УДК 517.514

А. О. Гохман (Воронеж. ун-т)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГЛАДКИХ ИНВАРИАНТОВ ГРУПП КОКСТЕРА В ТЕРМИНАХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ*

A smooth function invariant under the action of the Coxeter group can be represented as a function of basic invariants. We propose to describe the latter in terms of special anisotropic spaces, which enables us to obtain more precise estimates of its smoothness.

Гладка функція, інваріантна відносно групи Кокстера, зображається у вигляді функції від базисних інваріантів, яку пропонується описувати у термінах спеціальних анізотропних просторів, що дає більш точні оцінки її гладкості.

Пусть W — конечная группа Кокстера, действующая в $\mathbb{R}^n$, а $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_n(x))$ — базис в алгебре W-инвариантных полиномов. Любая функция $f(x)$ класса $C^k(\mathbb{R}^n)^W$ (т. е. инвариантная относительно W) представима в виде

$$f(x) = F(p(x)), \tag{1}$$

где имеет место понижение (падение) гладкости F относительно f. Это явление изучалось в работах [1 – 5], причем везде гладкость F описывалась в терминах $C^{[K/\mu]}$, где μ характеризует уровень падения гладкости на области или в конкретной точке. Однако, как нам кажется, такие классы не вполне отвечают поставленным требованиям. Дело в том, что величина μ_j потери гладкости $\partial F(p(x))/\partial p_j$ по сравнению с $F(p(x)) = f(x)$, вообще говоря, различна при разных j, поэтому понижение гладкости более точно характеризуется не числом $\mu = \max_{1\le j\le n}\mu_i$, а вектором $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Таким образом, непрерывными будут производные $D^\alpha F$ при $(\overline{\mu}, \alpha) \le k$. В связи с этим введем классы гладкости $C^{\overline{\mu},k}$, где $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $k \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что функция F принадлежит классу $C^{\overline{\mu},k}$ в точке или на области, если производные $D^\alpha F$ при $(\overline{\mu}, \alpha) \le k$ непрерывны в окрестности точки или на области соответственно.

Пусть $M = \operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n) \cup L$, где $L \subset \partial p(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать гладкость на M в смысле работы [4]: будем называть F принадлежащей $C^k(M)$, если $F \in C^k(\operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n))$ и $D^\alpha F$ при $|\alpha| \le k$ могут быть по непрерывности доопределены на все M. (Аналогично понимается и класс $C^{\overline{\mu},k}(M)$.)

В работе [6] для случая $W = B_n$ в терминах $C^{\overline{\mu},k}$ были получены оценки гладкости F в соотношении (1), превышающие те, которые могут быть получены в терминах традиционных классов C^r. При $W = B_n$ $p(x) = \sigma(\xi(x))$, где $\xi(x) = \left(x_1^2, \ldots, x_n^2\right)$, а $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — набор элементарных симметрических функций. Пусть $\kappa(x)$ — максимальное число совпадающих в x координат x_i, $\kappa_0(x)$ — число координат, равных нулю. Пусть $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{B_n}$, тогда в соотношении (1) $F(p)$ имеет в точке $p = p(y)$ гладкость $C^{[k/\mu_{B_n}(p)]}$, где $\mu_{B_n}(p) = \max(\kappa(\xi(y)), 2\kappa_0(y))$ [5]. Однако в [6] было установлено, что в точке $p = p(y)$ $F(p)$ имеет гладкость $C^{\overline{\mu}_{B_n}(p),k}$, где $\overline{\mu}_{B_n}(p) = \left(\lambda(p), \ldots, \lambda(p), \mu_{B_n}(p)\right)$

*Частично поддержана грантом РФФИ № 95-01-0032а.

и $\lambda(p) = \max(\kappa(\xi(y)), 2\kappa_0(y) - 1)$, что существенно усиливает оценки [5], несмотря на то, что последние точны в терминах C^r. Так, $\mu_{B_2}(0,0) = 4$, но $\overline{\mu}_{B_2}(0,0) = (3, 4)$, поэтому при $k = 7$ $F(p)$, вообще говоря, не является C^2-гладкой функцией в начале координат, в то время как $D^{(2,0)}F$ и $D^{(1,1)}F$ непрерывны в начале координат.

