УДК 517.51

М. А. Сухорольський (Ун-т „Львівська політехніка", Львів)

ПРО ПОРЯДОК ЛОКАЛЬНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ — ЧАСТИННИМИ СУМАМИ ОПЕРАТОРІВ УСЕРЕДНЕННЯ

We study the order of polynomial approximations of periodic functions on intervals which are internal with respect to the main interval of periodicity and on which these functions are sufficiently smooth. The estimates obtained contain parameters which characterize the smoothness and alternation of signs of nuclear functions and parameters that determine classes of approximated functions.

Досліджуються порядки поліноміальних наближень періодичних функцій на проміжках, що є внутрішніми до основного проміжку періодичності і на яких ці функції є достатньо гладкими. Знайдені оцінки містять параметри, що характеризують гладкість і знакозмінність ядерних функцій, а також параметри, що визначають класи апроксимовних функцій.

Апроксимаційні властивості послідовностей тригонометричних поліномів безпосередньо виражаються через властивості ядерних функцій інтегральних операторів, що задають ці послідовності. Найбільш вивченими (див., наприклад, [1, 2]) є послідовності поліномів, що задаються за допомогою поліноміальних (за тригонометричними системами функцій) ядерних функцій. Важливими є дослідження стосовно залежності точності поліноміальних наближень від змін знаків значень відповідних ядерних функцій. Як розвиток цих досліджень у роботі [3] розглядаються узагальнені методи підсумовування рядів, що грунтуються на усередненні за допомогою інтегральних операторів, залежних від параметра, з ядрами, що набувають різнознакових значень. Знайдені при цьому оцінки відхилень апроксимовних функцій від частинних сум операторів містять параметри, що характеризують гладкість і знакозмінність ядерних функцій цих операторів.

У даній роботі встановлено оцінки відхилень поліномів з [3] від функцій, достатньо гладких на деякому проміжку, внутрішньому до основного проміжку періодичності цих функцій.

Нехай 2π-періодична функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом, $f(x) \in L^1([-\pi; \pi])$, і

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

— її ряд Фур'є.

Розглянемо послідовність функцій $\{\varphi(kr)\}_{k=1}^{\infty}$, заданих на числовій множині $\{r\}$ з граничною точкою, що дорівнює нулю. Тут

$$\varphi(kr) = \int_0^1 g_1(t) \cos krt \, dt. \tag{2}$$

Означення. *Функція $g_1(t)$ називається ядром* 1*-го типу* [3, с. 10], *якщо справджуються умови:*

1) *функція*

$$g(t) = \begin{cases} g_1(|t|) & \text{при} \quad |t| \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

має скінченні похідні до p-го $(p \ge 1)$ порядку і $\dfrac{d^p g}{dt^p}$ — функція з обмеженою варіацією;

2) $$\int_0^1 t^m g_1(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при } m=2,4,\ldots,q, \end{cases}$$

де $q \geq 2$ *— парне число.*

Сформулюємо два допоміжні твердження.

Лема 1. *Для великих значень* ω *справедлива оцінка*

$$|\varphi(\omega)| \leq \frac{A}{\omega^{p+1}}, \qquad A < \infty. \tag{3}$$

Доведення. Проводячи в (2) $(p+1)$ разів інтегрування за частинами і враховуючи умову 1 означення, знаходимо

$$\varphi(\omega) = \int_0^1 g_1(t)\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos\omega t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\omega^{p+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left[\omega t + \frac{(p+1)\pi}{2}\right]dg^{(p)}(t).$$

Застосовуючи тут теорему про середнє для інтегралу Стільтьєса, оскільки функція $\cos t$ неперервна, а функція $g^{(p)}(t)$ має обмежену варіацію, одержуємо (3).

