УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Нац. ун-т, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКОМУ ПРОЦЕССУ *

We study the conditions for existence and uniqueness of solution of a linear stochastic differential equation with respect to a logarithmic process. For the conditional mathematical expectation of a solution, we obtain a partial differential equation.

Розглядається питання про існування і єдиність розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння за логарифмічним процесом. Для умовного математичного сподівання розв'язку одержано диференціальне рівняння з частинними похідними.

Основные обозначения и определения. Введем следующие обозначения: $X = C_0([0,1]) = \{x \in C([0,1]) : x(0) = 0\}$ — банахово пространство с равномерной нормой; $H = L_2([0,1])$ — гильбертово пространство с обычным скалярным произведением; $i: H \to X$, $i: f \mapsto \int_0^{\cdot} f(s)\,ds$, $X^* \overset{i^*}{\subset} H^* = H \overset{i}{\subset} X$ — каноническое вложение; если не будет возникать недоразумений, то элементы $h \in X^*$, $i^* h \in H$ и $i i^* h \in X$ отождествляются; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание элементов X^* и X или H и H; μ — мера на X, дифференцируемая вдоль H [1], λ — логарифмическая производная.

Далее предполагается, что λ удовлетворяет условию **A**: для любых $h \in H$, $p \geq 1$: $\langle \lambda, h \rangle \in L_p(X, \mu)$.

Пусть S — пространство функций вида $f(\cdot) = F(\langle h_1, \cdot \rangle, \ldots, \langle h_n, \cdot \rangle)$, где $n \in \mathbb{N}$, $h_k \in X^*$, $F \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, ограниченных со своей производной. Рассмотрим оператор ∇:

$$\nabla: S \subset L_p(X, \mu) \to L_p(X, \mu, H),$$

$$\nabla f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} h_k.$$

При выполнении условия **A** оператор ∇ допускает замыкание D с областью определения $W_p^1 = W_p^1(X, \mu)$. Назовем оператор D стохастической производной, а сопряженный к нему оператор $I = D^*$: $\mathcal{D}_q = \mathcal{D}_q(X, \mu) \subset L_p(X, \mu, H) \to$ $\to L_p(X, \mu)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ — расширенным стохастическим интегралом.

Отметим, что для любого $h \in X^*$ h принадлежит $\mathcal{D}_q$, причем

$$Ih = -\langle \lambda, h \rangle.$$

Положим $m(t) = I(\chi_{[0,1]})$.

Интеграл Ix по аналогии с гауссовским случаем будем обозначать $\int_0^1 x(t)\,dm(t)$. Под $\int_0^t x(s)\,dm(s)$ понимается $\int_0^1 \chi_{[0,t]}(s)\, x(s)\, dm(s)$.

Примеры. 1. Пусть μ_0 — распределение винеровского процесса $w(t)$ в $C_0([0,1])$.

* Частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP) (грант № PSU061084).

Тогда логарифмическая производная λ_0 меры μ_0 в направлении $h \in H$ равна

$$\langle \lambda_0, h \rangle = -\int_0^1 h(t)\, dw(t),$$

$$m(t) = w(t).$$

Оператор I совпадает с расширенным стохастическим интегралом Скорохода.

2. $\mu(dx) = e^{-w^2(1)/2}\sqrt{2}\,\mu_0(dx)$, μ_0 — распределение винеровского процесса $w(t)$.

Тогда $m(t) = w(t) - \sqrt{2}\, w(1)\, t$,

$$\int_0^1 x(t)\, dm(t) = \int_0^1 x(t)\, dw(t) + \sqrt{2}\, w(1) \int_0^1 x(t)\, dt, \qquad x \in \mathcal{D}_q(X, \mu),$$

$\left(\int_0^1 x(t)\, dw(t) - \text{интеграл Скорохода} \right)$.

Пусть $\mathscr{E}(s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\mathscr{E}(s, t) = \mathscr{E}(s, t)\, dm(t), \qquad t \geq s,$$

$$\mathscr{E}(s, s) = 1.$$

Как показано в [2],

$$\mathscr{E}(s, t) = \exp\left(m(t) - m(s) - \frac{1}{2}(t-s) - \frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)^2 \right).$$

Отметим, что в данной ситуации стохастическая экспонента не имеет свойства мультипликативности, т. е. для $s < \tau < t$ равенство

$$\mathscr{E}(s, t) = \mathscr{E}(s, \tau) \cdot \mathscr{E}(\tau, t)$$

не выполняется.

