{\left(2c\sqrt{T+a} + bt\right)^2}\right) y_n(0).$$

1. *Новиков А. А.*. Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей невыхода винеровского процесса на подвижную границу // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 4. – С. 539–550.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
4. *Salminen P.* On the first hitting time and the last exit time for a brownian motion to / from a moving boundary // Adv. Appl. Prob. – 1988. – **20**. – P. 411–426.

Одержано 17.12.96