УДК 517.5

А. С. Романюк, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ И КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Order estimates are obtained for the best approximations of classes $B^r_{1,\theta}$ in the space L_q with $1 \le q < \infty$ and classes $B^r_{\infty,\theta}$ in a uniform metric. The behavior of Kolmogorov widths of the classes $B^r_{q,\theta}$, $1 < q \le \infty$, in the metric of L_∞ is studied.

Одержані порядкові оцінки найкращих наближень класів $B^r_{1,\theta}$ в просторі L_q при $1 \le q < \infty$, а також класів $B^r_{\infty,\theta}$ в рівномірній метриці. Досліджується також поведінка колмогоровських поперечників класів $B^r_{p,\theta}$, $1 < p \le \infty$, в метриці L_∞.

В настоящей работе изучаются наилучшие приближения классов $B^r_{1,\theta}$ в пространстве L_q, $1 \le q < \infty$, а также классов $B^r_{\infty,\theta}$ в равномерной метрике тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Кроме того, устанавливаются порядковые оценки колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$, $1 < p \le \infty$, в равномерной метрике.

При изложении полученных результатов будем пользоваться обозначениями из [1–3], где рассматривались аналогичные вопросы для других соотношений между параметрами p и q. Но поскольку здесь эти параметры будут принимать предельные значения 1 и ∞, то нам потребуются некоторые дополнительные обозначения и определения.

Пусть $V_n(t)$ обозначает ядро Валле – Пуссена порядка $2n-1$, т. е.

$$V_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt .$$

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$, поставим в соответствие полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{m} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

и через $A_s(f, x)$ обозначим свертку $A_s(f, x) = f * A_s(x)$. Тогда (см., например, [4]) при каждом $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, класс $B^r_{p,\theta}$ определяется таким образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \,\middle|\, \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}. \qquad (1)$$

Отметим, что при $p = \infty$ подразумевается естественная модификация нормы (1) и если $p \in (1, \infty)$, то определение (1) можно записать в эквивалентном виде.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, m}$. Положим

$$\rho(s) = \{ k: k = (k_1, \dots, k_m),\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j} \}, \quad \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,x)},$$

где

$$c_k = (2\pi)^{-m} \int_{\pi_m} f(t) e^{-i(k,t)} dt \quad \text{и} \quad \pi_m = \prod_{j=1}^{m} [-\pi; \pi].$$

Тогда

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \middle| \| f \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f, \cdot) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}.$$

В дальнейшем, не умаляя общности, будем предполагать, что вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ имеет вид $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$, и с ним будем связывать вектор $\gamma = r / r_1$. Через γ' обозначим вектор, координаты которого удовлетворяют соотношениям $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu + 1, m}$.

Для удобства напомним некоторые обозначения из [1].

Для функций $\mu(N)$ и $\nu(N)$ будем писать $\mu \asymp \nu$, если существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $c_1 \nu(N) \le \mu(N) \le \le c_2 \nu(N)$. Если же $\mu(N) \le c_2 \nu(N)$ или $c_1 \nu(N) \le \mu(N)$, то пишем $\mu << \nu$ и $\nu << \mu_2$ соответственно. Через $T_{Q^{\gamma'}_n}$ и $T_{Q^{\gamma}_n}$ обозначаются множества полиномов с „номерами" гармоник соответственно из

$$Q^{\gamma'}_n = \bigcup_{(s,\gamma') < n} \rho(s) \quad \text{и} \quad Q^{\gamma}_n = \bigcup_{(s,\gamma) < n} \rho(s),$$

а через

$$E^{\gamma'}_n(f, \cdot)_p = \inf_{t(\cdot) \in T_{Q^{\gamma'}_n}} \| f(\cdot) - t(\cdot) \|_p$$

и

$$E^{\gamma}_n(f, \cdot)_p = \inf_{t(\cdot) \in T_{Q^{\gamma}_n}} \| f(\cdot) - t(\cdot) \|_p$$

— наилучшие приближения полиномами с „номерами" гармоник из множеств $Q^{\gamma'}_n$ и Q^{γ}_n соответственно. В [1] для приближения функций из классов $B^r_{p,\theta}$ использованы ступенчатые суммы Фурье вида

$$S^{\gamma'}_n(f, \cdot) = \sum_{(s, \gamma') < n} \delta_s(f, \cdot) \quad \text{и} \quad S^{\gamma}_n(f, \cdot) = \sum_{(s, \gamma) < n} \delta_s(f, \cdot),$$

которые в рассматриваемых там ситуациях в силу теоремы Риса доставляли такие же порядки приближений, как $E^{\gamma'}_n(f, \cdot)_p$ и $E^{\gamma}_n(f, \cdot)_p$. В случае, когда приближение осуществляется в метрике L_1 или L_∞, как известно, суммы Фурье не дают порядков наилучших приближений и поэтому для оптимального приближения приходится рассматривать другие приближающие агрегаты.