Лема 2. *Якщо* $f(x)$ — $(l+2)$ $(l \geq q)$ *разів диференційовна функція на проміжку* $]a_1; b_1[\, \subset [-\pi; \pi]$, $a_1 < b_1$, *що має обмежену* $(l+2)$ *похідну,*

$$\left|\frac{d^{l+2}f}{dx^{l+2}}\right| \leq M < \infty,$$

то для x, $x \in [a; b]$, *і дійсних* r, $r > 0$, *таких, що* $[x - r; x + r] \subset\,]a_1; b_1[$, *виконується співвідношення*

$$\int_0^1\left[\frac{f(x+rt)+f(x-rt)}{2} - f(x)\right]g_1(t)\,dt =$$

$$= -\frac{r^{q+2}}{2}\int_0^1\left[f^{(q+2)}(x+rt)+f^{(q+2)}(x-rt)\right]g_1^{[q+2]}(t)\,dt, \tag{4}$$

де

$$g_1^{[k]}(t) = \int_t^1 \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}g_1(u)\,du.$$

Доведення. Вводячи позначення

$$f_0(t) = \frac{1}{2}f(x+rt) + f(x-rt) - f(x)$$

і інтегруючи за частинами $(q+2)$ разів інтеграл у лівій частині (4), знаходимо

$$\int_0^1 f_0(t)g_1(t)\,dt = \left[f_0(t)g_1^{[1]}(t)\right]_0^1 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{q+2}(-1)^k\left[f_0^{(k-1)}(t)g_1^{[k]}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f_0^{(q+2)}(t)g_1^{[q+2]}(t)\,dt.$$

Враховуючи рівності $g_1^{[k]}(0) = 0$, $k = 2, 4, \ldots, q$, одержані з урахуванням умови 2 означення, $f_0(0)=0$, $f_0^{(k)}(0)=0$ для непарних k; $g^{[k]}(1)=0$ для будь-яких k, маємо (4).

Інтегральний оператор

$$S(f;x,r) = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x+rt)+f(x-rt)]g_1(t)\,dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(kr)\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) \tag{5}$$

визначає узагальнений метод підсумовування рядів [3, с. 20]: якщо 2π-періодична функція $f(x)$, $f(x)\in L^1([-\pi;\pi])$, неперервна на проміжку $]a_1;b_1[\subset \subset[-\pi;\pi]$, то ряд (5) рівномірно підсумовується до $f(x)$ в усіх точках проміжку $[a;b]\subset]a_1;b_1[$,

$$\lim_{r\to 0} S(f;x,r) = f(x). \tag{6}$$

1. Розглянемо послідовність частинних сум ряду в (5)

$$S_n(f;x,r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \varphi(kr)\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right). \tag{7}$$

Внаслідок оцінки (3) і нерівності $|a_k\cos kx + b_k\sin kx|\le M,\ M<\infty$, ряд в (5) при $r>0$ мажорується збіжним рядом $AM\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r^{p+1}k^{p+1}}$, $p\ge 1$, і тому послідовність функцій (7) рівномірно збігається при $r>0$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x,r) = S(f;x,r).$$

Підставляючи цю рівність у (6), для неперервної на проміжку $]a_1;b_1[$ функції $f(x)$, $f(x)\in L^1([-\pi;\pi])$, маємо рівність

$$\lim_{r\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} S_n(f;x,r)\right) = f(x), \tag{8}$$

в якій порядок граничних переходів не можна змінювати.

Введемо позначення для відхилення функції $f(x)$ від полінома $S_n(f;x,r)$ на проміжку $[a;b]\subset]a_1;b_1[$:

$$\| S_n(f;x,r) - f(x)\| = \max_{x\in[a;b]} |S_n(f;x,r) - f(x)|, \tag{9}$$

для якого згідно з (8) справджується рівність

$$\lim_{r\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} \| S_n(f;x,r) - f(x)\|\right) = 0. \tag{10}$$

Внаслідок того, що в (10) не можна змінювати порядок граничних переходів, серед нескінченно малих послідовностей $\{r=r(n)\}_{n=1}^{\infty}$ існують такі, для яких справджується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n(f;x,r(n)) - f(x)\| = 0,$$

і такі, для яких ця рівність не справджується, зокрема, для послідовності $\{r(n)=0\}_{n=1}^{\infty}$.

