УДК 517.94

М. К. Бугир (Ин-т нар. хоз-ва, Тернополь)

УСЛОВИЯ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДВУХЧЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We establish comparison theorems for solutions of the system of Kondrat'ev type equations $y^{(n)} + P(t)y = 0$.

Встановлюються теореми порівняння для розв'язків системи рівнянь $y^{(n)} + P(t)y = 0$ типу В. О. Кондратьєва.

При исследовании единственности решения краевых или многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или систем уравнений приходится изучать неосцилляционные свойства их решений. Этот вопрос достаточно полно исследован для самосопряженных систем уравнений второго порядка

$$y'' + P(t)y = 0, \tag{1}$$

где $P(t) = P^*(t)$, $t \in j = [a, \omega)$, $\omega \le \infty$ [1], а для систем уравнений высших порядков имеются лишь отдельные работы [2, 3]. В данной работе изучается двухчленная система дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + P(t)y = 0 \tag{2}$$

с непрерывной квадратной матрицей порядка n на интервале j.

Определение 1. *Решение* $y(t) \doteq \operatorname{col}(y_1(t), \dots, y_n(t))$ *будем называть осцилляционным на интервале* j, *если найдутся такие точки* $t_1, \dots, t_k \in j$, *что*

$$y^{(v_i - 1)}(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad v_1 + \dots + v_k \ge n, \tag{3}$$

и неосцилляционным — в противном случае.

Определение 2. *Систему уравнений* (2), *у которой все решения неосцилляционные, будем называть неосцилляционной и осцилляционной — в противном случае.*

Очевидно, что для неосцилляционных систем уравнений любая многоточечная задача

$$y^{(v_i - 1)}(t_i) = A_{i, v_i - 1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad v_1 + \dots + v_k = n \tag{4}$$

имеет единственное решение. Частным случаем условий (4) будут краевые задачи, когда $i = 2$. Нетрудно заметить, что некоторые краевые задачи имеют единственное решение и для осцилляционных уравнений. Такой, например, будет краевая задача

$$y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1, \quad y(a) = B_0, \quad y'(a) = B_1, \tag{5}$$

которая имеет единственное решение для уравнения 4-го порядка

$$y^{(\mathrm{IV})} + k^2 y = 0, \quad k \ne 0 \text{ — const}, \tag{6}$$

хотя все решения (6) осцилляционные. Единственность решения задачи (5), (6) следует из положительности функционала

$$J[a, b; \omega] = \int_a^b \left(\omega''^2 + k^2 \omega^2\right) dt$$

на классе функций из $C^2(a, b)$, удовлетворяющих однородным краевым условиям (5).

Для системы уравнений (2) можно установить некоторые утверждения типа теорем сравнения Штурма. В частности, в случае системы уравнений (2) с постоянной самосопряженной матрицей $P(t)$ она неособенным преобразованием

$$y(t) = Tu(t) \tag{7}$$

приводится к отдельным скалярным уравнениям

$$U_i^{(n)} + \lambda_i(t)U_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где $\lambda_i(t)$ — собственные числа матрицы P. Поскольку $\det T \neq 0$, то решение $y(t)$ и $U_i(t)$ имеют одинаковые осцилляционные свойства.

Теорема 1. *Пусть скалярное дифференциальное уравнение*

$$v^{(n)} + q(t)v = 0 \tag{9}$$

неосцилляционное и выполняется неравенство (в смысле квадратичной формы)

$$P(t) < q(t)E, \tag{10}$$

где E — единичная матрица. Тогда система уравнений (2) *имеет фундаментальную систему матриц решений $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ со свойством: если матрица $Y_i(t)$ имеет $(n-1)$-кратный нуль в точке t_i, то для всех $t \geq t_i > a$ существует $Y_i^{-1}(t)$.*

Доказательство. Пусть $k(t, s)$ — решение Коши уравнения (9) (т. е. удовлетворяет условиям $k(s, s) = \dots = k^{(n-2)}(s, s) = 0$, $k^{(n-1)}(s, s) = 1$). Запишем систему уравнений (2) в матричном виде

$$Y^{(n)} + q(t)Y = [q(t)E - P(t)]Y. \tag{11}$$

Тогда матричное решение, имеющее $(n-1)$-кратный нуль, в некоторой точке α можно записать следующим образом:

$$Y(t, \alpha) = k(t, \alpha)E + \int_\alpha^t k(t, s)Z(s)ds, \quad Z(s) = [q(s)E - P(s)]Y(s). \tag{12}$$