1. Наилучшие приближения классов $B^r_{p,\theta}$ при $p = 1, \infty$. Сначала изучим приближения классов $B^r_{1,\theta}$ в метрике L_1.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда справедливы соотношения*

$$E^{\gamma}_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1 = \sup_{f \in B^r_{1,\theta}} E^{\gamma}_n(f, \cdot)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(m-1)/\theta'}, \tag{2}$$

$$E^{\gamma'}_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1 = \sup_{f \in B^r_{1,\theta}} E^{\gamma'}_n(f, \cdot)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)/\theta'}, \ \theta' = \theta / (\theta - 1). \tag{3}$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху для $E^{\gamma}_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$. Пусть

$f \in B^r_{1,\theta}$. Приближающий полином $t(f, \cdot)$ рассмотрим в виде

$$t(f, \cdot) = \sum_{(s,\gamma) < n} A_s(f, \cdot). \tag{4}$$

Тогда

$$E^\gamma_n(f, \cdot)_1 \le \| f(\cdot) - t(f, \cdot) \|_1 \le$$

$$\le \sum_{(s,\gamma) \ge n} \| A_s(f, \cdot) \|_1 = \sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{(s,r)} \| A_s(f, \cdot) \|_1 2^{-(s,r)}. \tag{5}$$

Далее, применив неравенство Гельдера, а затем воспользовавшись соотношением [5, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{-\alpha(\gamma,s)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{m-1}, \quad \alpha > 0,$$

продолжим оценку (5):

$$\le \left(\sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, \cdot) \|_1^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \left(\sum_{(s,\gamma) \ge n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{1/\theta'} \| f \|_{B^r_{1,\theta}} \ll 2^{-r_1 n} n^{(m-1)/\theta'}. \tag{6}$$

Для того чтобы получить требуемую оценку сверху для $E^{\gamma'}_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$, достаточно вместо приближающего полинома (4) рассмотреть полином

$$t(f, \cdot) = \sum_{(s,\gamma') \le n} A_s(f, \cdot)$$

и при оценке последней суммы в (6) воспользоваться соотношением [5, с. 11]

$$\sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0. \tag{7}$$

Таким образом, оценки сверху величин $E^\gamma_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$ и $E^{\gamma'}_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$ установлены.

Прежде чем перейти к установлению оценок снизу этих величин, отметим, что достаточно оценить снизу величину $E^\gamma_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$ при $\gamma = (1, \ldots, 1) \in N^m$, т. е. величину $E^1_n\left(B^r_{1,\theta}\right)_1$.

Приведем необходимые обозначения, используемые при этом.

Пусть

$$\Gamma(N) = \left\{ k : |k_j| > 0, \ j = \overline{1, m} \ \prod_{j=1}^{m} |k_j| \le N \right\}$$

и $T(N)$ — множество полиномов вида

$$t(\cdot) = \sum_{k \in \Gamma(N)} c_k e^{i(k, \cdot)}.$$

Соответственно $Q^1_n = \bigcup_{(s,1) \le n} \rho(s)$ и $T_{Q^1_n}$ — множество полиномов вида

$$t(\cdot) = \sum_{k \in Q^1_n} c_k e^{i(k, \cdot)}.$$

Заметим, что как следует из определения множеств $\Gamma(N)$ и Q_n^1, справедливы соотношения

$$T_{Q_n^1} \subset T(2^n) \subset T_{Q_{n+m}^1} \subset T(2^{n+m}). \tag{8}$$

Теперь перейдем непосредственно к оценке снизу $E_n^1\left(B_{1,\theta}^r\right)_1$, которую получим из соображений двойственности. Как следует из результата С. М. Никольского [6, с. 25], для $g \in L_1(\pi_m)$ справедливо равенство

$$E_n^1(g)_1 = \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(T_{Q_n^1}) \\ \|P\|_\infty \le 1}} \left| \int_{\pi_m} g(x) P(x)\, dx \right|, \tag{9}$$

где $L^{\perp}\left(T_{Q_n^1}\right)$ — множество функций, ортогональных подпространству тригонометрических полиномов из $T_{Q_n^1}$.

Пусть задано число $n \in N$. Положим

$$F_{r,n}(x) = \sum_{n < (s,1) \le n+m} \; \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \cos k_j x_j ,$$

где $\rho^+(s) = \left\{k : 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}\right\}$. Легко видеть, что функция $F_{r,n}(x)$ ортогональна подпространству тригонометрических полиномов из $T_{Q_n^1}$.

Известно (см., например, [5, с. 53]), что функция

$$F_r(x, \alpha) = \sum_k \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \; \alpha_j \in R,$$

принадлежит классу H_1^r и, следовательно, согласно теореме 1.1 из [5, с. 32] справедливо соотношение $\|A_s(F_r, x, \alpha)\|_1 \ll 2^{-(s,r)}$. Отправляясь от этого соотношения, нетрудно убедиться, что функция $g(x) = C_1 n^{-(m-1)/\theta} F_{r,n}(x)$ принадлежит классу $B_{1,\theta}^r$. (Здесь и далее C_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — положительные постоянные, зависящие только от тех параметров, которые фиксируются при формулировке того или иного утверждения).

Перейдем к построению функции $P(x)$. Полагая $\Omega_n = \Gamma(2^{n+m}) / \Gamma(2^n)$, заметим, что согласно (8) множество Ω_n не содержит векторов $k = (k_1, \ldots, k_m)$, принадлежащих Q_n^1, и, таким образом, всякая функция с гармониками из Ω_n принадлежит $L^{\perp}\left(T_{Q_n^1}\right)$.

Пусть

$$P_n(x) = \sum_{k \in \Gamma(2^{n+m})/\Gamma(2^n)} \prod_{j=1}^{m} a(k_j, x_j) k_j^{-1},$$

где $a(n, t) = \cos nt + \cos(n+1)t - \cos 2nt - \cos(2n+1)t$.