Задача полягає у знаходженні оптимальної залежності $r=r(n)$, для якої відхилення (9) при великих n набуває найменшого значення.

Виходячи з того, що асимптотичні оцінки для коефіцієнтів полінома (7) представляються через степеневі функції, залежність $r = r(n)$ будемо шукати у вигляді

$$r = \frac{r_0}{n^\gamma}, \tag{11}$$

де r_0, γ — сталі величини, які не залежать від n.

Теорема 1. *Нехай 2π-періодична функція $f(x)$, $f(x) \in L^1([-\pi; \pi])$, має скінченні похідні досить високого порядку (більшого або рівного $q+2$) на проміжку $]\,a_1; b_1[\, \subset [-\pi; \pi]$. Тоді*

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-\gamma(q+2)}), \tag{12}$$

де $\gamma = p/(q+p+3)$.

Доведення. Для відхилення (9) виконується нерівність

$$\| S_n(f; x, r) - f(x) \| \leq \| S(f; x, r) - f(x) \| + \| S_n(f; x, r) - S(f; x, r) \|. \tag{13}$$

Оцінимо перший доданок в (13). Використовуючи формулу (4), одержуємо

$$| S(f; x, r) - f(x) | = \frac{r^{q+2}}{2} \left| \int_0^1 \left[f^{(q+2)}(x+rt) + f^{(q+2)}(x-rt) \right] g^{[q+2]}(t)\, dt \right|,$$

якщо тільки $x \in [a; b]$, $[x-r; x+r] \subset \,]\,a_1; b_1[$. Застосовуючи теорему про середнє завдяки обмеженості функції $f^{(q+2)}(x)$ і неперервності функції $g^{[q+2]}(t)$, маємо

$$| S(f; x, r) - f(x) | = M r^{q+2}, \quad M < \infty. \tag{14}$$

Для оцінки другого доданка в (13) використаємо одержану з (5) і (7) залежність

$$S(f; x, r) - S_n(f; x, r) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(kr) (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{15}$$

Беручи до уваги (3) і враховуючи, що $|a_n|$, $|b_n| \leq B < \infty$, знаходимо

$$| S_n(f; x, r) - S(f; x, r) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} | \varphi(kr) | (|a_k| + |b_k|) \leq$$

$$\leq 2AB \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(kr)^{p+1}}. \tag{16}$$

Підставляючи сюди (11), дістаємо нерівність

$$| S_n(f; x, r(n)) - S(f; x, r(n)) | \leq \frac{2AB}{r_0^{p+1} n^{-\gamma(p+1)}} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{p+1}} \leq \frac{B_0}{r_0^{p+1}} \frac{1}{n^{p-\gamma(p+1)}}, \quad B_0 < \infty. \tag{17}$$

Таким чином, для відхилення (9) з урахуванням (14), (17) і (11) одержуємо нерівність

$$| S_n(f; x, r(n)) - f(x) | \leq M \left[\frac{r_0^{q+2}}{n^{\gamma(q+2)}} + \frac{k_0 r_0^{-(p+1)}}{n^{p-\gamma(p+1)}} \right], \quad k_0 = \frac{B_0}{M},$$

мінімальне значення виразу у правій частині якої досягається при

$$\gamma = \frac{p}{q+p+3}, \quad r_0^{q+p+3} = \frac{p+1}{q+2} k_0.$$

Звідси також випливає (12).

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і, крім того, функція* $f(x)$ *зображається многочленами степеня, меншого ніж* $(q+2)$, *на проміжку* $]\,a_1; b_1\,[$. *Тоді*

$$\| S_n(f; x, r) - f(x) \| = O(n^{-p})$$

при досить малому r *такому, що* $[x-r; x+r] \subset]\,a_1; b_1\,[$.

Доведення. Перший доданок у (13) дорівнює нулю, оскільки за умовою $f^{(q+2)}(x) = 0,\ x \in]\,a_1; b_1\,[$.