Выясняется, что анизотропность гладкости F имеет место и в классическом случае $W = S_n$, хотя и слабее выражена, чем в случае $W = B_n$. В работе [1] было установлено, что функции $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ в соотношении (1) соответствует функция $F(\sigma) \in C^{[k/n]}(\mathbb{R}^n)$ (в этом случае $p = \sigma$); в [4] доказано, что в любой точке $\sigma = \sigma(y)$ F имеет гладкость $C^{[k/\kappa(y)]}$, т. е. указанное n-кратное падение гладкости может иметь место лишь на одномерном многообразии. Приведенные оценки падения гладкости точны в терминах C^r в каждой точке. Как следует из [2, 4], если в y функция f не достигает уровня гладкости $C^{k\kappa(y)}$, то в $\sigma(y)$ соответствующая ей функция F, вообще говоря, не имеет гладкости C^k (такой пример можно привести для любых k и y). Однако при гладкости f, близкой к $C^{k\kappa(y)}$, в терминах $C^{\overline{\mu},k}$ можно дать более точные оценки гладкости F в $\sigma(y)$.

Введем следующие обозначения. Пусть в $\hat{x}$ входит часть координат x, а оставшиеся образуют $\hat{\hat{x}}$. Тогда $f(x) = \hat{F}\left(\sigma_1(\hat{x}), \ldots, \sigma_{\dim \hat{x}}(\hat{x}), \hat{\hat{x}}\right)$. Под $\partial f(x) / \partial \sigma_m(\hat{x})$ будем понимать $\partial \hat{F}\left(\sigma(\hat{x}), \hat{\hat{x}}\right) / \partial \sigma_m$. Далее, будем обозначать через $C^{k+\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$, классы Гельдера.

Лемма 1. *Пусть в окрестности* ω_0 *начала координат* S_n*-инвариантная функция* $f(x)$ *принадлежит классу Гельдера* $C^{(kn-1)+1}$, $k \in \mathbb{N}$, *но не принадлежит* C^{kn}. *Тогда соответствующая ей в соотношении* (1) $F(\sigma) \in C^{(n-1, \ldots, n-1, n), kn-1}(\Omega_0)$, *где* $\Omega_0 = \operatorname{Int} \sigma(\omega_0) \cup \{0\}$, *хотя, вообще говоря,* $F(\sigma) \notin C^k(\Omega_0)$.

Доказательство. Как следует из [4], при $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_i}(\sigma(x)) = \sum_{m=i}^{n} (-1)^{m-i} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_m(x_1, \ldots, x_m)} \theta_{m-i}(x_m, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где $\theta_s(x) = \sum_{|\alpha| = s} x^\alpha$, $\sigma_1(x_1) = x_1$. В [4] была введена система функций

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_p(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_j)}, \quad p \le j.$$

При этом $\Phi_r^{(p)}(x) = \Phi_j^{(p)}(\pi_{jr} x)$, где $\pi_{jr} \in S_n$ — транспозиция, и

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \frac{\Phi_{p-1}^{(p-1)}(x) - \Phi_j^{(p-1)}(x)}{x_j - x_{p-1}} =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{p-1}} \right) \Phi_{p-1}^{(p-1)} \right] \left(\tau(\pi_{jp-1} x) + (1-\tau) x \right) d\tau. \tag{3}$$

При $k = 1$ из (2) и (3) следует, что даже при разрывной в нуле $\partial F / \partial \sigma_n$ в силу того, что $D^\alpha f$ при $|\alpha| = n - 1$ удовлетворяет в нуле условию Липшица,

$\Phi_n^{(n)}(x) = \partial F(\sigma(x))/\partial\sigma_n$ ограничена при $\sigma(x) \in \operatorname{Int}\sigma(\omega_0)$. В силу (2) $\partial F(\sigma)/\partial\sigma_i$ при $i<n$ непрерывны на Ω_0. При $k>1$ в силу аналогичных рассуждений непрерывными на Ω_0 будут $D^\alpha F$, $|\alpha|=k$, кроме, возможно, тех, в которых последнее дифференцирование совершается по σ_n. Однако в силу того, что внутри $\sigma(\omega_0)$ F имеет ту же гладкость, что и f, производные $D^\alpha F$ там непрерывны при $|\alpha|=k$, и поэтому порядок дифференцирования не играет роли. Следовательно, на Ω_0 непрерывными будут производные $D^\alpha F$ при $|\alpha|=k$, $\alpha_n \neq k$. Лемма доказана.