Как установил С. А. Теляковский [7], для функции

$$\varphi_N(x) = \sum_{k \in \Gamma(N)} \prod_{j=1}^{m} a(k_j, x_j) k_j^{-1}$$

справедливо порядковое неравенство $\|\varphi_N\|_\infty \ll 1$, $N \to \infty$, из которого следует, что и $\|P_n\|_\infty \ll 1$. Таким образом, выбирая в роли $P(x)$ функцию $C_2 P_n(x)$

с надлежащим образом подобранной постоянной C_2, согласно (9) имеем

$$E_n^1(g,x)_1 >> n^{-(m-1)/\theta} \sum_{k\in\Gamma(2^{n+m})/\Gamma(2^n)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1}\Big(k_j^{-r_1}+(k_j+1)^{-r_1}-(2k_j)^{-r_1} -$$

$$-(2k_j+1)^{-r_1}\Big) \asymp n^{-(m-1)/\theta} \sum_{k\in\Gamma(2^{n+m})/\Gamma(2^n)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1-1} >>$$

$$>> n^{-(m-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n+m} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}} k_j^{-r_1-1} \asymp n^{-(m-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n+m} 2^{-\|s\|_1 r_1} \asymp$$

$$\asymp 2^{-nr_1} n^{m-1} n^{-(m-1)/\theta} = 2^{-nr_1} n^{-(m-1)/\theta'}.$$

Оценка снизу , а вместе с ней и соотношения (2) и (3) теоремы, доказаны.

Перед тем как перейти к формулировке следующего утверждения, отметим, что оценки величин $E_n^{\gamma}(F)_1$ и $E_n^{\gamma'}(F)_1$, где F — либо класс $W^r_{1,\alpha}$, либо H^r_1, известны [5, с. 52–53]. При этом

$$E_n^{\gamma}\big(W^r_{1,\alpha}\big)_1 \asymp E_n^{\gamma}\big(H^r_1\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{m-1}$$

и

$$E_n^{\gamma'}\big(W^r_{1,\alpha}\big)_1 \asymp E_n^{\gamma'}\big(H^r_1\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1},$$

хотя между классами $W^r_{1,\alpha}$ и H^r_1 имеет место вложение $W^r_{1,\alpha} \subset H^r_1$. Иная ситуация, по сравнению с классами $W^r_{1,\alpha}$ и H^r_1, наблюдается при приближении классов $B^r_{1,\theta}$. Как следует из теоремы 1, при $\theta=\infty$ $E_n^{\gamma}\big(B^r_{1,\infty}\big)_1 \asymp \asymp E_n^{\gamma}\big(H^r_1\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{m-1}$ и $E_n^{\gamma'}\big(B^r_{1,\infty}\big)_1 \asymp E_n^{\gamma'}\big(H^r_1\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}$, что согласуется с тем, что класс $B^r_{1,\infty}$ эквивалентен классу H^r_1. Далее, уменьшение параметра θ (сужение классов $B^r_{1,\theta}$), как видим из теоремы 1, влечет за собой уменьшение порядков приближения. При $\theta=1$ и согласно теореме 1 $E_n^{\gamma}\big(B^r_{1,1}\big)_1 \asymp \asymp E_n^{\gamma'}\big(B^r_{1,1}\big)_1 \asymp 2^{-nr_1}$, что по порядку меньше величин

$$E_n^{\gamma}\big(W^r_{1,\alpha}\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{m-1} \text{ и } E_n^{\gamma'}\big(W^r_{1,\alpha}\big)_1 \asymp 2^{-nr_1} n^{\nu-1}$$

при $\nu>1$.

Теорема 2. *Пусть* $1\le\theta\le\infty$, $1<q<\infty$, $r_1>1-1/q$. *Тогда*

$$E_n^{\gamma}\big(B^r_{1,\theta}\big)_q \asymp 2^{-n(r_1-1+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+},$$

где $a_+=\max\{a,0\}$.

Доказательство. Получим сначала для величины $E_n^{\gamma}\big(B^r_{1,\theta}\big)_q$ оценку сверху. Пусть q_0 — произвольное число, удовлетворяющее условию $1<q_0<<q$. Тогда для $f\in B^r_{1,\theta}$ согласно соотношению [5, с. 25]

$$\|f\|_p << \left(\sum_s \Big(\|\delta_s(f,x)\|_q 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)}\Big)^p\right)^{1/p}, \quad 1\le q<p<\infty,$$

будем иметь

$$\left\| f(x)-S_n^{\gamma}(f,x)\right\|_q = \left\| \sum_{(s,\gamma)\geq n} \delta_s(f,x)\right\|_q <<$$

$$<< \left\{ \sum_{(s,\gamma)\geq n} \left(\|\delta_s(f,x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(1/q_0-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left\{ \sum_{(s,\gamma)\geq n} \left(\|A_s(f,x)\|_{q_0} 2^{\|s\|_1(1/q_0-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q}.$$

Применяя к $\|A_s(f,x)\|_{q_0}$ неравенство разных метрик Никольского, продолжаем оценку:

$$<< \left\{ \sum_{(s,\gamma)\geq n} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1(1-1/q_0)} 2^{\|s\|_1(1/q_0-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{ \sum_{(s,\gamma)\geq n} \left(\|A_s(f,x)\|_1 2^{\|s\|_1(1-1/q)}\right)^q \right\}^{1/q} = \mathcal{J}_n.$$

Для получения оценки $\mathcal{J}_n$ рассмотрим отдельно два случая.