Учитывая положительность матрицы $q(t)E - P(t)$ и формулу (12), убедимся, что $Z^{-1}(t)$ существует там, где существует $Y^{-1}(t)$; в противном случае найдется такой n-мерный вектор h, что $Y(t^*)h = 0$, $t^* \in [t_1, \alpha)$. Допустим противное, т. е. что $Y(t, \alpha)$ не имеет обратной матрицы в некоторой точке t^*. Тогда не существует и $Z^{-1}(t_1, \alpha)$, и

$$Z(t_1, \alpha)h = [q(t_1)E - P(t_1)]\left\{\int_\alpha^{t_1} k(t_1, s)Z(s)ds + k(t_1, s)E\right\}h = 0. \tag{13}$$

Поскольку $q(t)E > P(t)$, то $\left(\int_\alpha^{t_1} k(t_1, s)Z(s)dsh, h\right) = -k(t_1, s)h^2 < 0$, так как уравнение (9) неосцилляционное и поэтому $k(t, s) > 0$, если $t > s$. С другой стороны,

$$Z(t, \alpha) = [q(t)E - P(t)]\left\{\int_\alpha^t k(t, s)Z(s)ds + k(t, s)E\right\}.$$

Если в точке α выбрать начальные условия следующим образом:

$$Y(\alpha, \alpha) = \dots = Y^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0, \quad Y^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = E,$$

то

$$Z(\alpha, \alpha) = \ldots = Z^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0, \quad Z^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = q(\alpha)E - P(\alpha) > 0.$$

По формуле Тейлора

$$Z(t, \alpha) = \frac{(t-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}[q(\alpha)E - P(\alpha)] + o(t-\alpha)^n, \quad \alpha < t < \alpha + \varepsilon.$$

Отсюда на том же интервале квадратичная форма $(Z(t)c, c) > 0$, поэтому $\int_\alpha^t k(t, s)(Z(s)c, c)\,ds > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t, h) = \int_\alpha^t k(t, s)(Z(s)h, h)\,ds$ в точке t^*, которая в силу предположения, сделанного выше, принимает значение $\varphi(t^*, h) = 0$. Тогда $(Z(t^*)h, h) = k(t^*)([q(t^*)E - P(t^*)]h, h) > 0$.

Продолжая рассуждения, мы за конечное число шагов (если надо, то применим лемму Гейне – Бореля) достигаем точки t_1 $(t_1 < \infty)$. На всем интервале (a, t_1) $(Z(t)h, h) > 0$. Тогда и $\int_\alpha^{t_1} k(t, s)(Z(s)h, h)\,ds > 0$, что невозможно, следовательно, наше предположение неверно.

Таким образом, для любого матричного решения $Y(t)$, имеющего $(n-1)$-кратный нуль в точке α, для всех $t > \alpha$ существует обратная матрица $Y^{-1}(t)$.

Докажем, что существует фундаментальная система решений из матричных решений $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$, имеющих $(n-1)$-кратные нули в точках t_i. Рассмотрим сначала линейно независимые матричные решения $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с $(n-1)$-кратными нулями в точках t_1 и t_2, $t_1 < t_2$. Рассмотрим матрицу

$$W_{22}(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть точка t_3 такая, что $W_{22}(t)$ имеет обратную. Тогда если $Y_3(t)$ — матричное решение (2), имеющее $(n-1)$-кратный нуль в точке t_3, то решения $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ линейно независимы. Действительно, в противном случае существуют такие n-мерные векторы C_1, C_2, C_3, что $Y_1(t)C_1 + Y_2(t)C_2 + Y_3(t)C_3 \equiv 0$, но тогда в точке t_3 $(W_{22}(t_3)h_1, h_1) = 0$, $h_1 = \mathrm{col}(C_1, C_2)$, что невозможно, так как $W_{22}(t_3)$ имеет обратную матрицу.

Продолжая наши рассуждения, получаем n линейно независимых матричных решений (2), которые имеют $(n-1)$-мерные нули в точках t_i. Если положить $a = \max_{1 \le i \le n} t_i$, то на интервале (a, ω) все решения $Y_i(t)$ имеют обратные.

Теорема 2. *Пусть матрица $P(t)$ непрерывная и самосопряженная. Тогда для того чтобы система уравнений (2) была неосцилляционной, необходимо и достаточно, чтобы неосцилляционными были скалярные уравнения*

$$v^{(n)} + \lambda_i(t)v = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где $\lambda_i(t)$— собственные числа матрицы $P(t)$.