Как показывает пример 2, процесс $m(t)$ не всегда является мартингалом, поэтому говорить о неупреждаемости x_0 не имеет смысла, в отличие от ситуации интеграла Ито по квадратически интегрируемому мартингалу.

Вопросы существования и единственности уравнения по логарифмическому процессу рассматривались в работах [2, 3] в случае, когда логарифмическая производная является аналитической функцией. Винеровский случай рассмотрен в [4].

1. Фильтрация решения линейного стохастического дифференциального уравнения. Пусть $\{h_n \mid n \geq 1\} \subset X^*$ — некоторый ортонормированный базис в H. Обозначим $\eta_k = \langle h_k, \cdot \rangle$, $\sigma_n = \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $E^{\sigma_n} = E(\cdot \mid \sigma_n)$ — условное математическое ожидание.

Предположим, что выполняется условие **B**: для любого $m \geq 1$ распределение $\eta_1, \ldots, \eta_m$ в $\mathbb{R}^m$ имеет непрерывную и положительную плотность.

Если $x(t) \in L_p(X, \mu, H)$, то существует борелевская функция $F_n\colon [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

$$E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n) = F_n(t, \eta).$$

Теорема 1. *Пусть* $x(t)$, $t \in [0, 1]$, *— решение уравнения*

$$dx(t) = a(t)x(t)\, dt + b(t)x(t)\, dm(t), \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0,$$

где $a, b \in C([0,1])$ — *неслучайные функции,* x_0 — *случайная величина, такое, что*

$$\exists\, p_1 > 1 \quad \forall\, t \in [0,1] \quad x(\cdot)\, b(\cdot)\, \chi_{[0,1]}(\cdot) \in \mathcal{D}_{p_1},$$

$$\exists\, p_2 > 1 \quad \forall\, t \in [0,1] \quad x(t) \in W^1_{p_2}, \qquad \int_0^1 \|x(t)\|^{p_2}_{W^1_{p_2}}\, dt < \infty$$

и выполняются условия **A** *и* **B**.

Тогда условное математическое ожидание $E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta)$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_n(t,\eta) = F_{0,n}(\eta) - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t b(s)\, h_k(s) \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(s,\eta)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \left(a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)\, h_k(s)\, \lambda_k^{(n)}(\eta) \right) F_n(s,\eta)\, ds, \tag{2}$$

где $\lambda_k^{(n)}(\eta) = E^{\sigma_n} \langle \lambda, h_k \rangle$, $F_{0,n}(\eta) = E^{\sigma_n} x(t)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — *производные Соболева, построенные в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *с мерой* $\mu \circ \eta^{-1}$. *Равенство* (1) *выполнено для всех* $t \in [0,1]$ μ-*п. н.*

Для доказательства понадобятся следующие вспомогательные утверждения [5].

Лемма 1. a) *Если* $G \in \mathcal{D}_\alpha$, $\alpha > 1$, *то*

$$E^{\sigma_n} IG = I(E^{\sigma_n} \Pi_n G) + \langle -E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda + \Pi_n \lambda, \Pi_n E^{\sigma_n} G \rangle, \tag{3}$$

причем $E^{\sigma_n} \Pi_n G \in \mathcal{D}_{\alpha-} = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathcal{D}_\beta$. *Здесь* Π_n — *ортопроектор в* H *на* $\mathcal{L}(h_1, \ldots, h_n)$.

b) *Если* $F \in W^1_\alpha$, $\alpha > 1$, *то* $E^{\sigma_n} F \in W^1_{\alpha-}$,

$$D E^{\sigma_n} F = E^{\sigma_n} \Pi_n D F + E^{\sigma_n} F\, E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda - E^{\sigma_n} (F \Pi_n \lambda).$$

Лемма 2. a) *Если* $F \in W^1_{p_1}$, $G \in \mathcal{D}_{p_2}$, $\dfrac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \ge 1$, *то* $FG \in \mathcal{D}_{p_1 p_2/(p_1+p_2)}$ *и*

$$I(FG) = F I(G) - \langle DF, G \rangle;$$

b) *Если* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству Соболева,* $W^1_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mu \circ F^{-1})$, *где* $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $F_k \in W^1_{p_1}(X, \mu)$, $\dfrac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \ge 1$, *то* $\varphi(F_1, \ldots, F_n) \in W^1_{p_1 p_2/(p_1+p_2)}(X, \mu)$ *и*

$$D(\varphi \circ F) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(F)\, D F_k.$$

Замечание. Используя пункт b) леммы 1, нетрудно показать, что $\varphi \circ \eta \in W^1_{p_1}(X, \mu)$, $p > 1$, тогда и только тогда, когда $\varphi \in W^1_p(\mathbb{R}^n, \mu \circ F^{-1})$.