Пусть $1\leq\theta\leq q$. Тогда в силу неравенства Иенсена [8, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\mu_2}\right)^{1/\mu_2} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\mu_1}\right)^{1/\mu_1}, \quad 1\leq\mu_1\leq\mu_2<\infty, \tag{10}$$

будем иметь

$$\mathcal{J}_n \leq \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} 2^{\|s\|_1(1-1/q)\theta}\right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta} 2^{-(s,\gamma)(r_1-1+1/q)\theta}\right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq 2^{-n(r_1-1/q')} \|f\|_{B^r_{1,\theta}} \leq 2^{-n(r_1-1/q')}. \tag{11}$$

Пусть теперь $\theta>q$. Применяя к $\mathcal{J}_n$ неравенство Гельдера с показателем θ/q, находим

$$\mathcal{J}_n \leq \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_1^{\theta}\right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-((s,r)-\|s\|_1(1-1/q))\theta q/(\theta-q)}\right)^{1/q-1/\theta} <<$$

$$<< \|f\|_{B^r_{1,\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-(s,r-1/q')\theta q/(\theta-q)}\right)^{1/q-1/\theta} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(s,\gamma)\geq n} 2^{-(s,\bar\gamma)(r_1-1/q')\theta q/(\theta-q)}\right)^{1/q-1/\theta}, \tag{12}$$

где $r-1/q'$ — вектор с координатами r_j-1/q', $j=\overline{1,m}$, а $\bar\gamma=(\bar\gamma_1,\ldots,\bar\gamma_m)$ — вектор с координатами $\bar\gamma_j=(r_j-1/q')/(r_1-1/q')$, $j=\overline{1,m}$. Замечая, что $\bar\gamma_j=\gamma_j$, $j=\overline{1,\nu}$, и $\gamma_j\leq\bar\gamma_j$, $j=\overline{\nu+1,m}$, используем для оценки последней суммы в (12) соотношение (7) и получаем в результате оценку

$$\mathcal{J}_n << 2^{-n(r_1-1/q')} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)}. \tag{13}$$

Объединяя (11) и (13), записываем

$$\left\| f(x) - S_n^{\gamma}(f, x) \right\|_q \ll 2^{-n(r_1 - 1/q')} \, n^{(\nu-1)(1/q - 1/\theta)},$$

и, таким образом, оценка сверху установлена.

Переходя к оценке снизу, рассмотрим функцию

$$f_{r,n}(x) = \sum_{(s,1)=n} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1} \sin k_j x_j,$$

где $\rho^+(s) = \{k\colon 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, m}\}$. Как отмечалось, функция

$$F_r(x, \alpha) = \sum_k \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1} \cos\left(k_j x_j + \frac{\alpha_j \pi}{2}\right), \quad \alpha_j \in R,$$

принадлежит классу H_1^r, откуда следует, что функция $g_{r,n}(x) = n^{-(m-1)/\theta} \times \times f_{r,n}(x) \in C_3 B_{1,\theta}^r$. Далее положим $\Delta_s = \{x\colon 2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1},\ j = \overline{1, m}\}$ и заметим, что $\Delta_s \cap \Delta_{s'} = \varnothing$ при $s \ne s'$. Тогда в силу теоремы Литтлвуда – Пэли (см., например, [4, с. 63])

$$E_n^1(g_{r,n}, x)_q = \| g_{r,n} \|_p \gg \left\| \left(\sum_{(s,1)=n} \left| \delta_s(g_{r,n}, x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \gg$$

$$\gg n^{-(m-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} \int_{\Delta_s} \left| \delta_s(f_{r,n}, x) \right|^q dx \right)^{1/q}. \tag{14}$$

Оценим интегралы в последней сумме (14). Поскольку при $2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}$ и $2^{-s_j} \le x_j < 2^{-s_j+1}$, $1/2 \le k_j x_j < 2$, то $\forall\, s_j$, $j = \overline{1, m}$, справедлива оценка

$$\left| \sum_{k_j = 2^{s_j - 1}}^{2^{s_j} - 1} k_j^{-r_1} \sin k_j x_j \right| \ge 2^{s_j - 1} \sin(1/2)\, 2^{-s_j r_1} \asymp 2^{-s_j (r_1 - 1)}$$

и, следовательно,

$$\int_{\Delta_s} \left| \delta_s(f_{r,n}, x) \right|^q dx \gg 2^{-\|s\|_1 (r_1 - 1) q}\, 2^{-\|s\|_1}. \tag{15}$$

Из (15) и (14) получим оценку

$$E_n^1(g_{r,n}, x)_q \gg n^{-(m-1)/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{-\|s\|_1 (r_1 - 1/q') q} \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(r - 1/q')} n^{-(m-1/\theta} \left(\sum_{(s,1)=n} 1 \right)^{1/q} \asymp 2^{-n(r_1 - 1/q')} n^{(m-1)(1/q - 1/\theta)}.$$

Полученная оценка, вместе с установленной оценкой сверху (13), дает точный порядок для $E_n^{\gamma}(B_{1,\theta}^r)_q$ при $q \le \theta \le \infty$.