Для доказательства рассмотрим функции

$$v(t) = y_1^2(t) + \ldots + y_n^2(t), \quad u(t) = \sqrt{v(t)}, \tag{15}$$

где $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ — решение системы уравнений (2). Выполняются очевидные соотношения $v(t) = u^2(t)$, $v' = 2(y, y')$, $u'u = (y, y')$. Через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение евклидового пространства. Относительно скалярных функций $u(t)$ и $v(t)$ получим скалярные уравнения того же порядка, что и исходная система уравнений (2). В частности,

при $n = 2$

$$\frac{1}{2}v'' + (Py, y) = y'^2, \qquad u'' + \frac{(Py, y)}{u} = \frac{y'^2 - u'^2}{u}; \tag{16}$$

при $n = 3$

$$\frac{1}{2}v''' + (Py, y) = \frac{3}{2}[y'^2], \qquad u''' + \frac{(Py, y)}{u} = \frac{3}{2}\frac{\left[y'^2 - u'^2\right]}{u}, \tag{17}$$

при $n = 4$

$$\frac{1}{2}v^{(\mathrm{IV})} + (Py, y) = 2[y'^2] + 3y''^2,$$
$$u^{(\mathrm{IV})} + \frac{(Py, y)}{u} = \frac{2\left[y'^2 - u'^2\right] + 3\left[y''^2 - u''^2\right]}{u}. \tag{18}$$

В общем случае, используя формулу Лейбница

$$v^{(n)} = 2\left(y, y^{(n)}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\left(y^{(k)}, y^{(n-k)}\right),$$

для функции $v(t)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{2}v^{(n)} + (Py, y) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\left(y^{(k)}, y^{(n-k)}\right). \tag{19}$$

Для функции $u(t)$ уравнение будет иметь вид (19), где в слагаемых правой части будут стоять суммы соответствующих разностей $\left(y^{(k)}, y^{(n-k)}\right) - u^{(k)}u^{(n-k)}$.

Функции $u(t)$, $v(t)$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $y(t) = 0$. Что касается производных, то структура нулей сохраняется только для функции $u(t)$, либо $v'(t) = 0$ в тех точках, где $y(t) = 0$, хотя $y'(t) \neq 0$. Для производных функции $u(t)$, используя правило Лопиталя, нетрудно показать, что в точках, где $y(t)$ имеет i-кратный нуль, $u^{(i)}(t_0) = \sqrt{y^{(i)^2}(t_0)}$, т. е. нули функции $u(t)$ имеют ту же кратность, что и $y(t)$. Кроме того, согласно неравенству Коши – Шварца правая часть в (16) положительна, поскольку $y'^2 - u'^2 = \left[y'^2 y^2 - (y, y')^2\right] / u^2$.

Для $n = 2$ достаточно доказать только необходимость, так как из теоремы сравнения Штурма и неравенства Релея

$$\lambda_{\min}(t)E \leq P(t) \leq \lambda_{\max}(t)E \tag{20}$$

следует неосцилляционность скалярных уравнений (14) и системы уравнений (2). Через $\lambda_{\min}(t)$ и $\lambda_{\max}(t)$ в (20) обозначено соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $P(t)$.

Необходимость докажем от противного. Пусть система уравнений (2) неосцилляционная, а уравнение

$$v_n'' + \lambda_{\max}(t)v_n = 0 \tag{21}$$

осцилляционное и a, b — два соседних нуля решения $v(t)$. Запишем уравнение (16) в виде

$$\frac{1}{2}v'' + \lambda_{\max}(t)v = \left[\lambda_{\max}(t)v - (Py, y)\right] + y'^2. \tag{22}$$

Обозначим правую часть (22) через $\psi(t)$; в силу неравенств (20) $\psi(t) \geq 0$.

Пусть $k(t, s)$ — функция Коши уравнения (21), тогда решение (16), обращающееся в нуль в точке a, можно записать таким образом:

$$v(t) = k(t, a)C + \int_a^t k(t, s)\psi(s)\,ds, \tag{23}$$

$k(t, s) > 0$ для $s < t \in (a, b)$. Поэтому можно выбрать такие ε и $\tilde{C}$, что $k(t_1 + \varepsilon, a)\tilde{C} + \int_a^{t_1+\varepsilon} k(t_1 + \varepsilon, s)\psi(s)\,ds = 0$. Последнее невозможно, так как функция $v(t)$ неосцилляционная. Следовательно, уравнение (22) неосцилляционное, а поэтому согласно теореме Штурма в силу неравенств (20) неосцилляционными будут и остальные уравнения (14).

При $n \geq 3$ для доказательства используем теорему сравнения В. А. Кондратьева [4].