Доказательство теоремы 1. Применяя (3) к уравнению (1), получаем

$$E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta) = F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s) F_n(s, \eta)\, ds +$$

$$+ \int_0^1 \Pi_n (\chi_{[0,t]}(s)\, b(s)\, F_n(s, \eta))\, dm(s) +$$

$$+ \langle \Pi_n \lambda - E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot)\, F(\cdot, \eta)) \rangle =$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s) F_n(s, \eta)\, ds +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t b(z)\, F_n(z, \eta)\, h_k(z)\, dz \right) h_k(s)\, dm(s) +$$

$$+ \left\langle \Pi_n \lambda - E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda, \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t b(z)\, h_k(z)\, F_n(z, \eta)\, dz \right) h_k \right\rangle. \tag{4}$$

Воспользуемся леммой 2, замечанием к ней и тем, что $\langle \lambda, h_k \rangle = -I h_k$. Тогда

$$F_n(t, \eta) = F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)\, F(s, \eta)\, ds -$$

$$- \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t b(z)\, F_n(z, \eta)\, h_k(z)\, dz \right) \langle \lambda, h_k \rangle -$$

$$- \sum_{k=1}^n \left\langle D \left(\int_0^t h_k(z)\, b(z)\, F_n(z, \eta)\, dz \right), h_k \right\rangle +$$

$$+ \langle \Pi_n \lambda - E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot)\, F_n(\cdot, \eta)) \rangle =$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)\, F_n(s, \eta)\, ds - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t h_k(z)\, b(z) \frac{\partial F_n}{\partial x_j}(z, \eta)\, dz\, \langle h_j, h_k \rangle -$$

$$- \langle E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot)\, F_n(\cdot, \eta)) \rangle =$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t \left(a(s) - \sum_{k=1}^n b(s)\, h_k(s)\, \lambda_k^{(n)}(\eta) \right) F_n(s, \eta)\, ds -$$

$$- \sum_{k=1}^n \int_0^t b(s)\, h_k(s) \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(s, \eta)\, ds, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 доказана.

2. Единственность решения линейного стохастического дифференциального уравнения. Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда $x(t)$ можно приблизить условными математическими ожиданиями $E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, для которых выполняется (2).

Запишем дифференциальное уравнение с частными производными, соответствующее (2):

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} b(t)\, h_k(t) \frac{\partial F_n}{\partial x_k} + \left(a(t) - \sum_{k=1}^{n} b(t)\, h_k(t)\, \lambda_k^{(n)}(x) \right) F_n ,$$
$$F_n(0, \eta) = F_{0,n}(\eta), \tag{6}$$

где $t \in [0, 1]$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Если функции F_n, $F_{0,n}$, $\lambda_k^{(n)}$ гладкие, то $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — обычная частная производная и (6) имеет единственное решение, которое можно получить, используя метод характеристик [6]. Таким образом, для доказательства единственности решения (1) достаточно гарантировать гладкость функций $F_{0,n}$, F_n, $\lambda_k^{(n)}$.

Обозначим через M совокупность процессов $x(t)$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$\forall\, p > 1, \quad \forall\, t \in [0, 1] \quad x(t) \in W_p^3 \qquad \int_0^1 \|x(t)\|_{W_p^3}^p\, dt < +\infty, \tag{7}$$

$$\exists\, p > 1 \quad \forall\, t \in [0, 1] \qquad \chi_{[0,t]}(\cdot)\, b(\cdot)\, x(\cdot) \in \mathcal{D}_p. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* **A** *и* **B** *и* $\langle \lambda, h \rangle \in W_p^2$ *для любых* $p > 1$, $h \in H$, $x \in M$ *— решение уравнения* (1).
Тогда x *— единственное решение из класса* M.

Лемма 3 [7, с. 74]. *Если* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область, звездная относительно некоторого шара,* $\varphi \in W_p^l(\Omega)$, $n < lp$; $p > 1$, *то существует* $\tilde{\varphi} = \varphi$ *п. н.,* $\tilde{\varphi} \in C(\Omega)$.