Для установления искомой оценки снизу для $E_n^{\gamma}(B_{1,\theta}^r)_q$ в случае $1 \le \theta < q$ рассмотрим функцию $f^*(x) = \sum_{k \in \rho(s^*)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_1} \sin k_j x_j$, где $s^* = (s_1^*, \ldots, s_m^*)$ — вектор с натуральными координатами, удовлетворяющий условию $(s^*, 1) = n$. Легко проверить, что $f^* \in C_4 B_{1,\theta}^r$. Далее, рассуждая аналогично, как в случае $q \le \theta \le \infty$, приходим к оценке $E_n^1\left(f^*, x\right)_q >> 2^{-n(r_1-1/q')}$. Теорема доказана.

Отметим следующий факт. Известно [5, с. 35, 53], что

$$E_n^{\gamma}\left(W_{1,\alpha}^r\right)_q \asymp E_n^{\gamma}\left(H_1^r\right)_q \asymp 2^{-n(r_1-1/q')}\, n^{(\nu-1)/q}, \quad 1 < q < \infty,$$

т. е. в смысле порядков наилучших приближений полиномами из $T_{Q_n^{\gamma}}$ классы $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r неразличимы. Классы $B_{1,\theta}^r$ в этом смысле отличаются от классов $W_{1,\alpha}^r$ и H_1^r. Как следует из доказанной теоремы, при $1 \le \theta < \infty$ и $1 < q < \infty$ $E_n^{\gamma}\left(B_{1,\theta}^r\right)_q << E_n^{\gamma}(F)_q$, где F — либо $W_{1,\alpha}^r$, либо H_1^r.

Теорема 3. *При* $r_1 > 0$, $1 \le \theta \le \infty$ *справедливы оценки*

$$2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} << E_n^{\gamma'}\left(B_{\infty,\theta}^r\right)_\infty << 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)/\theta'}.$$

Доказательство. Для величины $E_n^{\gamma'}\left(B_{\infty,\theta}^r\right)_\infty$ установим оценку сверху.

Пусть $f \in B_{\infty,\theta}^r$. Как и в теореме 1, в качестве приближающего полинома рассмотрим полином

$$t(f, x) = \sum_{(s,\gamma') < n} A_s(f, x).$$

Тогда, применяя последовательно неравенства Минковского и Гельдера, а затем используя соотношение (7), имеем

$$\| f(x) - t(f, x)\|_\infty \le \sum_{(s,\gamma') \ge n} \| A_s(f, x) \|_\infty = \sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{(s,r)} \| A_s(f, x)\|_\infty 2^{-(s,r)} \le$$

$$\le \left(\sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{(s,r)\theta} \left\| A_s(f, x)\right\|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{-(s,r)\theta'} \right)^{1/\theta'} \le$$

$$\le \| f \|_{B_{\infty,\theta}^r} 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)/\theta'} \le 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)/\theta'}.$$

Оценка сверху установлена.

Оценку снизу получим как следствие оценки колмогоровского поперечника, которая будет найдена в п. 2 работы.

Отметим, что из полученных в теореме 3 оценок в случае $\theta = 1$ получаем точный порядок величин $E_n^{\gamma'}\left(B_{\infty,1}^r\right)_\infty$: $E_n^{\gamma'}\left(B_{\infty,1}^r\right)_\infty \asymp 2^{-nr_1}$.

В заключение сделаем некоторые замечания относительно приближения классов $W_{\infty,\alpha}^r$ и H_∞^r в равномерной метрике.

К. И. Бабенко [9] получил оценку $E_n^{\gamma}\left(W_{\infty,r}^r\right)_\infty << 2^{-nr_1} n^{m-1}$, $r_1 > 0$, которую в случае $\nu \ne m$ уточнил С. А. Теляковский [10]: $E_n^{\gamma'}\left(W_{\infty,\alpha}^r\right)_\infty << 2^{-nr_1} \times \times n^{\nu-1}$, $r_1 > 0$. Порядки величин $E_n^{\gamma}\left(W_{\infty,r}^r\right)_\infty$ и $E_n^{\gamma'}\left(W_{\infty,\alpha}^r\right)_\infty$ к настоящему времени автору не известны. Отметим только, что В. Н. Темляков в [5,с. 57] в случае $m = 2$ установил оценку снизу

$$E_n^{\gamma}\left(W_{\infty,\alpha}^r\right)_\infty >> 2^{-nr_1} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2}, \quad r_1 > 0,$$

а затем в [11] уточнил ее:

$$E_n^{\gamma}\left(W_{\infty,\alpha}^r\right)_\infty >> 2^{-nr_1}\, n^{\max(1/2, 1-r_1)}, \quad r_1 > 0,\ r \ne 1/2.$$

Аналогичные оценки сверху справедливы и на классах H_∞^r. Как установил

В. Н. Темляков [5, с. 55], $E_n^{\gamma}\left(H_{\infty}^r\right)_{\infty} \ll 2^{-nr_1} n^{m-1}$ и $E_n^{\gamma'}\left(H_{\infty}^r\right)_{\infty} \ll 2^{-nr_1} n^{\nu-1}$, и при этом в случае $m=2$ [5, с. 55] $E_n^{\gamma}\left(H_{\infty}^r\right)_{\infty} \asymp 2^{-nr_1} n$.

2. Колмогоровские поперечники классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_{∞}. Пусть X и Y — банаховы пространства, B_X — единичный шар в X и S — компактный оператор, действующий из X в Y.

Обозначим через $L_n(Y)$ множество всех линейных подпространств размерности не больше n данного банахова пространства Y. Тогда (см., например, [12, с. 123]) числа

$$d_n(S; X, Y) = \inf_{L_n \subset L_n(Y)} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in L_n} \|Sx - y\|_Y \tag{16}$$

называются поперечниками по Колмогорову.

