УДК 517.9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев. нац. економич. ун-т)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

We consider the case where one can find sufficient conditions for the convergence and analyticity of the matrix series used to construct a system of moment equations.

Розглянуто випадок, коли можна знайти достатні умови збіжності і аналітичності матричних рядів, які використовуються для побудови системи моментних рівнянь.

Методы усреднения получили широкое развитие в работах Н. Н. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко и др. [1]. В методе усреднения используется асимптотическое разложение в ряды, для которых принципиально исследование сходимости [2]. В [3] предложено расширение общей идеи метода усреднения для системы линейных дифференциальных уравнений со случайной правой частью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \mu A(t,\xi(t))X(t,\mu), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — марковский конечнозначный случайный процесс, принимающий значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с вероятностями $p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}(t)p_s(t), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Предполагается, что:

1) коэффициенты $\alpha_{ks}(t)$, $k, s = 1, \ldots, n$, интегрируемы и ограничены при $t \in [0, 2\pi]$ и удовлетворяет условиям [4]

$$\begin{gathered} \alpha_{kk}(t) \le 0, \qquad \alpha_{ks}(t) \ge 0, \qquad k \ne s; \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}(t) \equiv 0, \qquad \alpha_{ks}(t+2\pi) = \alpha_{ks}(t), \qquad k, s = 1, \ldots, n; \end{gathered} \tag{3}$$

2) частные значения матрицы коэффициентов $A_k(t) \equiv A_k(t, \theta_k)$ являются ограниченными интегрируемыми периодическими с периодом 2π функциями;

3) для любых двух решений системы уравнений (2) $p_k = p_{ks}(t)$, $s = 1, 2$; $k = 1, \ldots, n$, выполнены условия

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} |p_{k1}(t) - p_{k2}(t)| = 0. \tag{4}$$

Пусть $f(t, X)$ — плотность распределения случайного решения $X(t, \mu)$ системы (1).

Введем математическое ожидание

$$M(t,\mu) \equiv \langle X(t,\mu) \rangle = \int_{E_m} X f(t, X, \xi)\, dX,$$

где

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^*, \quad dX \equiv dx_1 dx_2 \dots dx_m,$$

E_m — m-мерное пространство переменных X с евклидовой нормой. Как известно [4], плотность распределения дискретно-непрерывной системы случайных величин $(\xi(t), X(t))$ можно описать функцией

$$f(t, \xi, X) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(t, X)\delta(\xi - \theta_k),$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, $f_k(t, X)$, $k = 1, \dots, n$, — частные плотности распределения.

В [4, 6] выведены моментные уравнения для системы (1):

$$\frac{dM_k(t,\mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)M_s(t,\mu) + \mu A_k(t)M_k(t,\mu), \quad k = 1, \dots, n,$$
$$M(t,\mu) = \sum_{k=1}^{n} M_k(t,\mu), \tag{5}$$

где $M_k(t, \mu)$ — частные моменты первого порядка, определяемые по формулам

$$M_k(t,\mu) = \int_{E_m} X f_k(t, X) dX. \tag{6}$$

Систему уравнений (5) порядка $m \times n$ можно использовать для исследования устойчивости решений системы уравнений (1). Нами ставится задача построения системы уравнений порядка m:

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu)M(t,\mu), \tag{7}$$

устойчивость решений которой равносильна устойчивости решений системы (5).

2. Исследование системы уравнений (2). Из условий (3), (4) следует, что решения системы уравнений (2) являются экспоненциально устойчивыми, т. е. существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} |p_{k1}(t) - p_{k2}(t)| \le C_0 e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{8}$$

Из условия (8) вытекает существование периодических функций $\varphi_k(t)$ $(\varphi_k(t + 2\pi) = \varphi_k(t),\ t \in [0, 2\pi])$ таких, что для любого решения $p_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, системы уравнений (2) выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty} (p_k(t) - \varphi_k(t)) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(0) = 1, \quad p_k(0) \ge 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{9}$$

то решения системы дифференциальных уравнений (2) можно рассматривать на интегральном многообразии

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(t) = 1.$$

Исключая из системы уравнений (2) решение $p_n(t)$ с помощью равенства (9), получаем систему линейных дифференциальных уравнений порядка $n-1$:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n-1} (\alpha_{ks}(t) - \alpha_{kn}(t)) p_s(t) + \alpha_{kn}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

имеющую частное решение

$$p_k(t) = \varphi_k(t), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Лемма. *Для того чтобы марковский процесс* $\xi(t)$, *определяемый системой уравнений* (2), *удовлетворял условиям* (8), *необходимо и достаточно, чтобы решение однородной системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n-1} (\alpha_{ks}(t) - \alpha_{km}(t)) y_s(t), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

было асимптотически устойчивым.