Доказательство теоремы 2. F_n удовлетворяет уравнению

$$F_n(t, x) = F_{0,n}(x) - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t b(s)\, h_k(s) \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(s, x)\, ds \; +$$
$$+ \int_0^t \left(a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)\, h_k(s)\, \lambda_k^{(n)}(x) \right) F_n(s, x)\, ds , \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — производные Соболева.

Из лемм 1б), 3 и (7) следует, что F, $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k\, \partial x_j}$ принадлежат пространству $W_p^1([0,1] \times \mathbb{R}^n, dt \times \mu \circ \eta^{-1})$ для любого $p \geq 1$ и, значит, F непрерывна на $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$.

Дифференцируя (9) по $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, получаем $\dfrac{\partial F_n}{\partial x_k} \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^n)$ ($\lambda_k^{(n)} \in$ $\in C^1_{[0,1]} \times \mathbb{R}^n$ по аналогичным соображениям). Следовательно,

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} b(t)\, h_k(t) \frac{\partial F_n}{\partial x_k} + \left(a(t) - \sum_{k=1}^{n} b(t)\, h_k(t)\, \lambda_k^{(n)}(x) \right) F_n$$

— непрерывная функция на $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$.

Локальное решение (6) в классе непрерывно дифференцируемых функций единственно [6].

Запишем уравнения характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_k}{b(t)\, h_k(t)}.$$

Характеристики равны

$$c_k = x_k - \int_0^t b(s)\, h_k(s)\, ds\,. \tag{10}$$

Тогда уравнение для F_n примет вид

$$\frac{dF_n}{F_n} = \left[a(t) - \sum_{k=1}^{n} b(t)\, h_k(t)\, \lambda_k^{(n)} \left(c_1 + \int_0^t b(s)\, h_1(s)\, ds, \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots,\ c_n + \int_0^t b(s)\, h_n(s)\, ds \right)\right] dt\,.$$

Следовательно, решением (9) будет функция

$$F_n(t, x) = F_{0,n}\left(x_1 - \int_0^t b(s)\, h_1(s)\, ds, \ldots, x_n - \int_0^t b(s)\, h_n(s)\, ds \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \int_0^t \left(a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)\, h_k(s)\, \lambda_k^{(n)} \left(x_1 - \int_s^t b(z)\, h_1(z)\, dz, \ldots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots,\ x_n - \int_s^t b(s)\, h_n(z)\, dz \right)\right) ds \right\}. \tag{11}$$

Из общего вида характеристик (10) следует, что локальное решение единственным образом продолжается до глобального решения, которое задается формулой (11).

Таким образом,

$$E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n) =$$

$$= F_{0,n}\left(\eta_1 - \int_0^t b(s)\, h_1(s)\, ds, \ldots, \eta_n - \int_0^t b(s)\, h_n(s)\, ds \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \int_0^t \left[a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)\, h_k(s)\, \lambda_k^{(n)} \left(\eta_1 - \int_s^t b(z)\, h_1(z)\, dz, \ldots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots,\ \eta_n - \int_s^t b(s)\, h_n(z)\, dz \right)\right] ds \right\}. \tag{12}$$

$E^{\sigma_n} x(t)$ сходится к $x(t)$ при $n \to \infty$ в $L_1(X, \mu)$, откуда и следует единственность решения.

Теорема 2 доказана.

3. Существование решения. Пусть $\mu(dx) = \rho(x)\mu_0(dx)$, где μ_0 — винеровская мера на $C_0([0, 1])$, функция ρ дифференцируема вдоль H, и существуют константы C_1, C_2, C_3 такие, что $0 < C_1 < \rho < C_2 < +\infty$, $\|D\rho\| \le C_3$ μ-п. н. Тогда

$$\langle \lambda, h \rangle = \langle \lambda_0, h \rangle + \left\langle \frac{D\rho}{\rho}, h \right\rangle, \tag{13}$$

где $\langle \lambda_0, h \rangle = -\int_0^1 h(s)\, dw(s)$ — логарифмическая производная μ_0,

$$m(t) = -\int_0^t \frac{D_s \rho}{\rho} ds + w(t), \tag{14}$$

$$\int_0^1 x(t)\, dm(t) = -\int_0^1 x(s) \frac{D_s \rho}{\rho} ds + \int_0^1 x(t)\, dw(t).$$

Здесь $\int_0^1 x(t)\, dw(t)$ — расширенный стохастический интеграл Скорохода.