Теорема 3. *Пусть скалярные уравнения*

$$z^{(n)} + a_i(t)z = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{24}$$

неосцилляционные и выполняются неравенства

$$a_1(t) \leq q(t) \leq a_2(t). \tag{25}$$

Тогда уравнение (9) *неосцилляционное.*

Доказательство проведем для случая $n = 3$. Допустим противное, т. е. пусть система уравнений (2) неосцилляционная, а уравнение

$$z''' + \lambda_{\min}(t)z = 0 \tag{26}$$

осцилляционное и α, β — краевые нули решения $z(t)$. Запишем решение вида (23), которое имеет двукратный нуль в точке α:

$$v(t) = k(t, \alpha)C + \int_\alpha^t k(t, s)[\lambda_{\max}(s)y^2 - (P(s)y, y) + (y'^2)']\,ds. \tag{27}$$

Проинтегрируем последнее слагаемое в правой части (23):

$$\int_\alpha^t k(t, s)(y'^2)'\,ds = -k(t, \alpha)y'^2(\alpha) - \int_\alpha^t k'_s(t, s)y'^2\,ds.$$

Следовательно, второе слагаемое в (27) отрицательное и, повторяя рассуждения, аналогичные случаю $n = 2$, получаем существование, по крайней мере, трех нулей у функции $v(t)$, что невозможно. Отсюда следует, что наше предположение об осцилляционности (26) неверно.

Для доказательства неосцилляционности уравнения

$$\omega''' + \lambda_{\max}(t)\omega = 0 \tag{28}$$

воспользуемся уравнением, сопряженным к нему:

$$-z^{*'''} + \lambda_{\max}(t)z^* = 0, \tag{29}$$

и тем фактом, что сопряженные уравнения осциллируют или неосциллируют одновременно [5].

Таким образом, мы доказали, что из неосцилляционности системы уравнений (2) следует неосцилляционность уравнений (14) при $n = 3$ с минимальным и максимальным собственными числами. Тогда, применяя снова теорему В. А. Кондратьева и (20), получаем, что и остальные скалярные уравнения (14) неосцилляционные.

Достаточность. Допустим противное, т. е. что уравнение (26) неосцилляционное, а система уравнений (2) имеет осцилляционное решение $v(t)$. Тогда по построению осцилляционным будет уравнение (17), его решение через функцию Грина $G(t, s)$ запишется в виде

$$v(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, s)\psi(s)\,ds, \tag{30}$$

где $\psi(s) = \lambda_{\min}(s)y^2 - (P(s)y, y) + \left(y'^2\right)'$, $G(t, s)$ — функция Грина для уравнения (26), построенная по краевым нулям системы уравнений (2) и, кроме того, $G(t, s) > 0$, $G'(t, s) > 0$ $(t, s) \in (\alpha, \beta)$. По доказанному в необходимости выражение в правой части (30) отрицательное, поскольку $\int_{\alpha}^{\beta} G(t, s)\left(y'^2\right)' ds = -\int_{\alpha}^{\beta} G_s'(t, s)\left(y'^2\right)' ds$. Тогда в левой части (30) по построению имеем положительную функцию, а в правой — отрицательную, что возможно лишь при $v(t) \equiv 0$.

Для случая, когда $G(t, s) < 0$, используем уравнение, сопряженное к (26), и снова получим противоречие. Следовательно, если „крайние" уравнения (14) неосцилляционные, то такой же будет и система (2).

Доказательство для $n \geq 4$ сложнее. Отметим только, что при этом важную роль играет знакопостоянство выражения $\int_{\alpha}^{t} k(t, s)\psi(s)\,ds$, где $\psi(s)$ — правая часть (19).

Из доказательства достаточности при $n = 3$ можно получить эффективный признак неосцилляции системы уравнений (2).

***Следствие* 1.** *Пусть уравнения* (24) *неосцилляционные и выполняются неравенства*

$$a_1(t)E \leq P(t) \leq a_2(t)E. \tag{31}$$

Тогда система уравнений (2) *неосцилляционная.*

В качестве уравнений сравнения можно выбрать уравнение Ейлера $y^{(n)} + k/t^n y = 0$, которое неосциллирует при k_1 и k_2, $k_1 < k_2$ и которое легко подсчитать. Так, для $n = 3$ $k_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}/9t^3$; для $n = 4$ $k_1 = 9/16$, $k_2 = 1$ и т. п. В этом случае получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть на интервале* j *выполняются неравенства* $-(2\sqrt{3}/(9t^3))E \leq P(t) \leq (2\sqrt{3}/(9t^3))E$ (*или* $-(9/(16t^4))E \leq P(t) \leq (1/t^4)E$). *Тогда система уравнений* (2) *при* $n = 3$ (*или* $n = 4$) *неосцилляционная.*

1. *Reid W. T.* Sturmian theory for ordinary differential equations. – New York etc.: Springer, 1981. – 559 p.
2.. *Бугір М. К.* Узагальнення теорем типу Маммана на випадок систем диференціальних рівнянь // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 3. – С. 302–306.
3. *Howard H.* Oscillation criteria for matrix differential equations // Canad. J. Math. – 1967. – **19**. – P. 184–189.
4. *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений уравнения $x^{(n)} + p(t)x = 0$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1961. – **10**. – С. 419–436.
5. *Birkhoff G. D.* On solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the order // Ann. Math. – 1911. – **12**. – P. 103–127.

Получено 16.01.96