При этом фундаментальная матрица решений системы уравнений (11) $N(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\| N(t, \tau) \| \le C e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad C \ge 1, \quad \lambda > 0, \quad t \ge \tau. \tag{12}$$

3. Преобразование системы моментных уравнений. Линейная замена переменных

$$M_k(t, \mu) = V_k(t, \mu) + \varphi_k(t) M(t, \mu),$$

$$M(t, \mu) = \sum_{k=1}^{n} M_k(t, \mu), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

преобразует систему уравнений (5) к виду

$$\begin{gathered} \frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu A_n(t) M(t,\mu) + \mu \sum_{s=1}^{n-1} [A_s(t) - A_n(t)] \times \mu \sum_{s=1}^{n-1} [A_s(t) - A_n(t)] \times \\ \times [V_s(t,\mu) + \varphi_s(t) M(t,\mu)], \\ \frac{dV_k(t,\mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{n-1} (\alpha_{ks}(t) - \alpha_{kn}(t)) V_s(t,\mu) + \\ + \mu A_k(t) V_k(t,\mu) + \mu \varphi_k(t) \Big[A_k(t) - \sum_{s=1}^{n-1} (A_s(t) - A_n(t)) \Big] \times \\ \times [V_s(t,\mu) + \varphi_s(t) M(t,\mu)], \quad k = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{14}$$

При $\mu = 0$ система уравнений (14) распадается на две независимые подсистемы

$$\frac{dM(t,0)}{dt} = 0,$$

$$\frac{dV_k(t,0)}{dt} = \sum_{s=1}^{n-1} (\alpha_{ks}(t) - \alpha_{kn}(t)) V_s(t,0), \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

вторая из которых асимптотически устойчива в силу леммы.

Для системы уравнений (14) выполнены условия применимости принципа сведения Ляпунова [7], что приводит к следующим теоремам.

Теорема 1. *Если для фундаментальной системы решений системы уравнений* (10) *выполнены условия* (12), *то существует значение* $\mu_0 > 0$:

$$\mu_0 = \lambda d^{-1}(2n-1)^{-1}\left(1+\sqrt{C}\right)^{-2};$$
$$d = \max_{1 \le k \le n} \left\{ \max_{t \ge 0} \| A_k(t) \| \right\} \tag{15}$$

такое, что при $|\mu| < \mu_0$ *система уравнений* (14) *имеет асимптотически устойчивое при* $t \to \infty$ *интегральное многообразие решений*

$$V_k(t,\mu) = \mu H_k(t,\mu) M(t,\mu), \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu) M(t,\mu), \tag{16}$$

где

$$G(t,\mu) \equiv A_n(t) + \sum_{s=1}^{n} [A_s(t) - A_n(t)] (\varphi_s(t) E + \mu H_k(t,\mu)]. \tag{17}$$

Из принципа сведения Ляпунова [7] следует, что при выполнении условий (15) устойчивость решений системы моментных уравнений (16) равносильна устойчивости решений системы уравнений (8). Матрицы $G(t,\mu)$, $H_k(t,\mu)$ в системе уравнений (17), как показано в [3, 7, 9], могут быть получены в результате суммирования равномерно сходящихся рядов, все члены которого аналитически зависят от параметра μ. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При* $|\mu| < \mu_0$ *система уравнений* (14) *имеет единственное асимптотически устойчивое аналитическое относительно* μ *интегральное многообразие решений* (16), *где функции* $\varphi_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, *и матрицы* $G(t, \mu)$, $H_k(t,\mu)$, $k = 1, \ldots, n$, *периодичны относительно* t *с периодом* 2π.

Эту теорему можно использовать для построения матрицы коэффициентов $G(t,\mu)$ системы уравнений (7) в виде рядов по степеням параметра μ. Система моментных уравнений (16) определяется единственным образом и может быть получена методом работ [3]. Из теоремы 2 следует, что при $|\mu| < \mu_0$ используемые асимптотические разложения являются сходящимися рядами.