Таким чином, відхилення (9) задовольняє нерівність (16) при r такому, що $[x-r; x+r] \subset]\,a_1; b_1\,[$,

$$| S_n(f; x, r) - f(x) | \le \frac{2AB}{r^{p+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \le \frac{2AB}{r^{p+1}} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{p+1}} \le \frac{B_0}{n^p}, \quad B_0 < \infty.$$

Звідси випливає необхідна оцінка.

Теорема 2. *Нехай* 2π-*періодична функція* $f(x)$ *належить класу Гельдера* H^{α}, $0 < \alpha \le 1$, *і має скінченні похідні досить високого порядку (більшого або рівного* $q+2$) *на проміжку* $]\,a_1; b_1\,[\subset [-\pi; \pi]$. *Тоді*

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-\gamma(q+2)}), \tag{18}$$

де $\gamma = (p+\alpha)/(q+p+3)$.

Доведення. Скористаємося нерівністю (13). Для першого доданка цієї нерівності виконується оцінка (14).

Оцінку для другого доданка в (13) встановлюємо з використанням формули (15), оцінки (3) і оцінок [4, с. 436] $|a_n|, |b_n| \le B n^{-\alpha}$, $B < \infty$. Справді,

$$| S_n(f; x, r) - S(f; x, r) | \le 2AB \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(kr)^{p+1} k^{\alpha}} \le$$

$$\le \frac{2AB}{r^{p+1}} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{p+\alpha+1}} \le \frac{B_0}{r^{p+1}} \frac{1}{n^{p+\alpha}}, \quad B_0 < \infty. \tag{19}$$

Таким чином, підставляючи (14), (19) і (11) в (13), одержуємо

$$| S_n(f; x, r(n)) - f(x) | \le M \left[\frac{r_0^{q+2}}{n^{\gamma(q+2)}} + \frac{k_0 r_0^{-(p+1)}}{n^{p+\alpha-\gamma(p+1)}} \right], \quad k_0 = \frac{B_0}{M}.$$

Мінімальне значення виразу у правій частині цієї нерівності досягається при

$$\gamma = \frac{p+\alpha}{q+p+3}, \qquad r_0^{q+p+3} = k_0 \frac{p+1}{q+2}.$$

Отже,

$$| S_n(f; x, r(n)) - f(x) | \le M \frac{r_0^{q+2}(q+p+3)}{p+1} \frac{1}{n^{\gamma(q+2)}}.$$

Звідси випливає (18).

Аналогічно з наслідком 1 справедливе таке твердження.

***Наслідок* 2.** *Якщо функція* $f(x)$ *зображається многочленом степеня, меншого ніж* $(q+2)$, *на проміжку* $]\,a_1; b_1\,[$, *то*

$$\| S_n(f; x, r) - f(x) \| = O(n^{-(p+\alpha)})$$

при досить малому r *такому, що* $[x-r; x+r] \subset]\,a_1; b_1\,[$.

***Наслідок* 3.** *Порядок локального наближення функції $f(x)$, $f(x) \in H^{\alpha}([-\pi;\pi])$, що має похідні порядку, більшого або рівного $(q+2)$, на проміжку $]a_1; b_1[$, вищий або рівний порядку найкращого поліноміального наближення цієї функції на $[-\pi;\pi]$.*

Доведення. Степені числа n у (18) і в оцінці найкращого наближення функції $f(x)$ [1, с. 208] відповідно дорівнюють $\gamma(q+2)$ і α. Нерівність $\gamma(q+2) \geq \alpha$ або $p(q+2)/(p+1) \geq \alpha$ справджується для будь-яких $p \geq 1$, $q \geq 0$ і $0 < < \alpha \leq 1$.