Ниже в качестве Y выступает пространство L_{∞}, а в роли X — классы $B_{p,\theta}^r$, $1 < p \le \infty$, с соответствующим ограничением на параметр r, обеспечивающим вложение $B_{p,\theta}^r$ в L_{∞}. В этой ситуации вместо (16) будем использовать более удобное обозначение колмогоровского поперечника класса $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_{∞}:

$$d_M\left(B_{p,\theta}^r, L_{\infty}\right) = \inf_{L_M} \sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \inf_{a \in L_M} \|f - a\|_{\infty}.$$

Отметим, что исследование колмогоровских поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q при $1 < p, q < \infty$ проводилось в [1–3].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p \le 2$, $r_1 > 1/p$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/p + 1/2}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(1/2-1/\theta)_+} \ll d_M\left(B_{p,\theta}^r, L_{\infty}\right) \ll$$
$$\ll \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 - 1/p + 1/2}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{(1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}.$$

Теорема 5. *Пусть* $2 < p \le \infty$, $r_1 > 1/2$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 + (1/2-1/\theta)_+} \ll d_M\left(B_{p,\theta}^r, L_{\infty}\right) \ll$$
$$\ll M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1 + (1/2-1/\theta)_+}\sqrt{\log M}.$$

Доказательство. Сначала получим оценку сверху поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_{\infty})$ в теореме 4.

Для натуральных чисел j определим множества $S_j = \{s : j \le (s, \gamma') < j+1\}$. Тогда для количества элементов множества $\overline{Q}_j = \bigcup_{s \in S_j} \rho(s)$ будем иметь оценку $|\overline{Q}_j| \asymp 2^j j^{\nu-1}$.

Далее, по заданному числу $M \in N$ подберем l из соотношения $2^l l^{\nu-1} \asymp M$ и положим

$$M_j = \begin{cases} 2^j j^{\nu-1}, & 1 \le j \le l, \\ \left[2^{l(r_1+1/2)} l^{\nu-1} 2^{-j(r_1-1/2)}\right] + 1, & l+1 \le j < \alpha l, \quad \alpha = \dfrac{r_1 + 1/2}{r_1 - 1/2}, \\ 0, & j \ge \alpha l. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_j M_j \ll \sum_{j=1}^{l} 2^j j^{\nu-1} \sum_{l<j\le\alpha l} 2^{l(r_1+1/2)} l^{\nu-1} 2^{-j(r_1-1/2)} \ll$$

$$\ll 2^l l^{\nu-1} + 2^{l(r_1+1/2)} l^{\nu-1} \sum_{l<j\le\alpha l} 2^{-j(r_1-1/2)} \asymp 2^l j^{\nu-1} \asymp M.$$

Далее, пусть $f \in B^r_{2,\theta}$. Тогда при $1 \le \theta \le 2$ согласно (10) находим

$$\left\| \sum_{s\in S_j} \delta_s(f,x) \right\|_2 = \left(\sum_{s\in S_j} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{1/2} \le 2^{-jr_1} \left(\sum_{s\in S_j} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-jr_1} \left\| \sum_{s\in S_j} \delta_s(f,x) \right\|_{B^r_{2,\theta}} \le 2^{-jr_1}. \tag{17}$$

Если же $\theta > 2$, то вследствие неравенства Гельдера с показателем $\theta/2$, а также соотношения (7) имеем

$$\left\| \sum_{s\in S_j} \delta_s(f,x) \right\|_2 = \left(\sum_{s\in S_j} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\in S_j} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{s\in S_j} 2^{-2(s,r)\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \le 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{18}$$

Обозначим через $B^r_{2,\theta}(j)$ подмножество, состоящее из тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{j\le(s,\gamma')<j+1} \delta_s(t,x)$$

таких, что

$$\left\| \sum_{j\le(s,\gamma')<j} \delta_s(t,x) \right\|_2 \ll 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Тогда, поскольку согласно (17) и (18) для любой $f \in B^r_{2,\theta}$

$$\left\| \sum_{j\le(s,\gamma')<j+1} \delta_s(t,x) \right\|_2 \ll 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+},$$

то

$$d_M\left(B^r_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll \sum_{1\le j<\gamma l} d_{M_j}\left(B^r_{2,\theta}(j), L_\infty\right) + \left\| \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} \delta_s(f,x) \right\|_\infty = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{19}$$

Оценим сначала $\sum_2$. Применяя неравенство разных метрик и принимая во внимание, что $\alpha = (r_1+1/2)/(r_1-1/2)$, получаем

$$\sum\nolimits_2 \ll \left\| \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} \delta_s(f,x) \right\|_\infty \ll \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{\|s\|/2} \|\delta_s(f,x)\|_2 =$$

$$= \sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{\|s\|r_1} \|\delta_s(f,x)\|_2 \, 2^{\|s\|_1(1/2-r_1)} \le \left(\sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{\|s\|_1(1/2-r_1)\theta'} \right)^{1/\theta'} \le \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma')>\alpha l} 2^{\|s\|_1(1/2-r_1)\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha l(r_1-1/2)} l^{(\nu-1)/\theta'} = 2^{-l(r_1+1/2)} l^{(\nu-1)/\theta'}. \qquad (20)$$

Для оценки слагаемого $\sum_1$ потребуются дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.