В других точках $\sigma=\sigma(x)$, где $\kappa(x)=n$, такого эффекта анизотропности гладкости не наблюдается.

Лемма 2. *Пусть в окрестности точки* $y_0=(a,\ldots,a)\in\mathbb{R}^n$, $a\neq 0$, S_n-*инвариантная функция* $f(x)$ *имеет гладкость* C^{n-1}, *но не* C^n. *Если* $\partial F/\partial\sigma_n$ *разрывна в* $\sigma(y_0)$, *то разрывными в* $\sigma(y_0)$ *будут также и* $\partial F/\partial\sigma_j$, $j<n$.

Заключение леммы следует непосредственно из формулы (2) при $i=n-1$, $n-2,\ldots,2,1$.

Пусть $\kappa_1(x)$ — максимальная кратность $x_i\neq 0$ (т. е. $\kappa(x)=\max(\kappa_1(x), \kappa_0(x))$). Через L_m будем обозначать ту часть $\partial\sigma(\mathbb{R}^n)$, для σ-прообразов x точек которой $m=\kappa_0(x)>\kappa_1(x)$. Далее, пусть $M_m=\{\sigma\in\sigma(\mathbb{R}^n)\colon \sigma=\sigma(x), \kappa(x)\leq m\}$; уже было отмечено, что при $f\in C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ функция $F\in C^{[k/m]}(M_m)$ [4]. Обозначим $\Sigma_m=M_{m-1}\cup L_m$, $m=2,\ldots,n$.

Теорема. *Пусть* S_n-*инвариантная функция* $f(x)$ *принадлежит классу Гельдера* $C^{(km-1)+1}(\mathbb{R}^n)$ *при некоторых* $k,m\in\mathbb{N}$, $1<m\leq n$, *но не принадлежит* $C^{km}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда в соотношении* (1) $F(\sigma)\in C^{(m-1,\ldots,m-1,m),\,km-1}(\Sigma_m)$, *хотя, вообще говоря,* $F(\sigma)\notin C^k(\Sigma_m)$.

Доказательство. В [4] доказано, что при x, близких к $y\in\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_j}(\sigma(x)) = \sum_s \frac{A_s(x)}{B_s(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial\sigma_{m_s}(x^{(s)})}, \quad j=1,\ldots,n, \tag{4}$$

где A_s, B_s — полиномы ($B_s(y)\neq 0$), а $x^{(s)}$ при любом s — группа координат x_i, характеризующаяся тем свойством, что координаты y с теми же номерами совпадают друг с другом. При многократном дифференцировании в силу (4) и (3) гладкость каждый раз понижается в окрестности y на $\kappa(y)$ единиц. Рассмотрим оператор (4) более подробно. Введем следующее обозначение. Пусть для $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ и $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$, $r=0,1,2,\ldots$

$$\Gamma_{I,J}^{(r)}(\varphi(x)) = \sum_{i\in I} x_i^r \prod_{\substack{q\in I\\ q\neq i}}(x_i-x_q)^{-1}\prod_{p\in J}(x_i-x_p)^{-1}\varphi_i(x),$$

где I и J — непересекающиеся подмножества $\{1,2,\ldots,n\}$ мощностей $|I|$ и $|J|$ соответственно. При $j=1,\ldots,n$

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_j}(\sigma(x)) = (-1)^{j+1}\Gamma^{(n-j)}_{\{1,\ldots,n\},\varnothing}(\operatorname{grad} f(x)). \tag{5}$$