Зауваження. Умова теореми 2 про існування похідних порядку, вищого або рівного $(q+2)$, $q \geq 0$, від функції $f(x)$ на проміжку $]a_1; b_1[$, дозволяє реалізувати властивість оператора усереднення, що виражається лемою 2. Якщо ж функція $f(x)$ на $]a_1; b_1[$ належить класу H^{α_1}, $\alpha_1 \geq \alpha$, то перший інтеграл в (14) оцінюється безпосередньо,

$$|S_n(f; x, r) - f(x)| = \left| \int_0^1 \left[\frac{f(x+rt)+f(x-rt)}{2} - f(x)\right] g(t)\,dt \right| \leq M r^{\alpha_1},$$

$$M < \infty, \quad [x-r; x+r] \subset\,]a_1; b_1[,$$

і для (9) маємо оцінку

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-\gamma\alpha_1}), \qquad \gamma = \frac{p+\alpha}{p+\alpha_1+1}.$$

Звідси за аналогією з наслідком 3 знаходимо, що порядок наближення функції $f(x)$, $f(x) \in H^{\alpha}([-\pi;\pi])$, і $f(x) \in H^{\alpha_1}([a;b])$, поліномом $S_n(f; x, r(n))$ на $[a;b]$ вищий, рівний або нижчий від порядку найкращого наближення цієї функції на $[-\pi;\pi]$, якщо α_1 відповідно більше, дорівнює або менше $p\alpha/(p+1)$.

Теорема 3. *Нехай 2π-періодична функція $f(x)$ належить класу $W^{l+1}H^{\alpha}$, $l \geq 1$, і має похідні досить високого порядку (більшого або рівного $l \geq q+2$) на проміжку $]a_1; b_1[\subset [-\pi;\pi]$. Тоді*

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-\gamma(q+2)}),$$

де $\gamma = (l+p+\alpha+1)/(q+p+3)$.

Доведення. Перший доданок в (13) задовольняє оцінку (14). Для другого доданка в (13), врахувавши оцінку (3) і оцінки $|a_n|$, $|b_n| \leq B/n^{l+\alpha+1}$, $B < \infty$, маємо

$$|S_n(f; x, r(n)) - S(f; x, r(n))| \leq 2AB \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(kr)^{p+1} n^{l+\alpha+1}} \leq$$

$$\leq \frac{2AB}{r_0^{p+1} n^{-\gamma(p+1)}} \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{l+p+\alpha+2}} \leq \frac{B_0}{r_0^{p+1}} \frac{1}{n^{p+l+\alpha+1-\gamma(p+1)}}.$$

Тоді нерівність (13) записується у вигляді

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| \leq M \left[\frac{r_0^{q+2}}{n^{\gamma(q+2)}} + \frac{k_0 r_0^{-(p+1)}}{n^{l+p+\alpha+1-\gamma(p+1)}} \right], \qquad k_0 = \frac{B_0}{M}.$$

Звідси при

$$\gamma = \frac{l+p+\alpha+1}{q+p+3}, \qquad r_0^{q+p+3} = \frac{p+1}{q+2}k_0$$

одержуємо потрібну оцінку.

Справедливе наступне твердження.

***Наслідок* 4.** *Якщо функція $f(x)$ зображається многочленом степеня, меншого ніж $(q+2)$, на проміжку $]\,a_1; b_1\,[$, то*

$$\| S_n(f; x, r) - f(x) \| = O(n^{-(l+p+\alpha+1)})$$

при досить малому r такому, що $[x-r; x+r] \subset\,]\,a_1; b_1\,[$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови однієї з теорем 1–3 і послідовність (2) при $r = r_0/n$, де r_0 — стале число, задовольняє умову*

$$\varphi(kr) = 0, \qquad k > n. \tag{20}$$

Тоді

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-(q+2)}).$$

Доведення. Підставляючи (14) і (15) з урахуванням (20) в (13), одержуємо

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| \le M r^{q+2} = \frac{M r_0^{q+2}}{n^{q+2}}.$$

Звідси випливає шукана оцінка.