4. Численное исследование устойчивости решений системы (1). Идея построения системы уравнений (7) используется для численного исследования устойчивости решений в среднем (в среднем квадратичном) системы (1) без использования системы (5).

Ищем интегральное многообразие системы уравнений (5), определяемое системой уравнений

$$M_k(t,\mu) = Z_k(t,\mu) M(t,\mu), \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu) M(t,\mu). \tag{18}$$

Из формул (5) находим, что справедливо тождество

$$G(t, \mu) \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k(t) Z_k(t, \mu). \tag{19}$$

Для отыскания матриц $Z_k(t, \mu)$, $k = 1, \ldots, n$, имеем систему матричных дифференциальных уравнений Риккати [8]:

$$\frac{dZ_k(t, \mu)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t) Z_s(t, \mu) + \mu A_k(t) Z_k(t, \mu) -$$

$$- \mu Z_k(t, \mu) \sum_{s=1}^{n} A_s(t) Z_s(t, \mu), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Система (20) имеет интегральное многообразие решений

$$Z(t, \mu) = E, \quad Z(t, \mu) \equiv \sum_{s=1}^{n} Z_s(t, \mu),$$

так как справедливо матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ(t, \mu)}{dt} = \mu \left(E - Z(t, \mu) \right) \sum_{s=1}^{n} A_s(t) Z_s(t, \mu).$$

Интегрируя систему матричных уравнений (20) численно с начальными значениями $Z_k(t, 0)$, $k = 1, \ldots, n$, такими, что

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k(0, \mu) = \mu E,$$

при достаточно больших $t > 0$ можем найти матрицу $G(t, \mu)$ по формуле (19).

Интегрируя совместно с системой уравнений (20) систему уравнений (7), можно найти матрицу монодромии системы уравнений (18) и ее мультипликаторы, что позволяет исследовать устойчивость решений системы уравнений (1) в среднем.

Пример. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{dx(t, \mu)}{dt} = \mu a(t, \xi(t)) x(t, \mu),$$
$$a_k \equiv a(\theta_k), \quad k = 1, 2, \quad a_k \equiv \text{const}. \tag{21}$$

Марковский процесс $\xi(t)$ принимает двя состояния θ_1, θ_2 с вероятностями $p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}$, $k = 1, 2$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \nu p_2(t), \quad \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \nu p_2(t).$$

Уравнение (7) для математического ожидания $m(t, \mu)$ случайного решения $x(t, \mu)$ принимает вид

$$\frac{dm(t, \mu)}{dt} = \mu b(\mu) m(t, \mu),$$

где коэффициент $b(\mu)$ определяется системой уравнений

$$-\lambda z_1 + \nu z_2 + \mu a_1 z_1 - \mu z_1 b = 0,$$

$$\lambda z_1 - \nu z_2 + \mu a_2 z_1 - \mu z_2 b = 0,$$

$$z_1 + z_2 = 1, \quad b = a_1 z_1 + a_2 z_2,$$

из которой находим выражение для коэффициента $b(\mu)$:

$$b(\mu) = \frac{a_1\nu + a_2\lambda}{\nu+\lambda} + \mu\frac{(a_1-a_2)^2\nu\lambda}{(\nu+\lambda)^3} + \mu^2\frac{(a_1-a_2)^3\lambda\nu(\lambda-\nu)}{(\nu+\lambda)^5} + o(\mu^3).$$

Нулевое решение уравнения (21) асимптотически устойчиво в среднем при $b(\mu)<0$ и неустойчиво при $b(\mu)>0$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
3. *Алексеев В. М., Валеев К. Г.* Исследование колебаний линейной системы со случайными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – **14**, № 12. – С. 1811–1815.
4. *Тихонов В. И., Миронов М. И.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
5. *Мильштейн Г. Н.* Об устойчивости линейной системы, находящейся под воздействием марковской цепи // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 11. – С. 1982–1993.
6. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев: ИЭД АН УССР, 1986. – 43 с.
7. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 416 с.
8. *Валеев К. Г.* Расщепление спектра матриц. – Киев: Вища шк., 1986. – 272 с.
9. *Царьков Е. Ф.* Марковские возмущения параметров линейных дифференциальных уравнений. Эргодические теоремы и марковские процессы. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87–26).

Получено 20.02.97