В [7] было доказано, что при $I=\{1,\ldots,m\}$, $I'=\{2,\ldots,m\}$, $J=\{m+1,\ldots \ldots,n\}$, $J'_l=\{l,\ldots,n\}$

$$\Gamma^{(r)}_{I,J}(\varphi) = \frac{x_1^r \Gamma^{(0)}_{I,\varnothing}(\varphi)}{\prod_{p\in J}(x_1 - x_p)} - \sum_{l=m+1}^{n} \frac{\Gamma^{(r)}_{I',J'_l}(\varphi)}{\prod_{m+1\le s\le l}(x_1 - x_s)} + \\ + \frac{\sum_{\substack{\alpha+\beta=r-1\\ \alpha,\beta\ge 0}} x_1^{\alpha}\Gamma^{(\beta)}_{I',\varnothing}(\varphi)}{\prod_{p\in J}(x_1 - x_p)}. \qquad (6)$$

Если в качестве I брать совокупности индексов координат, которые совпадают в точке y, а $J_I = \{1, \ldots, n\}\setminus I$, то в окрестности y

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma(x)) = (-1)^{j+1}\sum_{I}\Gamma^{(n-j)}_{I,J_I}(\operatorname{grad} f(x)), \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

что и соответствует формуле (4). При этом из (5) – (7) видно, что при любом I дифференцирование по полиному размерности $|I|$ от координат такой группы совершается в (4) один раз, другие производные берутся по полиномам меньшей размерности. Пусть $\hat{I}$ и $\hat{x}$ соответствуют нулевым координатам $y \in \in \sigma^{-1}(\Sigma_m)$. Тогда из (6) видно, что рациональный множитель при $\partial f(x)/\partial\sigma_{|\hat{I}|}(\hat{x}) = (-1)^{|\hat{I}|+1}\Gamma^{(0)}_{\hat{I},\varnothing}(\operatorname{grad} f(x))$ обращается в нуль в точке y кроме случая, когда $j = n$ в формулах (4), (5), (7). Применив далее рассуждения леммы 1, получим искомый результат. Теорема доказана.

В силу леммы 2 вне Σ_m подобное улучшение гладкости не имеет места. Обращает на себя внимание тот факт, что в случаях $W = B_n$ и $W = S_n$ векторы $\overline{\mu}$ имеют идентичную структуру $\overline{\mu} = (m-\delta, \ldots, m-\delta, m)$, где в одних точках $\delta = 0$ и $C^{\overline{\mu},k}$ фактически совпадает с $C^{[k/m]}$, а в других — $\delta = 1$ и оценки гладкости удается уточнить. В случае, когда $f \in C^{(km-1)+\alpha}(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ при $\alpha < 1$, подобное уточнение гладкости не имеет места, что видно уже при $n = 2$, так что в этом смысле результат оптимален.

Заметим в заключение, что в качестве следствия из доказанной нами теоремы можно получить аналогичное усиление теоремы деления для случая конечной гладкости.

1 *Barbancon G.* Théoréme de Newton pour les fonctions de classe C^r // Ann. sci. ecole norm. Super. Ser. 4. – 1972. – **5**. – P. 435–458.
2. *Ball J. M.* Differentiability properties of symmetric and isotropic functions // Duke Math. J. – 1984. – **51**, № 3. – P. 699–728.
3. *Barbancon G.* Invariants de classe C^r des groupes finis engendres par des reflexions et théoréme de Chevalley en classe C^r // Ibid. – 1986. – **53**, № 3. – P. 563–584.
4. *Гохман А. О.* Гладкие симметрические функции // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 743–750.
5. *Гохман А. О.* О гладких функциях, инвариантных относительно групп, порожденных отражениями // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 4. – С. 146–147.
6. *Гохман А. О.* О понижении гладкости в теореме о дифференцируемых инвариантах групп Кокстера // Функцион. анализ и его прил. – 1994. – **28**, № 4. – С. 82–84.
7. *Гохман А. О.* О теореме Ньютона для гладких функций. – М., 1984. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 8102-84.

Получено 25.04.95