Пусть $E = (R^N, \|\cdot\|)$ — N-мерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ — евклидова норма в R^N.

Обозначим через $S^{N-1} = \{x \in R^N : |||x||| = 1\}$ единичную сферу в R^N и μ — нормированную инвариантную относительно вращения меру на S^{N-1}. Через M обозначим средние Леви $M = \left(\int_{S^{N-1}} \|x\|^2 d\mu\right)^{1/2}$.

Используя двойственность между поперечниками по Колмогорову и Гельфанду (см., например, [12, с. 125]), а также результат из [14], в [13] получено следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть S — оператор вложения из l_2^N в E. Тогда*

$$d_n(S; l_2^N, E) \le K\left(\frac{N}{n}\right)^{1/2} M, \qquad (21)$$

где K — абсолютная постоянная.

Пусть $T(\overline{Q}_j)$ обозначает множество тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k \in \overline{Q}_j} c_k e^{i(k,x)}$$

с вещественными коэфициентами.

Положим

$$E = \left(L_\infty\left(T(\overline{Q}_j)\right), \|\cdot\| \right), \; \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty(\pi_m)}, \; \pi_m = \prod_{j=1}^m [-\pi; \pi]$$

и пусть S — оператор вложения $S: L_2\left(T(\overline{Q}_j)\right) \to L_\infty\left(T(\overline{Q}_j)\right)$. Воспользовавшись тем, что $L_2\left(T(\overline{Q}_j)\right)$ изометрично l_2^N, $N = 2^j j^{\nu-1}$, из (21) с помощью тех же рассуждений, что и в [13], получим такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если S — оператор вложения из $L_2\left(T(\overline{Q}_j)\right)$ в $L_\infty\left(T(\overline{Q}_j)\right)$, то*

$$d_{M_j}\left(S, L_2\left(T(\overline{Q}_j)\right), L_\infty\left(T(\overline{Q}_j)\right)\right) \ll M_j^{-1/2} 2^{j/2} j^{1/2}. \qquad (22)$$

Теперь, переходя непосредственно к оценке $\sum_1$ и учитывая, что в силу выбора чисел M_j $d_{M_j}\left(B^r_{1,\theta}(j), L_\infty\right) = 0$, при $1 \le j \le l$ имеем

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{l<j\le\alpha l} M_j^{-1/2} 2^{-jr_1+j/2} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} j^{\nu/2} =$$

$$= \sum_{l<j\le\alpha l} M_j^{-1/2} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{\nu/2} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \ll 2^{-(l_1/2)(r_1+1/2)} l^{-(\nu-1)/2} \times$$

$$\times \sum_{l<j\le\alpha l} 2^{-(j/2)(r_1-1/2)} j^{\nu/2} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \ll 2^{-lr_1} l^{1/2} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \qquad (23)$$

Теперь, сопоставляя оценки (23) и (20) и возвращаясь к (19), находим

$$d_M\left(B^r_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll 2^{-lr_1} l^{1/2} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+} \sqrt{\log M}. \qquad (24)$$

Оценка сверху в случае $p = 2$ установлена.

Полученную оценку распространим на случай $1 < p < 2$, исходя из следующих соображений.

Пусть $f \in B^r_{p,\theta}$. Тогда согласно неравенству разных метрик Никольского имеем

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \gg$$

$$\gg \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)(1/2-1/p)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_s 2^{(s,r-1/p+1/2)\theta}\|\delta_s(f,x)\|^\theta\right)^{1/\theta} = \|f\|_{B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}},$$

где под $r - 1/p + 1/2$ понимается вектор с координатами $r_j - 1/p + 1/2$, $j = \overline{1,m}$. Следовательно, $B^r_{p,\theta} \subset \rho B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}$, $\rho > 0$, и, таким образом,

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll d_M\left(B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll$$

$$\ll M^{-(r_1-1/p+1/2)}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1/p+1/2+(1/2-1/\theta)_+} \sqrt{\log M}.$$

Оценка сверху в теореме 4 доказана.

Оценка сверху в теореме 5 следует из (24), поскольку при $p \ge 2$ $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$ и, таким образом,

$$d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right) \ll d_M\left(B^r_{2,\theta}, L_\infty\right) \ll M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+(1/2-1/\theta)_+} \sqrt{\log M}.$$

Получим оценки снизу поперечников $d_M\left(B^r_{p,\theta}, L_\infty\right)$. Отметим, что оценка снизу в теореме 4 следует из теоремы 3.3 [2], а в теореме 5 при $2 < p < \infty$ — из торемы 3.2 [2]. Поэтому установим оценку снизу величины $d_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_2\right)$, из которой и будет следовать оценка $d_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty\right)$. Рассмотрим случаи: а) $1 \le \theta \le 2$; б) $\theta > 2$.

В случае $1 \le \theta \le 2$ будем пользоваться рассуждениями, аналогичными применяемым в [5] при оценке снизу поперечника класса $W^r_{2,\alpha}$ в пространстве L_2. Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть случай $\nu = m$.