2. Розглянемо задачу про порядок наближення похідних від 2π-періодичної функції $f(x)$, $f(x) \in L^1([-\pi; \pi])$, на проміжку $]\,a_1; b_1\,[\, \subset [-\pi; \pi]$ послідовністю частинних сум $S_n^{(\nu)}(f; x, r)$, $\nu \ge 1$, ряду

$$S^{(\nu)}(f; x, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(kr) k^{\nu} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) \right]. \tag{21}$$

Вважаємо, що ряд (21) при $r > 0$ рівномірно збігається відносно x. Виконання цієї вимоги забезпечується вибором послідовності $\{\varphi(kr)\}$. Параметр p, що характеризує цю послідовність, повинен задовольняти умову $p \ge \nu + 1$. Справді, якщо $r > 0$ і $p \ge \nu + 1$, то для членів ряду (21) з урахуванням нерівностей (3) і $|a_k|$, $|b_k| \le B$, $B < \infty$, маємо оцінку

$$\left| \varphi(kr) k^{\nu} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) \right] \right| \le \frac{2AB}{r^{p+1} k^{p+1-\nu}} \le \frac{2AB}{r^{p+1} k^2}.$$

Оскільки ряд

$$\frac{2AB}{r^{p+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2 AB}{3 r^{p+1}}$$

збігається, то ряд (21) рівномірно збігається відносно x, $x \in [-\pi; \pi]$.

Позначимо

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) \right\| = \max_{x \in [a; b]} \left| S_n^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) \right|.$$

За аналогією з (13) справедлива нерівність

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) \right\| \le$$

$$\le \left\| S^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) \right\| + \left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r) - S^{(\nu)}(f; x, r) \right\|. \tag{22}$$

Теорема 5. *Нехай* 2π-*періодична функція* $f(x)$, $f(x) \in L^1([-\pi;\pi])$, *має скінченні похідні досить високого порядку (більшого або рівного* $q+\nu+2$, *де* $1 \le \nu < p$) *на проміжку* $]a_1; b_1[\subset [-\pi;\pi]$. *Тоді*

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - f^{(\nu)}(x) \right\| = O(n^{-\gamma(q+2)}), \tag{23}$$

де $\gamma = (p-\nu)/(q+p+3)$; $[a,b] \subset]a_1; b_1[$.

Доведення. Для першого доданка в (22), використовуючи (4), знаходимо

$$S^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) = \int_0^1 \left[\frac{f^{(\nu)}(x+rt) + f^{(\nu)}(x-rt)}{2} - f^{(\nu)}(x) \right] g(t)\, dt =$$

$$= -\frac{r^{q+2}}{2} \int_0^1 \left[f^{(q+\nu+2)}(x+rt) + f^{(q+\nu+2)}(x-rt) \right] g^{[q+2]}(t)\, dt,$$

якщо тільки $[x-r; x+r] \subset \,]a_1; b_1[$. Враховуючи інтегровність функцій $f^{(q+\nu+2)}(x)$, $g^{[q+2]}(x)$, маємо

$$\left| S^{(\nu)}(f; x, r) - f^{(\nu)}(x) \right| \le M r^{q+2}, \quad M < \infty. \tag{24}$$

Для другого доданка в (22), використовуючи нерівності $|a_n|$, $|b_n| \le B$, $B < < \infty$, і (3), одержуємо

$$\left| S_n^{(\nu)}(f; x, r) - S^{(\nu)}(f; x, r) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(kr) k^{\nu} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\nu\pi}{2}\right) \right] \right| \le 2AB \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{\nu}}{(kr)^{p+1}}$$

або, беручи до уваги (11),

$$\left| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - S^{(\nu)}(f; x, r(n)) \right| \le \frac{B_0}{r_0^{p+1}} \frac{1}{n^{p-\nu-\gamma(p+1)}}, \quad B_0 < \infty. \tag{25}$$

Перепишемо нерівність (22) з урахуванням (24), (25) і (11) у вигляді

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - f^{(\nu)}(x) \right\| \le M \left[\frac{r_0^{q+2}}{n^{\gamma(q+2)}} + \frac{k_0 r_0^{-(p+1)}}{n^{p-\nu-\gamma(p+1)}} \right], \quad k_0 = \frac{B_0}{M}.$$

З цієї нерівності при

$$\gamma = \frac{p-\nu}{q+p+3}, \quad r_0^{q+p+2} = \frac{p+1}{q+2} k_0$$

випливає оцінка (23).