Доказательство (13) и (14) см., например, в [2].

Отметим, что сходимость в $L_p(X, \mu)$ и $L_p(X, \mu_0)$ эквивалентна, поэтому $W_p^1(X, \mu) = W_p^1(X, \mu_0)$, а из ограниченности $D\rho$ следует, что $\mathcal{D}_q(X, \mu) = \mathcal{D}_q(X, \mu_0)$.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как упреждающее уравнение по винеровскому процессу.

Теорема 3 является иллюстрацией применения теоремы 1 для построения решения (1), которое получается предельным переходом в (12).

Теорема 3. *Пусть мера* $\mu(dx) = \rho(dx)\mu_0(dx)$ *удовлетворяет условиям* **A** *и* **B**, *где* μ_0 — *винеровская мера на* $C_0([0, 1])$, *а для* ρ *выполняются следующие условия*:

$$\exists\, C_1,\ C_2:\ 0 < C_1 \le \rho \le C_2 < +\infty \qquad \mu\text{-п. н.},$$

$$\forall\, \alpha \ge 1 \quad \rho \in W_\alpha^2,$$

$$\forall\, \alpha \ge 1 \qquad \int_X \int_0^1 \exp\{\alpha D_s p\}\, ds\, d\mu < +\infty. \tag{15}$$

Если $x_0 \in W_p^1$ *для любого* $p > 1$, *то уравнение* (1) *имеет решение, представимое в виде*

$$x(t) = T_{0,t} x_0 \exp\left\{ \int_0^t a(s)\, ds + \int_0^t b(s)\, dw(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s)\, ds - \int_0^t T_{s,t}\left(\frac{D_s \rho}{\rho}\right) ds \right\}. \tag{16}$$

Здесь $w(t) = \sum_{k=1}^\infty \langle \lambda_0, h_k \rangle \int_0^t h_k(s)\, ds$ — *винеровский процесс в пространстве* $(C_0([0, 1]), \mu_0)$, *а оператор* $T_{s,t}$ *действует следующим образом*:

$$T_{s,t}(\alpha(x, s)) = \alpha(x - i(\chi_{[s,t]}(\cdot) b(\cdot)), s),$$

где α — *случайный процесс в* $C_0([0, 1])$.

Проверим, что $T_{s,t}$ — ограниченный оператор, действующий из $L_{p_2}([0, 1] \times X, dt \otimes \mu)$ в $L_{p_1}([0, 1] \times X, dt \otimes \mu)$, где $p_2 > p_1 > 1$.

Действительно, пусть $\alpha \in L_{p_2}([0, 1] \times X, dt \otimes \mu)$. Тогда

$$\int_0^1 \int_X |T_{s,t}\alpha(\omega, s)|^{p_1} \mu(d\omega)\, ds = \int_0^1 \int_X |\alpha(\omega + i(\chi_{[s,t]}(\cdot)\, b(\cdot)), s)|^{p_1} \mu(d\omega)\, ds =$$

$$= \int_0^1 \int_X |\alpha(\omega, s)|^{p_1} \mu(d\omega - i(\chi_{[s,t]}(\cdot)\, b(\cdot)))\, ds \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \int_X |\alpha(\omega, s)|^{p_2} \mu(d\omega)\, ds \right)^{p_1/p_2} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_X \left(\frac{d\mu(\cdot - i(\chi_{[s,t]} b))}{d\mu} \right)^{p_2/(p_2 - p_1)} \mu(d\omega)\, ds \right)^{(p_2 - p_1)/p_2} . \tag{17}$$

Второй множитель в (17) конечен из-за вида меры μ.

Аналогично получаем, что оператор $T_{0,t}\colon \alpha(\omega) \mapsto \alpha(\omega + i(\chi_{[0,t]} b))$ ограничен, как оператор из $L_{p_2}(X, \mu)$ в $L_{p_1}(X, \mu)$, $p_2 > p_1 > 1$.

Покажем, что $x(t)$ — решение (1) — можно получить как предел последовательности $x_n(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ из (12). Для этого проверим, что предел $x_n(t)$ существует в любом $L_p(X, \mu)$, где $p > 1$.