Пусть $T\left(Q^1_n\right)$ обозначает множество функций, „номера" гармоник которых из множества $Q^1_n = \bigcup_{(s,1)\le n}\rho(s)$. Известно, что количество элементов множества Q^1_n имеет порядок $Q^1_n \asymp 2^n j^{m-1}$. По заданному M подберем $n \in N$ таким образом, что $|Q^1_n| > 2M$ и $|Q^1_n| \asymp M$. Пусть заданы M функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$, которые будем считать ортонормированными. Рассмотрим приближение в

L_2 функций $e^{i(k,x)}$, $k \in Q_n^1$, их суммами Фурье по системе функций φ_j, $j = \overline{1, M}$. Полагая $\alpha_k^j = (\varphi_j, e^{i(k,x)})$, в силу ортонормированности систем функций $\left\{ e^{i(k,x)} \right\}_{k \in Q_n^1}$ и $\left\{ \varphi_j \right\}_{j=1}^{M}$ получаем

$$\sum_{k \in Q_n^1} \left| \alpha_k^j \right|^2 \le 1$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k \in Q_n^1} \left| \alpha_k^j \right|^2 = \sum_{k \in Q_n^1} \sum_{j=1}^{M} \left| \alpha_k^j \right|^2 \le M.$$

Отсюда следует, что существует вектор $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_m^0) \in Q_n^1$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{M} \left| \alpha_{k^0}^j \right|^2 \le 1/2$$

и

$$\left\| e^{i(k^0,x)} - \sum_{j=1}^{M} \overline{\alpha}_k^j \varphi_j(x) \right\|_2^2 \ge 1/2. \tag{25}$$

Далее, рассмотрим функцию $g(x) = 2^{-(s^0,r)} e^{i(k^0,x)}$, где $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_m^0)$ — вектор, координаты которого удовлетворяют соотношению $2^{s_j^0 - 1} \le \left| k_j^0 \right| \le$ $\le 2^{s_j^0}$, $j = \overline{1, m}$. Легко видеть, что $g(x) \in B_{\infty,\theta}^r$, $1 \le \theta \le \infty$. Тогда, принимая во внимание (25), получаем

$$\inf_{c_j} \left\| g - \sum_{j=1}^{M} c_j \varphi_j \right\|_2 > \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) 2^{-(s^0, r)} >> 2^{-nr_1} \asymp M^{-r_1} \left(\log^{m-1} M \right)^{r_1}.$$

Таким образом, искомая оценка в случае $1 \le \theta \le 2$ установлена.

Пусть теперь $2 < \theta \le \infty$. Положим

$$\overline{S}_n = \{ s : \|s\|_1 = n, \ s_j \text{ — четные числа} \}, \quad \overline{Q}_n = \bigcup_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s); \quad T(\overline{Q}_n)$$

— множество полиномов с „номерами" гармоник из $\overline{Q}_n$. В [15] установлено, что для классов Никольского H_∞^r при $q \ge 1$ справедлива оценка

$$d_M\left(H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n), L_q \right) >> M^{-r_1} \left(\log^{m-1} M \right)^{r_1 + 1/2}, \ r_1 > 0, \ M \asymp 2^n n^{m-1}.$$

Но поскольку для $f \in H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n)$ в силу теоремы 1.1 [5, с. 32] $\| A_s(f, x) \|_\infty << 2^{-(s,r)}$, то

$$\| f \|_{B_{\infty,\theta}^r} = \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, x) \|_\infty^\theta \right)^{1/\theta} << \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp n^{(m-1)/\theta}.$$

Следовательно, если $f \in H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n)$, то функция $n^{-(m-1)/\theta} f \in C_5 B_{\infty,\theta}^r$ и, таким образом, для $q \ge 1$

$$d_M\left(B_{\infty,\theta}^r \cap T(\overline{Q}_n), L_\infty \right) >> d_M\left(H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n), L_q \right) n^{-(m-1)/\theta} >>$$

$$>> \left(M^{-1} \log^{m-1} M \right)^{r_1} \left(\log^{m-1} M \right)^{1/2 - 1/\theta}. \tag{26}$$

Таким образом, оценки снизу поперечников $d_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty\right)$ в обоих случаях установлены. Отметим, что из оценок (25) и (26) следует оценка снизу величины $E_n^{\gamma'}\left(B^r_{\infty,\theta}\right)_\infty$ в теореме 3, поскольку при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$

$$E_n^{\gamma'}\left(B^r_{\infty,\theta}\right)_\infty \geq d_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty\right) >> 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

В заключение заметим следующее. Сопоставляя оценки сверху в теоремах 3 и 4, предполагая при этом, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, нетрудно убедиться, что при $\theta \geq 2$ и $\nu = 1, 2$ или $1 \leq \theta < 2$ и $\nu \leq \theta'/2 + 1$

$$d_M\left(B^r_{\infty,\theta}, L_\infty\right) << M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+1/\theta'}, \tag{27}$$

и, таким образом, полагая $\theta = 1$, из теоремы 5 и оценки (27) получаем такое следствие.

Следствие 2. *При $r_1 > 1/2$ справедливо соотношение*

$$d_M\left(B^r_{\infty,1}, L_\infty\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1}.$$

1. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
2. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q. – Киев, 1990. – 47 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 90.30).
3. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – 178. – 112 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Теляковский С. А.* Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1404–1411.
8. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
9. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 5. – С. 982–985.
10. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63**(105), № 3. – С. 426–444.
11. *Темляков В. Н.* Оценки погрешностей квадратурных формул Фибоначчи для классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1991. – **200**. – С. 327–335.
12. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
13. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1990. – С. 22–37.
14. *Pajor A., Tomczak-Jaegermann N.* Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, № 4. – С. 637–642.
15. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988 – **189**. – С. 138–168.

Получено 03.02.93