Твердження, аналогічні теоремі 5, сформулюємо й для інших класів функцій.

Теорема 6. *Нехай* 2π-*періодична функція* $f(x)$, $f(x) \in H^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, *має похідні досить високого порядку (більшого або рівного* $q+\nu$, $1 \le \nu < p+\alpha$) *на проміжку* $]a_1; b_1[\subset [-\pi;\pi]$. *Тоді*

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - f^{(\nu)}(x) \right\| = O(n^{-\gamma(q+2)}),$$

де $\gamma = (p+\alpha-\nu)/(q+p+3)$, $[a;b] \subset]a_1; b_1[$.

Теорема 7. *Нехай* 2π-*періодична функція* $f(x)$, $f(x) \in W^{l+1}H^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, *має похідні досить високого порядку (більшого або рівного* $q+\nu$, $1 \le \nu < l+p+ +1$) *на проміжку* $]a_1; b_1[\subset [-\pi;\pi]$. *Тоді*

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - f^{(\nu)}(x) \right\| = O(n^{-\gamma(q+2)}),$$

де $\gamma = (l+1+p+\alpha-\nu)/(q+p+3)$; $[a; b] \subset]a_1; b_1[$.

***Приклад* 1.** Функція

$$g(t) = \frac{m^2\pi^2}{2}(1-t)^2 \cos m\pi t, \quad 0 \le t \le 1, \quad m = 1, 3, \ldots,$$

має першу похідну з обмеженою варіацією і рівний нулю момент другого порядку $(p = 1, q = 2)$. Послідовність (2) у цьому випадку має вигляд

$$\left\{ \varphi(kr) = \frac{1+(kr_0)^2}{\left[1-(kr_0)^2\right]^2} - \frac{(kr_0)\left[3+(kr_0)^2\right]}{\left[1-(kr_0)^2\right]^3} \frac{\sin(km\pi r_0)}{m\pi} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

де $r_0 = r/m$, і справджується гранична рівність

$$\lim_{kr_0 \to 1} \varphi(kr) = \frac{1}{8} + \frac{m^2\pi^2}{12}.$$

Для прикладу запишемо оцінку наближення функції, що задовольняє умови теореми 1:

$$\| S_n(f; x, r(n)) - f(x) \| = O(n^{-2/3}).$$

***Приклад* 2.** Функція

$$g_1(t) = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!} \cos^{2m} \frac{\pi t}{2}, \quad 0 \le t \le 1,$$

набуває невід'ємних значень і має похідну $2m$-го порядку з обмеженою варіацією $(q = 0, p = 2m + 1)$. За формулою (2) знаходимо

$$\left\{ \varphi(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \left(\frac{kr}{i\pi} \right)^2 \right]^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Розглянемо, наприклад, функцію, що задовольняє умови теореми 5. Тоді для ν-ї похідної цієї функції за формулою (23) маємо

$$\left\| S_n^{(\nu)}(f; x, r(n)) - f^{(\nu)}(x) \right\| \le O(n^{-(2m+1-\nu)/(m+2)}).$$

***Приклад* 3.** Послідовність $\left\{ \left(\frac{\sin kr}{kr} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}$ відповідає методу Рімана. Вона породжена функцією $g_1(t) = 2(1-t)$, $0 \le t \le 1$, що має першу похідну з обмеженою варіацією $(q = 0, p = 1)$. У випадку виконання умов теореми 1 точність наближення функції відповідною послідовністю поліномів дорівнює $O(n^{-1/2})$.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
3. *Сухорольський М. А.* До проблеми наближення функцій операторами усереднення. – Львів, 1995. – 47 с. – (Препринт / АН України. Наук.-учб. центр мат. моделювання Ін-ту прикл. пробл. механіки і математики; № 1-95).
4. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

Одержано 22.05.95