Последовательность $x_n(t)$ можно записать в виде

$$x_n(t) = T_{0,t}(E^{\sigma_n} x_0) \exp\left\{ \int_0^t [a(s) - b(s)\, T_{s,t}(E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda)]\, ds \right\}. \tag{18}$$

Из ограниченности $T_{0,t}\colon L_{p_2} \to L_{p_1}$, $p_2 > p_1$, следует, что

$$T_{0,t}(E^{\sigma_n} x_0) \to T_{0,t} x_0 \quad \text{в любом} \quad L_p(X, \mu), \quad p > 1.$$

Используя (13), получаем

$$\exp\left\{ -\int_0^t b(s)\, T_{s,t}(E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda)\, ds \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\int_0^t b(s)\, T_{s,t}\, E^{\sigma_n} \left(\sum_{k=1}^n -\langle \lambda_0, h_k \rangle\, h_k(s) - \Pi_n \frac{D_s \rho}{\rho} \right) ds \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n \left(\langle -\lambda_0, h_k \rangle + \int_s^t b(z)\, h_k(z)\, dz \right) h_k(s) - \right.$$

$$\left. - T_{s,t}\left(E^{\sigma_n} \Pi_n \frac{D_s \rho}{\rho} \right) ds \right\}.$$

Дл я установления последнего равенства воспользовались тем, что $\langle \lambda_0, h_k \rangle$ измеримо относительно σ_n. При этом имеем

$$\exp\left\{ \int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n \langle \lambda_0, h_k \rangle\, h_k(s)\, ds \right\} \underset{n \to \infty}{\to} \exp\left\{ \int_0^t b(s)\, dw(s) \right\}$$

в пространстве $L_p(X, \mu_0)$, а значит, и в $L_p(X, \mu)$.

$$\int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n \int_s^t b(z)\, h_k(z)\, dz\, h_k(s)\, ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t b(s)\, b(z)\, h_k(s)\, h_k(z)\, ds\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \langle b\chi_{[0,t]}, h_k \rangle^2 \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s)\, ds .$$

Для доказательства существования предела x_n в $L_p(X, \mu)$, $p \geq 1$, остается проверить сходимость

$$\exp\left\{ \int_0^t -T_{s,t}\left(E^{\sigma_n} \Pi_n \frac{D\rho}{\rho} \right) ds \right\} \underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to} \exp\left\{ \int_0^t \left(-T_{s,t} \frac{D\rho}{\rho} \right) ds \right\} \quad \text{в} \quad L_p(X, \mu), \quad p \geq 1 .$$

Эта сходимость имеет место из-за сходимости по вероятности, а условие (15) гарантирует равномерную интегрируемость в $L_p(X, \mu)$.

Заметим, что $x_n(t) \in W_p^1$, $p \geq 1$, и удовлетворяет уравнению (5), где $F_n(t, \eta) = x_n(t)$.

Проводя рассуждения, при которых из (4) получили (5), в обратном порядке, получаем, что $x_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x_n(t) - E^{\sigma_n} x_0 - \int_0^t a(s)\, x_n(s)\, ds + \left\langle \Pi_n \lambda - E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]} b\, x_n) \right\rangle =$$

$$= \int_0^t \Pi_n \left(\chi_{[0,t]}(s)\, b(s)\, x_n(s)\right) dm(s) . \tag{19}$$

Предел в левой части (19) существует в любом $L_p(X, \mu)$, $p \geq 1$, и равен $x(t) - x_0 - \int_0^t a(s)\, x(s)\, ds$. Значит, существует предел и в правой части.

Из замкнутости оператора I вытекает, что $b(\cdot)\chi_{[0,1]}(\cdot)x(\cdot) \in \mathcal{D}_p$, $p \geq 1$, и $x(t)$ удовлетворяет (1).

Теорема 3 доказана.

1. *Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1971. – № 24. – С. 133–174.
2. *Дороговцев А. А.* Стохастические уравнения с упреждением. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 152 с.
3. *Кулик О. М.* Випадкові оператори та стохастичні інтегральні рівняння: Автореф. дис. … канд. фіз. мат. наук. – Київ, 1996. – 22с.
4. *Buckdahn R.* Anticipative Girsanov transformations and Skorohod stochastic differential equations // Mem. Amer. Math. Soc. – 1994. – **111**, № 533. – P. 1–88.
5. *Pilipenko A. Yu.* Conditional analysis in non-Gaussian stochastic calculus // Theory Random Processes (to appear).
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

Получено 22.10.96